

# MODERNE WISKUNDE

UITWERKINGEN



Noordhoff Uitgevers



10e editie

# **Moderne Wiskunde**

6 vwo B

**uitwerkingen**

*Ontwerp omslag:* G2K Designers, Groningen / Amsterdam

*Ontwerp binnenwerk:* Ebel Kuipers, Sappemeer

*Technisch tekenwerk:* OKS, Chennai (India)

Deze uitgave is gedrukt op FSC-papier.

0 / 13

© 2013 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Houten, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, [www.reprorecht.nl](http://www.reprorecht.nl)). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, [www.stichting-pro.nl](http://www.stichting-pro.nl)).

*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission of the publisher.*

ISBN 978-90-01-79463-7



10e editie

# Moderne Wiskunde

## 6 vwo B

### uitwerkingen

Jos Baars

Dick Bos

Wim van Dijk

Rob Fonteijne

Nenke Gietema

Wout de Goede

Simon Min

Ipe Smit

Renee Springer

Harm Udding

Ed Vervoort

Arthur Visser

Cornelia Wallien

Ruerd Wijma



# Inhoudsopgave

## **Uitwerkingen leerboek**

|           |                             |     |
|-----------|-----------------------------|-----|
| <b>H1</b> | Periodieke bewegingen       | 6   |
| <b>H2</b> | Toepassingen van integreren | 31  |
|           | Vaardigheden 1              | 57  |
|           | Extra oefeningen            | 64  |
| <b>H3</b> | Cirkels en hoeken           | 77  |
| <b>H4</b> | Tekenen en bewijzen         | 100 |
|           | Vaardigheden 2              | 127 |
|           | Extra oefeningen            | 133 |
| <b>H5</b> | Goniometrische formules     | 144 |
| <b>H6</b> | Functies onderzoeken        | 163 |
|           | Vaardigheden 3              | 199 |
|           | Extra oefeningen            | 206 |
|           | Examenvoorbereiding         | 218 |

## **Uitwerkingen hulpboek**

|           |                    |     |
|-----------|--------------------|-----|
| <b>H1</b> | Voorbeeldproefwerk | 255 |
| <b>H2</b> | Voorbeeldproefwerk | 257 |
| <b>H3</b> | Voorbeeldproefwerk | 259 |
| <b>H4</b> | Voorbeeldproefwerk | 260 |
| <b>H5</b> | Voorbeeldproefwerk | 262 |
| <b>H6</b> | Voorbeeldproefwerk | 265 |

# Hoofdstuk 1 – Periodieke bewegingen

## Voorkennis: Sinusoiden

Pagina 12:

**V-1a** De evenwichtsstand is  $y = 1$ , de periode is  $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$  en de amplitude is  $|-2| = 2$ .

**b**  $-2\sin(x - \frac{1}{3}\pi) + 1 = 1$

$$\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$$

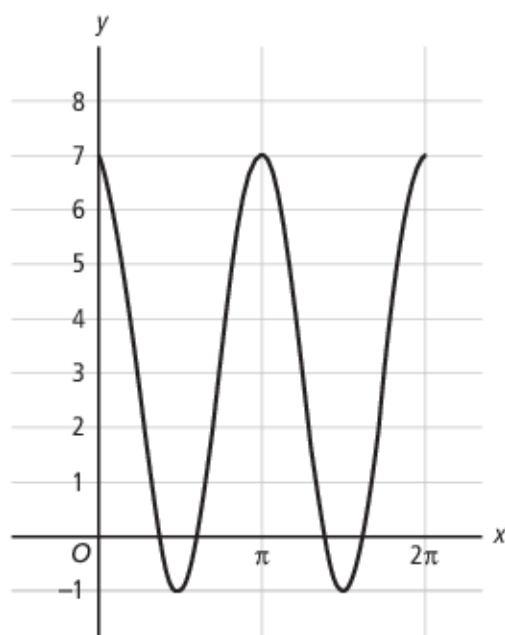
$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op het interval  $[-4, 10]$  zijn  $-\frac{2}{3}\pi$ ,  $\frac{1}{3}\pi$ ,  $1\frac{1}{3}\pi$  en  $2\frac{1}{3}\pi$ .

**c** Vervang  $x$  door  $x + \frac{1}{4}\pi$ .

$$\text{Dus } g(x) = -2\sin(x + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi) + 1 = -2\sin(x - \frac{1}{12}\pi) + 1.$$

**V-2a**



**b** Het bereik is  $[3 - 4, 3 + 4] = [-1, 7]$ ; de periode is  $\frac{2\pi}{2} = \pi$  en de amplitude is 4.

**c** Uit  $\frac{2\pi}{b} = \frac{1}{2}$  volgt  $b = 4\pi$ .

**V-3a** Periode  $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$ ; amplitude 3; evenwichtsstand  $y = 0$ ; beginpunt  $(4\frac{5}{6}\pi, 0)$ ; bereik  $[-3, 3]$ .

**b** Periode  $\frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10}$ ; amplitude 12; evenwichtsstand  $y = 5$ ; beginpunt  $(0, 17)$ ; bereik  $[-7, 17]$ .

**c** Periode  $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$ ; amplitude  $\frac{1}{2}$ ; evenwichtsstand  $y = -2$ ; beginpunt  $(4, -2)$ ; bereik  $[-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}]$ .

**d** Periode  $\frac{2\pi}{0,1} = 20\pi$ ; amplitude 650; evenwichtsstand  $y = 300$ ; beginpunt  $(3, 950)$ ; bereik  $[-350, 950]$ .

Pagina 13:

**V-4a** De evenwichtsstand  $y = \frac{-5+3}{2} = -1$ .

De amplitude is 4.

Een golf loopt van  $x = -2$  tot  $x = 4$ , dus de periode is 6.

**b** Het beginpunt van een golf ligt bij  $x = -2$  dus  $c = -2$ .

**c**  $d = -1$ ,  $a = 4$ ,  $c = -2$  en  $b = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$ .  
Dus  $f(x) = -1 + 4\sin(\frac{1}{3}\pi(x+2))$ .

**d** De parameters  $d$ ,  $a$  en  $b$  blijven hetzelfde.  
Een hoogste punt ligt bij  $x = -\frac{1}{2}$ , dus  $c = -\frac{1}{2}$ .  
Dus  $g(x) = -1 + 4\cos(\frac{1}{3}\pi(x+\frac{1}{2}))$ .

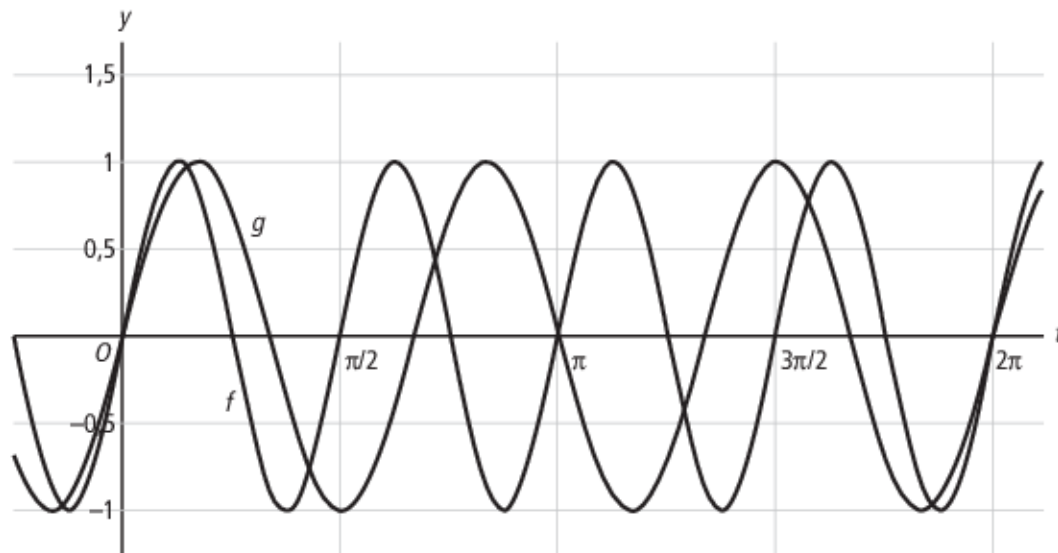
**V-5a**  $d = 3$ ,  $a = 6$ ,  $c = -\frac{1}{6}\pi$  en  $b = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$ .  
 $f(x) = 3 + 6\sin(\frac{2}{5}\pi(x+\frac{1}{6}\pi))$

**b** De periode is  $2 \cdot 1 = 2$ ; de evenwichtsstand is  $y = \frac{120 - 200}{2} = -40$  en de amplitude is  $120 + 40 = 160$ .

$d = -40$ ,  $a = 160$ ,  $c = 0$  en  $b = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .

Dus  $f(x) = -40 + 160\cos(\pi x)$  of  $g(x) = -40 + 160\sin(\pi(x - 1\frac{1}{2}))$ .

**V-6a**



De periode van  $f$  is  $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$  en de periode van  $g$  is  $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ .

**b** Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van  $\frac{1}{2}\pi$  en  $\frac{2}{3}\pi$  is  $2\pi$ .

**c**  $\sin(3t) = \frac{1}{2}$   
 $3t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $3t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $t = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$  of  $t = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$   
 $t = \frac{1}{18}\pi$ ;  $t = \frac{13}{18}\pi$ ;  $t = \frac{5}{18}\pi$ ;  $t = \frac{17}{18}\pi$ ;  $t = 1\frac{7}{18}\pi$ ;  $t = 1\frac{11}{18}\pi$

**V-7a**  $2\sin(\frac{1}{2}x) = 1$   
 $\sin(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$  of  $x = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

**b**  $2\cos(\pi(x-1)) = -\sqrt{2}$   
 $\cos(\pi(x-1)) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$   
 $\pi(x-1) = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $\pi(x-1) = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x-1 = \frac{3}{4} + k \cdot 2$  of  $x-1 = -\frac{3}{4} + k \cdot 2$   
 $x = 1\frac{3}{4} + k \cdot 2$  of  $x = \frac{1}{4} + k \cdot 2$

**c**  $3\sin(x - \frac{2}{3}\pi) + 1 = -\frac{1}{2}$   
 $\sin(x - \frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$   
 $x - \frac{2}{3}\pi = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x - \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

**d**  $5 - 3\cos(2x) = 2$   
 $\cos(2x) = 1$   
 $2x = 0 + k \cdot 2\pi$   
 $x = k \cdot \pi$

- e**  $4\cos^2(2x) = 3$   
 $\cos^2(2x) = \frac{3}{4}$   
 $\cos(2x) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$   
 $2x = \pm \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $2x = \pm \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \pm \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$  of  $x = \pm \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$   
 $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$  of  $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
- f**  $2\sin^2(x) = \sin(x)$   
 $\sin(x) = 0$  of  $2\sin(x) = 1$   
 $x = k \cdot \pi$  of  $\sin(x) = \frac{1}{2}$   
 $x = k \cdot \pi$  of  $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

- V-8a**  $f'(t) = 0 + 2\cos(\frac{1}{2}t) \cdot \frac{1}{2} = \cos(\frac{1}{2}t)$
- b**  $g'(x) = 0 - 3 \cdot -\sin(\frac{1}{6}\pi(x+3)) \cdot \frac{1}{6}\pi$   
 $g'(x) = \frac{1}{2}\pi \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi(x+3))$
- c**  $h'(x) = -\cos(x)\cos(x) - \sin(x) \cdot -\sin(x)$   
 $h'(x) = -\cos^2(x) + \sin^2(x)$
- d**  $k'(t) = 4 \cdot 2\sin(t) \cdot \cos(t)$   
 $k'(t) = 8\sin(t) \cdot \cos(t)$
- e**  $l'(t) = 6 \cdot 3\cos^2(\pi t) \cdot -\sin(\pi t) \cdot \pi$   
 $l'(t) = -18\pi\sin(\pi t) \cdot \cos^2(\pi t)$
- f**  $m'(x) = \frac{2\cos(x) \cdot (1 - \cos(x)) - (2\sin(x) - 3) \cdot \sin(x)}{(1 - \cos(x))^2}$   
 $m'(x) = \frac{2\cos(x) - 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) + 3\sin(x)}{(1 - \cos(x))^2}$   
 $m'(x) = \frac{3\sin(x) + 2\cos(x) - 2}{(1 - \cos(x))^2}$

## 1-1 Parametervoorstellingen

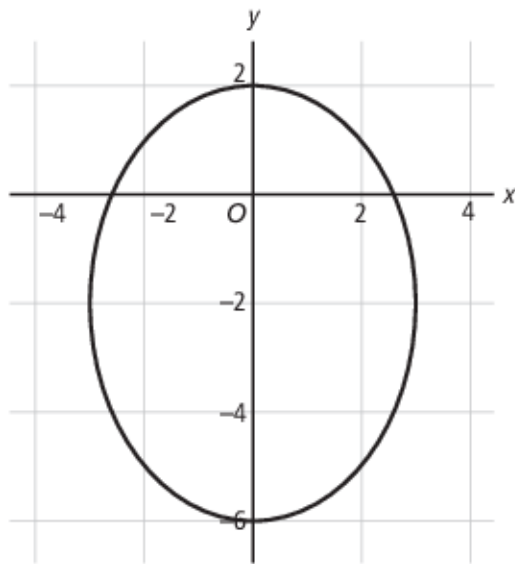
Pagina 14:

- 1a**  $P(1 + \sin(0), 3\cos(0 - \frac{1}{3}\pi)) = (1 + 0, 3 \cdot \frac{1}{2}) = (1, 1\frac{1}{2})$
- b**  $P(1 + \sin(\frac{1}{3}\pi), 3\cos(0)) = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, 3);$   
 $P(1 + \sin(\frac{1}{2}\pi), 3\cos(\frac{1}{6}\pi)) = (1 + 1, 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}) = (2, 1\frac{1}{2}\sqrt{3});$   
 $P(1 + \sin(\frac{2}{3}\pi), 3\cos(\frac{1}{3}\pi)) = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1\frac{1}{2})$
- c** Het punt  $P$  beweegt met de wijzers van de klok mee.
- d** Als punt  $P$  zich op de  $x$ -as bevindt, is de  $y$ -coördinaat gelijk aan 0.  
 $\cos(t - \frac{1}{3}\pi) = 0$   
 $t - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $t - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $t = \frac{5}{6}\pi$  of  $t = 1\frac{5}{6}\pi$   
 Hierbij horen de punten  $P(1 + \sin(\frac{5}{6}\pi), 0) = (1\frac{1}{2}, 0)$  en  $P(1 + \sin(1\frac{5}{6}\pi), 0) = (\frac{1}{2}, 0)$ .



Pagina 15:

**2a**  $-3 \leq x \leq 3$  en  $-6 \leq y \leq 2$

**b**

**c** Voor een snijpunt met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .

$$3\sin(t) = 0$$

$$\sin(t) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = \pi \text{ of } t = 2\pi$$

Dit geeft  $y = 2$ ,  $y = -6$  en  $y = 2$ .

Dus het gaat om de punten  $(0, 2)$  en  $(0, -6)$ .

Voor een snijpunt met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .

$$4\cos(t) - 2 = 0$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{3}\pi \text{ of } t = 1\frac{2}{3}\pi$$

Dit geeft  $x = 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$  of  $x = 3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

Dus het gaat om de punten  $(-1\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$  en  $(1\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ .

**d** Voor de snijpunten geldt  $y = 1$ .

$$4\cos(t) - 2 = 1$$

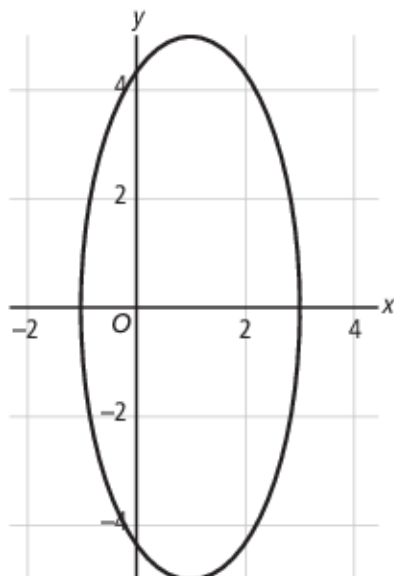
$$\cos(t) = \frac{3}{4}$$

Er geldt  $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ , dus  $\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)}$ .

Dit geeft  $x = 3\sin(t) = \pm 3\sqrt{1 - \cos^2(t)} = \pm 3\sqrt{1 - (\frac{3}{4})^2} = \pm 3\sqrt{\frac{7}{16}} = \pm \frac{3}{4}\sqrt{7}$ .

De lengte van lijnstuk  $AB$  is dan  $2 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{7} = 1\frac{1}{2}\sqrt{7} \approx 3,97$ .

**3a**  $-1 \leq x \leq 3$  en  $-5 \leq y \leq 5$

**b**

**c** De symmetrieassen horen bij de evenwichtsstanden, dus  $x = 1$  en  $y = 0$ .

**d** Voor de snijpunten geldt  $y = 4x$ .

$$5\sin(t) = 4 \cdot (1 + 2\cos(t))$$



$$5\sin(t) = 4 + 8\cos(t)$$

Invoer:  $Y1 = 5\sin(X)$  en  $Y2 = 4 + 8\cos(X)$

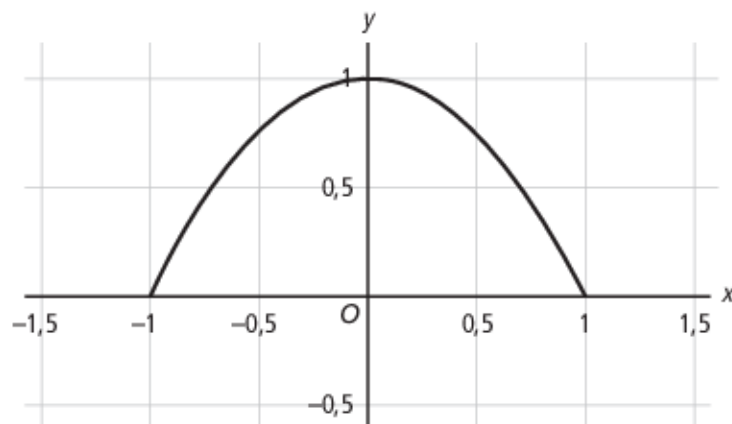
Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 2\pi$ ,  $Y_{\min} = -5$ ,  $Y_{\max} = 12$

Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solve, ISCT (Casio)

De oplossingen zijn  $t \approx 1,450$  en  $t \approx 3,716$ .

Bij deze waarden horen de punten  $(1,24; 4,96)$  en  $(-0,68; -2,72)$ .

4a



b  $y = \cos^2(t) = 1 - \sin^2(t) = 1 - x^2$

5a Voor een snijpunt met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .

$$(\cos(t) - 1) \cdot (2\cos(t) + 1) = 0$$

$$\cos(t) = 1 \text{ of } \cos(t) = -\frac{1}{2}$$

$$t = 0 \text{ of } t = \frac{2}{3}\pi \text{ of } t = -\frac{2}{3}\pi,$$

Hierbij horen de punten  $(0, 0)$ ,  $(1\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$  en  $(-1\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ .

b De  $x$ -coördinaat is maximaal 3 en minimaal  $-3$ .

Er geldt respectievelijk  $3\sin(t) = 3$  en  $3\sin(t) = -3$ .

Hierbij horen  $t = \frac{1}{2}\pi$  en  $t = -\frac{1}{2}\pi$  en de punten  $(3, -1)$  en  $(-3, -1)$ .

c Tegengestelde  $x$ -coördinaten:

$$x(-a) = 3\sin(-a) = -3\sin(a) = -x(a)$$

Dezelfde  $y$ -coördinaten:

$$y(-a) = (\cos(-a) - 1)(2\cos(-a) + 1) = (\cos(a) - 1)(2\cos(a) + 1) = y(a)$$

d 
$$\begin{cases} x = 3\sin(t) + 2 \\ y = (\cos(t) - 1)(2\cos(t) + 1) + 3 \end{cases}$$

## 1-2 Bijzondere punten

Pagina 16:

6a 
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{3\sin(2 \cdot 0,5) - 0}{2\cos(0,5 - \frac{1}{2}\pi) - 0} \approx 2,63$$

b 
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{3\sin(2 \cdot 0,1) - 0}{2\cos(0,1 - \frac{1}{2}\pi) - 0} \approx 2,99$$

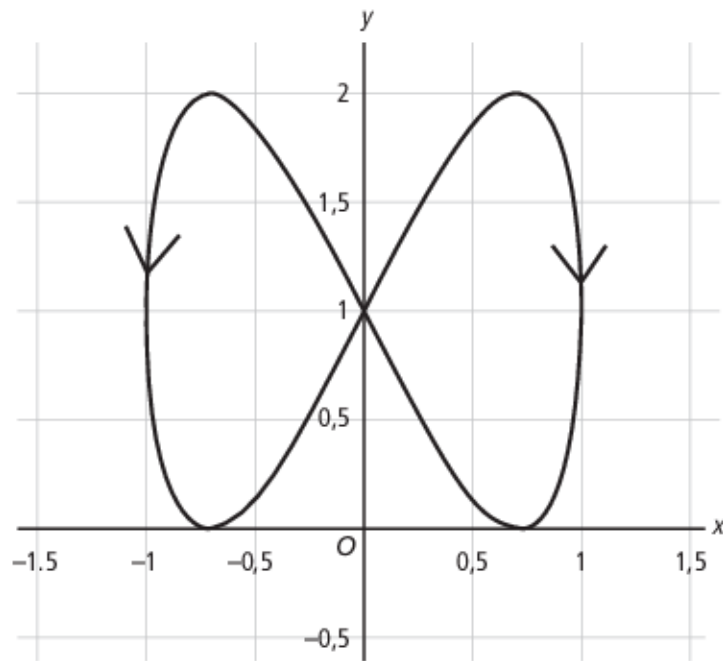
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = \frac{3\sin(2 \cdot 0,01) - 0}{2\cos(0,01 - \frac{1}{2}\pi) - 0} \approx 3,00$$

c Neem  $t = 0,0001$  dan is 
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\sin(0,0002) - 0}{2\cos(0,0001 - \frac{1}{2}\pi) - 0} \approx 3,0000.$$

d 
$$\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\frac{\Delta t}{\Delta x}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \times \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



7a



$$\mathbf{b} \quad \frac{dx}{dt} = x'(t) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = -\cos(t)$$

$$\mathbf{c} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Big|_{t=\pi} = \frac{-\cos(\pi)}{-\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\mathbf{d} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Big|_{t=\frac{1}{2}\pi} = \frac{-\cos(\frac{1}{2}\pi)}{-\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{4}\pi)} = \frac{0}{-\frac{1}{4}\sqrt{2}} = 0$$

$\mathbf{e}$  Bij  $P(1, 1)$  hoort  $t = 0$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Big|_{t=0} = \frac{\cos(0)}{\frac{1}{2}\sin(0)} = \frac{1}{0}$$

Je kunt de helling van de raaklijn in  $P$  niet berekenen, omdat de noemer van de breuk  $\frac{dx}{dt}$  gelijk aan nul is.

**Pagina 17:**

**8a** De raaklijn is evenwijdig aan de  $x$ -as in die punten waar de  $y$ -coördinaat maximaal of minimaal is. Er moet dus gelden  $y'(t) = 0$ .

$$y'(t) = -4\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$-4\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$$

$$\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$$

$$t + \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$$

$$t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = -\frac{1}{3}\pi \text{ geeft het punt } (2 - \sin(-\pi), 4\cos(0)) = (2, 4).$$

$$t = \frac{2}{3}\pi \text{ geeft het punt } (2 - \sin(2\pi), 4\cos(\pi)) = (2, -4).$$

**b** De raaklijn is evenwijdig aan de  $y$ -as in die punten waar de  $x$ -coördinaat maximaal of minimaal is. Er moet dus gelden  $x'(t) = 0$ .

$$x'(t) = -3\cos(3t)$$

$$3\cos(3t) = 0$$

$$\cos(3t) = 0$$

$$3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft het punt } (2 - \sin(\frac{1}{2}\pi), 4\cos(\frac{1}{2}\pi)) = (1, 0)$$

$$t = \frac{5}{6}\pi \text{ geeft het punt } (2 - \sin(2\frac{1}{2}\pi), 4\cos(\frac{5}{6}\pi)) = (1, -2\sqrt{3})$$

$$t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ geeft het punt } (2 - \sin(4\frac{1}{2}\pi), 4\cos(1\frac{5}{6}\pi)) = (1, 2\sqrt{3})$$

$$t = -\frac{1}{6}\pi \text{ geeft het punt } (2 - \sin(-\frac{1}{2}\pi), 4\cos(-\frac{1}{6}\pi)) = (3, 2\sqrt{3})$$

$$t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft het punt } (2 - \sin(1\frac{1}{2}\pi), 4\cos(\frac{5}{6}\pi)) = (3, -2\sqrt{3})$$

$$t = 1\frac{1}{6}\pi \text{ geeft het punt } (2 - \sin(3\frac{1}{2}\pi), 4\cos(1\frac{1}{2}\pi)) = (3, 0)$$

- c In het punt (2, 2) geldt  $2 - \sin(3t) = 2$ .

$$\sin(3t) = 0$$

$$t = k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

$$\text{In het punt (2, 2) geldt ook } 4 \cdot \cos(t + \frac{1}{3}\pi) = 2$$

$$\cos(t + \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$$

$$t + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t + \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

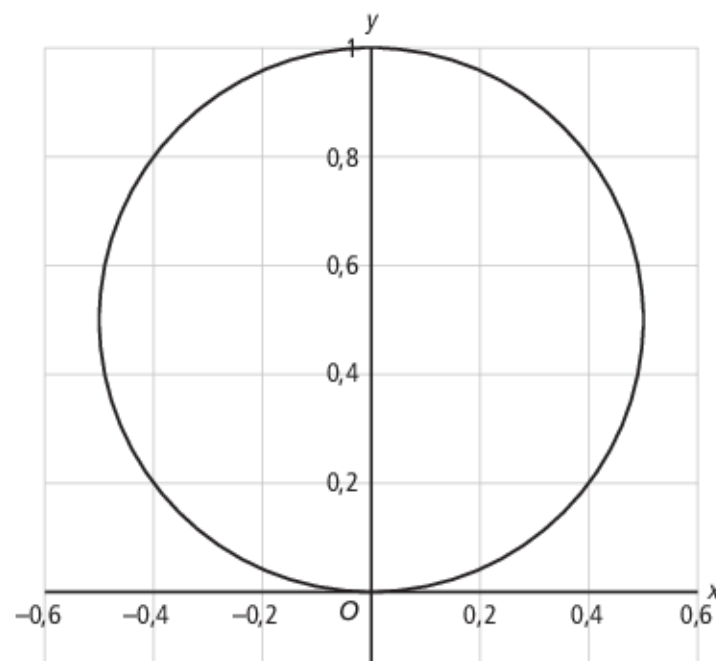
$$t = k \cdot 2\pi \text{ of } t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

Gemeenschappelijke oplossingen zijn  $t = 0$  of  $t = 1\frac{1}{3}\pi$ .

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Big|_{t=0} = \frac{-4\sin(t + \frac{1}{3}\pi)}{-3\cos(3t)} \Big|_{t=0} = \frac{4\sin(\frac{1}{3}\pi)}{3\cos(0)} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1\frac{1}{3}\pi} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Big|_{t=1\frac{1}{3}\pi} = \frac{-4\sin(t + \frac{1}{3}\pi)}{-3\cos(3t)} \Big|_{t=1\frac{1}{3}\pi} = \frac{4\sin(1\frac{2}{3}\pi)}{3\cos(4\pi)} = \frac{4 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

9a



- b  $y'(t) = 2\cos(t) \cdot -\sin(t) = -2\sin(t) \cdot \cos(t)$   
 $x'(t) = \cos(t) \cdot \cos(t) + \sin(t) \cdot -\sin(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-2\sin(t) \cdot \cos(t)}{\cos^2(t) - \sin^2(t)}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{-2\sin(1) \cdot \cos(1)}{\cos^2(1) - \sin^2(1)} \approx 2,19$$

- c  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{1}{3}\pi} = \frac{-2\sin(\frac{1}{3}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi)}{\cos^2(\frac{1}{3}\pi) - \sin^2(\frac{1}{3}\pi)} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot 3} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

- d  $A(\sin(\frac{1}{3}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi), \cos^2(\frac{1}{3}\pi)) = (\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2) = (\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{4})$

- e Er moet gelden  $y = x$ .

$$\sin(t)\cos(t) = \cos^2(t)$$

$$\cos(t) = 0 \text{ of } \sin(t) = \cos(t)$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \tan(t) = 1$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Dit geeft de raakpunten (0, 0) en  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{1}{2}\pi} = \frac{-2\sin(\frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi)}{\cos^2(\frac{1}{2}\pi) - \sin^2(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{0}{0 - 1}$$

Er is dus een horizontale raaklijn  $y = 0$  in het punt  $(0, 0)$ .

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{1}{2}\pi} = \frac{-2\sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi)}{\cos^2(\frac{1}{4}\pi) - \sin^2(\frac{1}{4}\pi)} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{0}$$

Er is dus een verticale raaklijn  $x = \frac{1}{2}$  in het punt  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

**10a**  $\frac{dx}{dt} = -\sin(t) - 2\cos(t) \cdot -\sin(t)$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin(t) + 2\cos(t)\sin(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t)(1 - \cos(t)) + \sin(t) \cdot \sin(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t) - \cos^2(t) + \sin^2(t)$$

**b** In punten met een horizontale raaklijn geldt  $\frac{dy}{dt} = 0$  en  $\frac{dx}{dt} \neq 0$ .

In punten met een verticale raaklijn geldt  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $\frac{dy}{dt} \neq 0$ .

Horizontale raaklijn:

Invoer:  $Y1 = \cos(X) - \cos(X)^2 + \sin(X)^2$

Venster:  $X_{\min} = 0, X_{\max} = 7, Y_{\min} = -3, Y_{\max} = 3$

Optie: CALC, zero (TI) of G-Solve, ROOT (CASIO)

De oplossingen zijn  $t = 0, t = 2\pi, t \approx 2,09, t \approx 4,19, \dots$

Verticale raaklijn:

Invoer:  $Y1 = -\sin(X) + 2\cos(X)\sin(X)$

Optie: CALC, zero (TI) of G-Solve, ROOT (CASIO)

De oplossingen zijn  $t = 0, t = \pi, t \approx 1,05, t \approx 5,24, \dots$

Conclusie:

Er is een horizontale raaklijn in  $(-0,75; 1,30)$  voor  $t \approx 2,09$  en in  $(-0,75; -1,30)$  voor  $t \approx 4,19$ .

Er is een verticale raaklijn in  $(0,25; 0,43)$  voor  $t \approx 1,05$ , in  $(0,25; -0,43)$  voor  $t \approx 5,24$  en in  $(-2, 0)$  voor  $t = \pi$ .

**c** Uit  $\frac{dy}{dx} = 2$  volgt  $\frac{\cos(t) - \cos^2(t) + \sin^2(t)}{-\sin(t) + 2\cos(t)\sin(t)} = 2$  dus

$$\cos(t) - \cos^2(t) + \sin^2(t) = -2\sin(t) + 4\cos(t)\sin(t).$$

Invoer:  $Y1 = \cos(X) - \cos(X)^2 + \sin(X)^2$  en  $Y2 = -2\sin(X) + 4\cos(X)\sin(X)$

Venster:  $X_{\min} = 0, X_{\max} = 2\pi, Y_{\min} = -5, Y_{\max} = 5$

Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solve, ISCT (Casio)

De oplossingen zijn  $t = 0, t \approx 0,7854, t \approx 2,8325$  en  $t \approx 4,927$  voor  $0 \leq t < 2\pi$ .

$t = 0$  geeft het punt  $(0, 0)$ , maar daar is  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$  en dus voldoet  $t = 0$  niet.

$t = 0,7381$  geeft het punt  $(0,19; 0,18)$ .

$t = 2,8325$  geeft het punt  $(-1,86; 0,59)$ .

$t = 4,9270$  geeft het punt  $(0,17; -0,77)$ .

**d** Bij  $(0, 0)$  hoort  $t = 0$  en is  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ .

**e** Voor  $t = 0,001$  is  $\frac{dy}{dx} \approx \frac{(\cos(0,001) - \cos^2(0,001) + \sin^2(0,001)) - (\cos(0) - \cos^2(0) + \sin^2(0))}{(-\sin(0,001) + 2\cos(0,001)\sin(0,001)) - (-\sin(0) + 2\cos(0)\sin(0))}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0,0000015 - 0}{0,001 - 0} = 0,0015 \approx 0$$

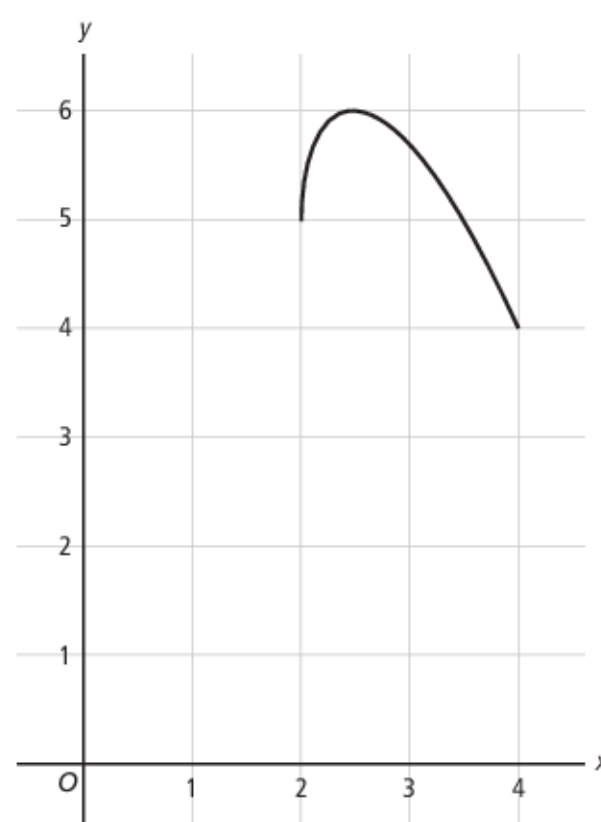
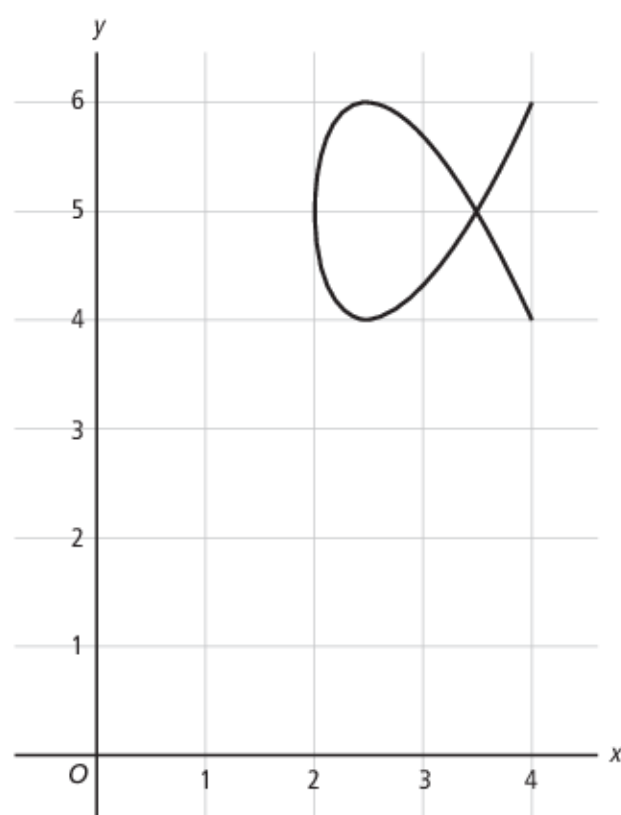
Dus de helling in  $(0, 0)$  zal nul zijn. Ook met een plot kun je dit inzien.

### 1-3 Lissajousfiguren

Pagina 18:

11a  $2 \leq x \leq 4$  en  $4 \leq y \leq 6$

b De eerste twee grafieken vallen samen maar de derde grafiek is er slechts een deel van.



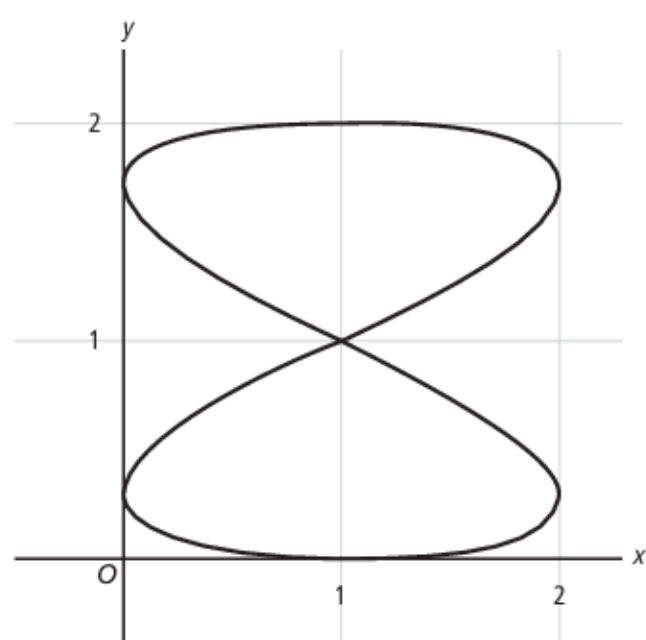
c De periode van  $K$  is  $2\pi$ .

d De periode van  $x = 3 - \cos(2t)$  is  $\frac{2\pi}{2} = \pi$

De periode van  $y = 5 + \sin(3t)$  is  $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ .

De gemeenschappelijke periode is  $2\pi$  want  $2 \times \pi = 3 \times \frac{2}{3}\pi = 2\pi$  is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van  $\pi$  en  $\frac{2}{3}\pi$ .

12a



De periode van  $x$  is  $\frac{2\pi}{2} = \pi$  en de periode van  $y$  is  $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$ .

De kleinste gemeenschappelijke periode is  $2\pi$ .

Dus  $2\pi$  is de periode van de kromme  $K$ .

- b** Voor een snijpunt met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .

$$1 - 2\cos(t) = 0$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{3}\pi \text{ of } t = 1\frac{2}{3}\pi \text{ (in één periode)}$$

$$t = \frac{1}{3}\pi \text{ geeft } x = 1 + \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \text{ dus } (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0) \approx (1,87; 0).$$

$$t = 1\frac{2}{3}\pi \text{ geeft } x = 1 + \sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \text{ dus } (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0) \approx (0,13; 0).$$

Voor een snijpunt met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .

$$1 + \sin(2t) = 0$$

$$\sin(2t) = -1$$

$$t = \frac{3}{4}\pi \text{ en } t = 1\frac{3}{4}\pi \text{ (in één periode)}$$

$$t = \frac{3}{4}\pi \text{ geeft } y = 1 - 2\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1 + \sqrt{2}, \text{ dus } (0, 1 + \sqrt{2}) \approx (0; 2,41).$$

$$t = 1\frac{3}{4}\pi \text{ geeft } y = 1 - 2\cos\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = 1 - \sqrt{2}, \text{ dus } (0, 1 - \sqrt{2}) \approx (0; -0,41).$$

- c** Uit de plot is af te lezen dat de kromme zichzelf snijdt in  $(1, 1)$ .  
De bijbehorende waarden van de parameter zijn  $t = \frac{1}{2}\pi$  en  $t = 1\frac{1}{2}\pi$ .

- 13a** Voor een snijpunt met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .

$$3\sin(2t) = 0$$

$$\sin(2t) = 0$$

$$t = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$t = 0 \text{ geeft } y = 2\cos(0) = 2 \text{ dus } (0, 2) \text{ (ook bij } t = 2\pi).$$

$$t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft } y = 2\cos\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 0 \text{ dus } (0, 0) \text{ (ook bij } t = 1\frac{1}{2}\pi).$$

$$t = \pi \text{ geeft } y = 2\cos(3\pi) = -2 \text{ dus } (0, -2).$$

- b** De periode van  $x$  is  $\frac{2\pi}{2} = \pi$  en de periode van  $y$  is  $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ .

De periode van  $K$  is  $2 \times \pi = 3 \times \frac{2}{3}\pi = 2\pi$ .

- c** Voor een snijpunt met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .

$$2\cos(3t) = 0$$

$$\cos(3t) = 0$$

$$3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3t = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{Op } [0, 2\pi] \text{ geldt } t = \frac{1}{6}\pi, t = \frac{1}{2}\pi, t = \frac{5}{6}\pi, t = 1\frac{1}{6}\pi, t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ of } t = 1\frac{5}{6}\pi.$$

$$\text{Voor } t = \frac{5}{6}\pi \text{ en } t = 1\frac{5}{6}\pi \text{ geldt } (-1\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0).$$

$$\text{Voor } t = \frac{1}{2}\pi \text{ en } t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ geldt } (0, 0).$$

$$\text{Voor } t = \frac{1}{6}\pi \text{ en } t = 1\frac{1}{6}\pi \text{ geldt } (1\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0).$$

**Pagina 19:**

- 14a** De periode van  $x$  is  $2\pi$  en de periode van  $y$  is  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ .

De periode van  $K$  is  $1 \times 2\pi = 2 \times \pi = 2\pi$ .

- b** In de oorsprong geldt  $x = 0$ .

$$-5\cos(t) = 0$$

$$\cos(t) = 0$$

$$t = \frac{1}{2}\pi \text{ en } t = 1\frac{1}{2}\pi$$



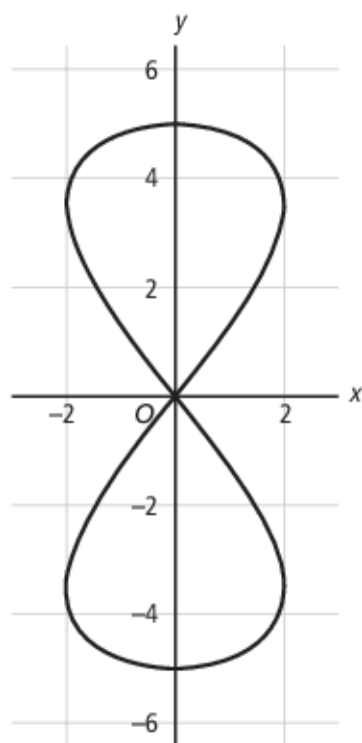
$$\frac{dx}{dt} = 5\sin(t) \text{ en } \frac{dy}{dt} = 4\cos(2t)$$

$$t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft } \frac{dx}{dt} = 5 \text{ en } \frac{dy}{dt} = -4 \text{ dus } \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{5}.$$

$$t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ geeft } \frac{dx}{dt} = -5 \text{ en } \frac{dy}{dt} = -4 \text{ dus } \frac{dy}{dx} = \frac{4}{5}.$$

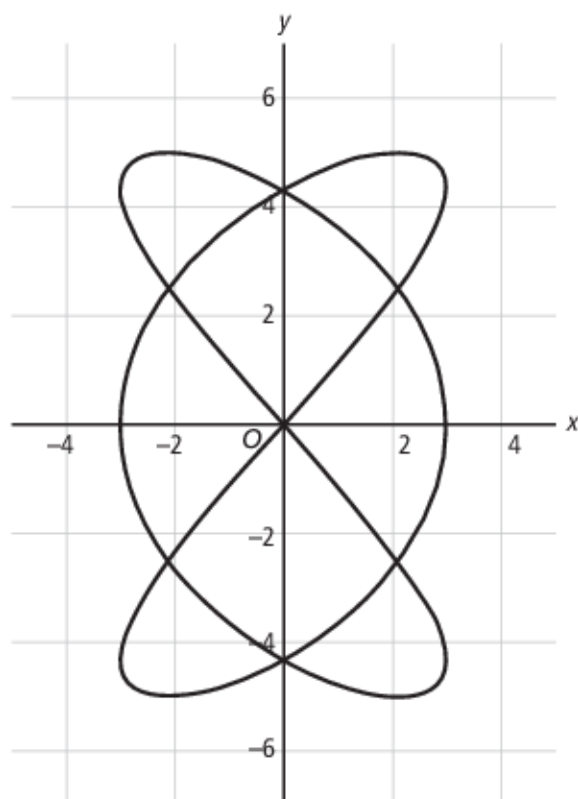
De vergelijkingen van de raaklijnen zijn  $y = -\frac{4}{5}x$  en  $y = \frac{4}{5}x$ .

- c  $x$  en  $y$  zijn verwisseld, dus er is sprake van een spiegeling in de lijn  $y = x$ .



- 15a De periode van  $x$  is  $\frac{2\pi}{2} = \pi$  en de periode van  $y$  is  $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$ .  
De periode van  $K$  is dus 6.

b



- c Voor een snijpunt met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .

$$3\sin(\pi t) = 0$$

$$\sin(\pi t) = 0$$

$$t = 0, t = 1, t = 2, t = 3, t = 4, t = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5\cos(\frac{2}{3}\pi t) \cdot \frac{2}{3}\pi}{3\cos(\pi t) \cdot \pi} = \frac{10\cos(\frac{2}{3}\pi t)}{9\cos(\pi t)}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{10 \cos(0)}{9 \cos(0)} = 1 \frac{1}{9};$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{10 \cos(\frac{2}{3}\pi)}{9 \cos(\pi)} = \frac{10 \cdot -\frac{1}{2}}{-9} = \frac{5}{9};$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = \frac{10 \cos(\frac{4}{3}\pi)}{9 \cos(2\pi)} = \frac{10 \cdot -\frac{1}{2}}{9} = -\frac{5}{9};$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=3} = \frac{10 \cos(2\pi)}{9 \cos(3\pi)} = -1 \frac{1}{9};$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=4} = \frac{10 \cos(\frac{8}{3}\pi)}{9 \cos(4\pi)} = -\frac{5}{9};$$

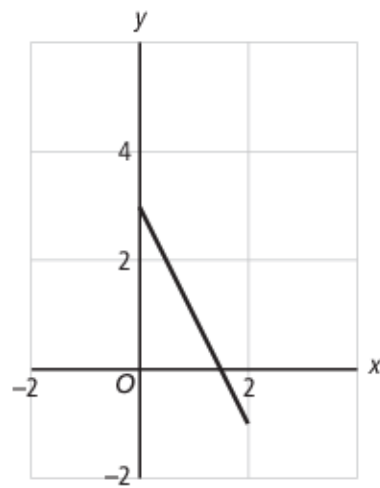
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=5} = \frac{10 \cos(3\frac{1}{3}\pi)}{9 \cos(5\pi)} = \frac{5}{9}$$

Voor  $t = 0$  is de hoek met de  $y$ -as  $90^\circ - \tan^{-1}(\frac{10}{9}) \approx 42^\circ$ .

Voor  $t = 1$  is de hoek met de  $y$ -as  $90^\circ - \tan^{-1}(\frac{5}{9}) \approx 61^\circ$ .

Vanwege de symmetrie zijn de overige hoeken ook steeds ongeveer  $42^\circ$  of  $61^\circ$ .

16a



De punten van  $K$  liggen op de lijn met vergelijking  $y = -2x + 3$ .

- b Uit  $x = 1 + \cos(2t)$  volgt  $\cos(2t) = x - 1$ . Dit kun je substitueren in  $y = 1 - 2\cos(2t)$ . Je krijgt dan  $y = 1 - 2(x - 1) = -2x + 3$ .
- c Omdat  $-1 \leq \cos(2t) \leq 1$  geldt  $0 \leq x \leq 2$ , dus het is slechts een deel van deze lijn.

- 17a De periode van  $x$  is  $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$  en de periode van  $y$  is  $2\pi$ .

De periode van  $K$  is  $1 \times 8\pi = 4 \times 2\pi = 8\pi$ .

Dus als je voor  $t$  een domein met lengte  $8\pi$  neemt krijg je in een plot precies één beweging.

- b  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}\cos(\frac{1}{4}t)$  en  $\frac{dy}{dt} = -2\sin(t)$

Voor  $t = \pi$  geldt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}\cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{8}\sqrt{2} \text{ en } \frac{dy}{dt} = 0, \text{ dus } \frac{dy}{dx} = \frac{0}{\frac{1}{8}\sqrt{2}} = 0.$$

De helling van de raaklijn is 0.

- c Als de grafiek symmetrisch is ten opzichte van de  $y$ -as moet gelden:  $x(-t) = -x(t)$  en  $y(-t) = y(t)$   
 $x(-t) = \sin(-\frac{1}{4}t) = -\sin(\frac{1}{4}t) = -x(t)$  en  $y(-t) = 2\cos(-t) = 2\cos(t) = y(t)$   
 Dus de grafiek is symmetrisch ten opzichte van de  $y$ -as.

- 18a Er moet gelden is  $2a \cdot 2p = 30$ . Dit geeft  $a = \frac{15}{2p}$

- b De periode van  $x$  is  $\frac{2\pi}{b}$  en de periode van  $y$  is  $\frac{2\pi}{q}$ .

- c De periode van  $x$  en de periode van  $y$  moeten beide een deler van 24 zijn.

Er moet dus gelden dat  $\frac{2\pi}{b}$  en  $\frac{2\pi}{q}$  beide een deler van 24 zijn.

Door te proberen vind je bijvoorbeeld de volgende mogelijkheden:

$$b = \frac{1}{3}\pi \text{ en } q = \frac{1}{4}\pi$$

$$b = \frac{1}{6}\pi \text{ en } q = \frac{1}{4}\pi$$

$$b = \frac{1}{12}\pi \text{ en } q = \pi$$

## 1-4 Families van krommen

Pagina 20:

- 19a Voor een snijpunt met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .

$$2\cos(6t) = 0 \text{ dus is } 6t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ ofwel } t = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{6}\pi.$$

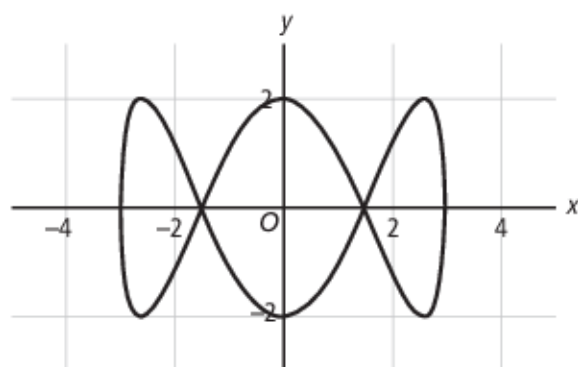
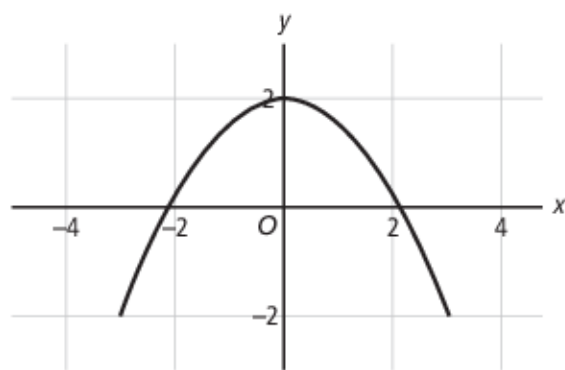
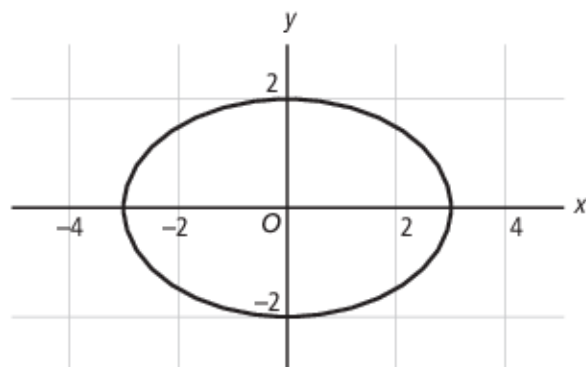
De bijbehorende punten zijn  $(0,78;0)$ ,  $(-0,78;0)$ ,  $(2,12;0)$ ,  $(-2,12;0)$ ,  $(2,90;0)$  en  $(-2,90;0)$ .

Voor een snijpunt met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .

$$3\sin(t) = 0 \text{ ofwel } t = 0 + k \cdot \pi.$$

Het bijbehorende punt is  $(0, 2)$ .

b

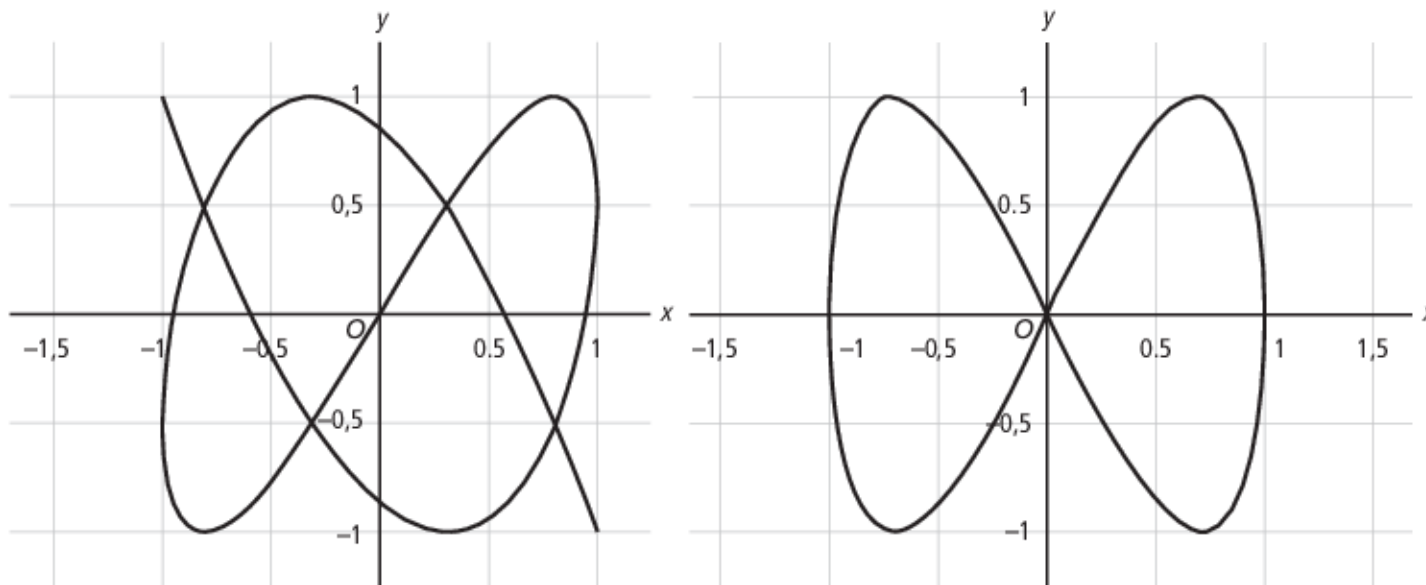


De periode van  $K_1$ ,  $K_2$  en  $K_3$  is  $2\pi$ .

- c Als  $b$  even is, zijn de krommen open en als  $b$  oneven is, zijn de krommen gesloten.  
Als  $b$  even is, is er alleen sprake van symmetrie in de  $y$ -as en als  $b$  oneven is, is er sprake van symmetrie in de  $x$ -as en de  $y$ -as.
- d Er geldt  $-3 \leq x \leq 3$  en  $-2 \leq y \leq 2$ , dus de afmetingen van de rechthoek zijn 6 bij 4.



20a



$a = 5$ : de periode van  $x$  is  $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$  en de periode van  $y$  is  $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$ .

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud hiervan is  $2\pi$ , dus de periode is  $2\pi$ .

$a = 6$ : de periode van  $x$  is  $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$  en de periode van  $y$  is  $\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$ .

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud hiervan is  $\frac{2}{3}\pi$ , dus de periode is  $\frac{2}{3}\pi$ .

- b** De periode van  $x$  is  $\frac{2}{3}\pi$  en de periode van  $y$  is  $\frac{2\pi}{a}$ .

Als  $a$  een drievoud is dan is de periode van de Lissajousfiguur  $\frac{2}{3}\pi$ .

Als  $a$  geen drievoud is dan is de periode van de Lissajousfiguur  $2\pi$ .

Dus zijn er geen gehele waarden van  $a$  waarvoor de periode niet gelijk is aan  $\frac{2}{3}\pi$  of  $2\pi$ .

**Pagina 21:**

- 21a** De periode van  $x$  is  $\frac{2\pi}{2} = \pi$  en de periode van  $y = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ .  
De periode van de kromme is  $2 \times \pi = 3 \times \frac{2}{3}\pi = 2\pi$  voor  $a = 0$ .

- b** De krommen vallen samen, maar hebben een ander startpunt en worden dus verschillend doorlopen.

- c** De krommen zijn elkaars spiegelbeeld in de  $y$ -as, omdat  $\cos(2t) = -\cos(2t + \pi) = -\cos(2(t + \frac{1}{2}\pi))$ .

- 22a** De periode van  $x$  is  $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$  en de periode van  $y$  is  $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ .

De periode van de kromme is  $6\pi$ .

- b** Als  $b = 3$  dan is de periode van  $y$  gelijk aan  $\frac{2}{3}\pi$ .

De periode van de kromme is  $6\pi$ .

Het getal 2 is een uiterste waarde van  $y$  die  $\frac{6\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 9$  keer wordt aangenomen.

Als  $b = 2$  dan is de periode van  $y$  gelijk aan  $\pi$ .

De periode van de kromme is  $6\pi$ .

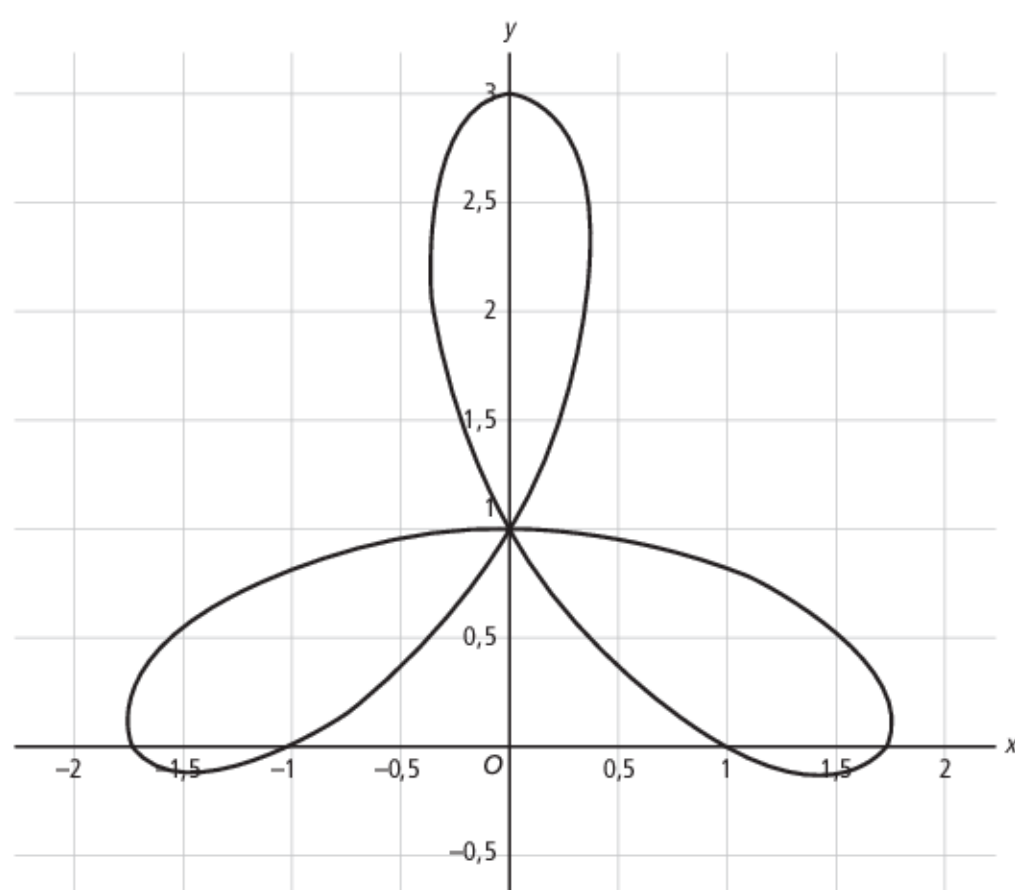
Het getal 2 is een uiterste waarde van  $y$  die  $\frac{6\pi}{\pi} = 6$  keer wordt aangenomen.

Als  $b = \frac{1}{2}$  dan is de periode van  $y$  gelijk aan  $4\pi$ .

De periode van de kromme is  $12\pi$ .

Het getal 2 is een uiterste waarde van  $y$  die  $\frac{12\pi}{4\pi} = 3$  keer wordt aangenomen.

23a



De kromme snijdt zichzelf in  $(0, 1)$ , er moet dus gelden  $x = 0$ .

$$(1 - 2\cos(t)) \cdot \sin(t) = 0$$

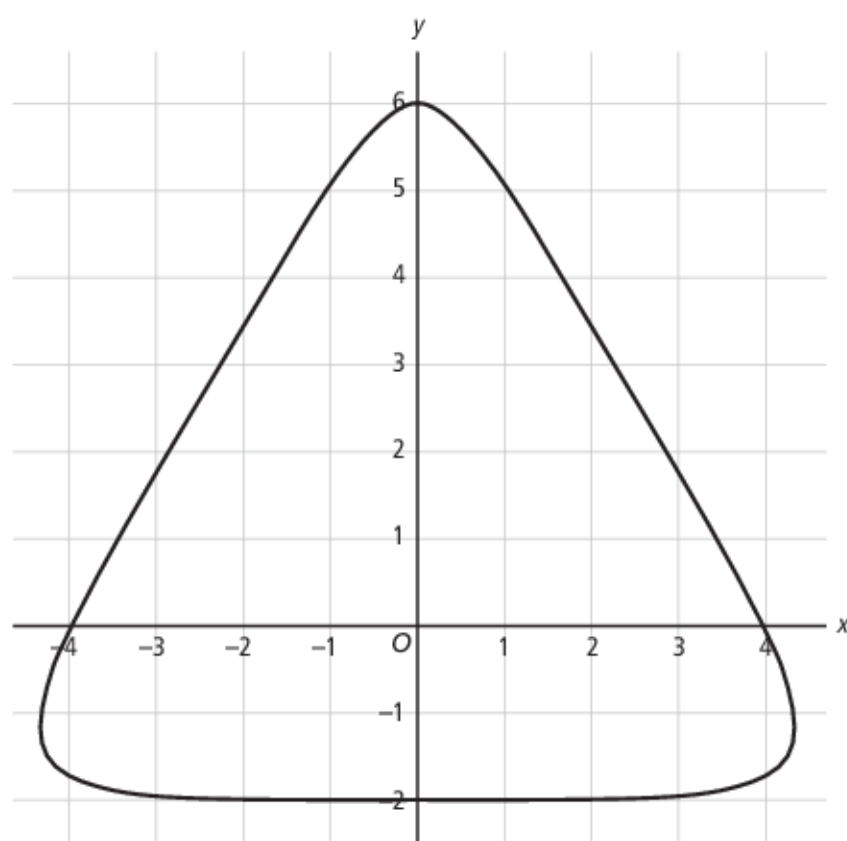
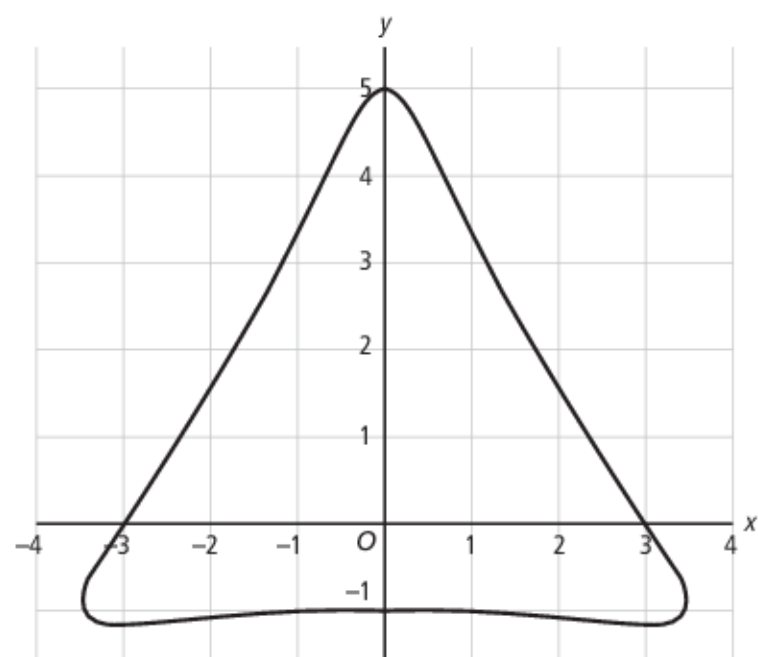
$$1 - 2\cos(t) = 0 \text{ of } \sin(t) = 0$$

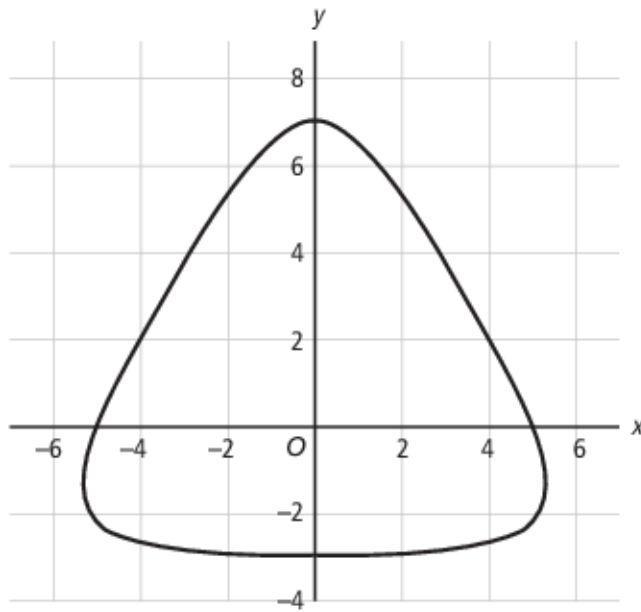
$$\cos(t) = \frac{1}{2} \text{ of } \sin(t) = 0$$

$$t = \frac{1}{3}\pi \text{ of } t = \frac{2}{3}\pi \text{ of } t = 0 \text{ of } t = \pi \text{ of } t = 2\pi$$

Invullen in  $y = (1 + 2\cos(t)) \cdot \cos(t)$  geeft voor  $t = \frac{1}{3}\pi$  of  $t = \frac{2}{3}\pi$  of  $t = \pi$  steeds  $y = 1$ .

b

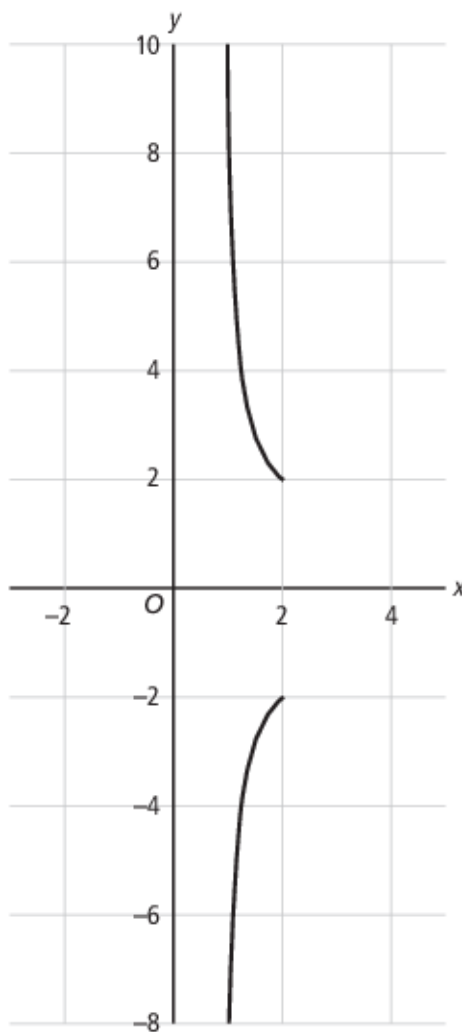




Hoe groter de waarde van  $a$  hoe meer je de invloed van  $a$  terugziet in de kromme. Langzamerhand wordt de kromme steeds ronder.

- c** Voor grote waarden van  $a$  is de factor  $a - 2\cos(t) \approx a$  en de factor  $a + 2\cos(t) \approx a$ . Dus dan geldt  $x \approx a\sin(t)$  en  $y \approx a\cos(t)$ , de parametervoorstelling van een cirkel. De krommen zijn voor grote waarden van  $a$  vrijwel cirkels met straal  $a$  en middelpunt  $(0, 0)$ .

**24a**



- b** Als  $\cos(t) = 0$ , dus bij  $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$  hoort geen punt van deze kromme.
- c** Als  $t \rightarrow \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$  dan  $x \rightarrow 1 + 1^2 \cdot 0^2 = 1$  en  $y \rightarrow \infty$  of  $y \rightarrow -\infty$ .  
Dus  $x = 1$  is een verticale asymptoot van  $K_1$ .
- d** De maximale waarde van  $x(t)$  is 2. Deze wordt bereikt als  $\cos^2(t) = 1$ .  
Dit geeft  $\cos(t) = 1$  of  $\cos(t) = -1$ , dus  $t = k \cdot \pi$ .  
Dan is  $y = \frac{2}{1} = 2$  of  $y = \frac{2}{-1} = -2$ , dus de eindpunten van de takken zijn  $(2, 2)$  en  $(2, -2)$ .

e Uit  $y = \frac{2}{\cos(t)}$  volgt  $\cos(t) = \frac{2}{y}$ .

Dit laatste invullen bij  $x = 1 + \cos^2(t)$  geeft de vergelijking

$$x = 1 + \left(\frac{2}{y}\right)^2$$

$$x = 1 + \frac{4}{y^2}$$

$$x - 1 = \frac{4}{y^2}$$

$$y^2 = \frac{4}{x - 1}$$

De functievoorschriften zijn  $f(x) = \sqrt{\frac{4}{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$  en

$$g(x) = -\sqrt{\frac{4}{x-1}} = -\frac{2}{\sqrt{x-1}} \text{ met } 1 < x \leq 2.$$

f De verticale asymptoot hoort bij  $\cos(t) = 0$ . Dan geldt  $x = a + a^2 \cdot 0 = a$ .  
Dus als  $a = 6$ , is  $x = 6$  de verticale asymptoot.

g De eindpunten horen bij  $\cos^2(t) = 1$ . Dan geldt  $x = a + a^2$ . Er moet gelden  
 $a^2 + a = 6$

$$a^2 + a - 6 = 0$$

$$(a + 3)(a - 2) = 0$$

$$a = -3 \text{ of } a = 2$$

Voor de waarden  $a = -3$  en  $a = 2$  zijn de eindpunten  $(6, 2)$  en  $(6, -2)$ .

## 1-5 Parametervoorstellingen opstellen

Pagina 22:

25a  $\sin(t) = \frac{PP'}{PO} = \frac{PP'}{1}$ , dus  $PP' = \sin(t)$

$$\cos(t) = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{1}, \text{ dus } OP' = \cos(t)$$

b  $x_p = \cos(t)$  en  $y_p = \sin(t)$

c  $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$

26a De baan van punt  $M$  is een halve cirkel met middelpunt  $(0, 0)$  en straal 3.

b  $x_x = \frac{2}{3} \cdot OP = \frac{2}{3} \cdot 6 \sin(t) = 4 \sin(t)$

$$y_x = \frac{1}{3} \cdot OQ = \frac{1}{3} \cdot 6 \cos(t) = 2 \cos(t)$$

De parametervoorstelling van  $K$  is  $\begin{cases} x = 4 \sin(t) \\ y = 2 \cos(t) \end{cases}$

Pagina 23:

27a  $\begin{cases} x = -4 + 5 \cos(t) \\ y = 7 + 5 \sin(t) \end{cases}$

b Parametervoorstelling van een cirkel met middelpunt  $(3, -2)$  en straal 4.

$$\begin{cases} x = 3 + 4 \cos(t) \\ y = -2 + 4 \sin(t) \end{cases}$$

Vermenigvuldigen van  $x$  en  $y$  met 3 respectievelijk 5 geeft  $\begin{cases} x = 9 + 12 \cos(t) \\ y = -10 + 20 \sin(t) \end{cases}$

**28a**  $\sin(t) = \frac{PQ}{MP} = \frac{PQ}{2}$ , dus  $PQ = 2\sin(t)$

$\cos(t) = \frac{MQ}{MP} = \frac{MQ}{2}$ , dus  $MQ = 2\cos(t)$

**b** De snelheid van het wiel is 1 rad/s, dus na  $t$  seconden is er over  $t$  rad gedraaid.

De horizontale verplaatsing is gelijk aan de lengte van  $PA$  en is dus

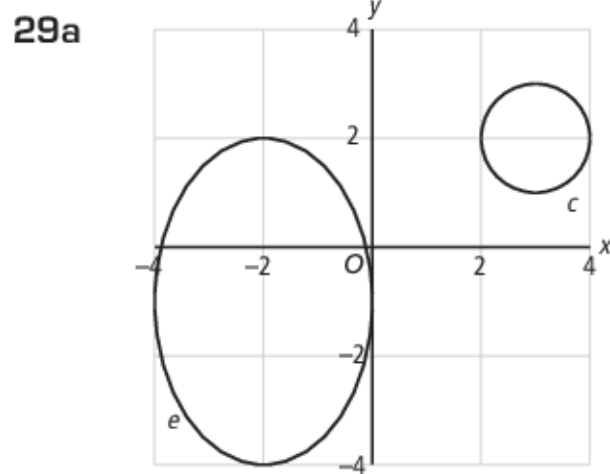
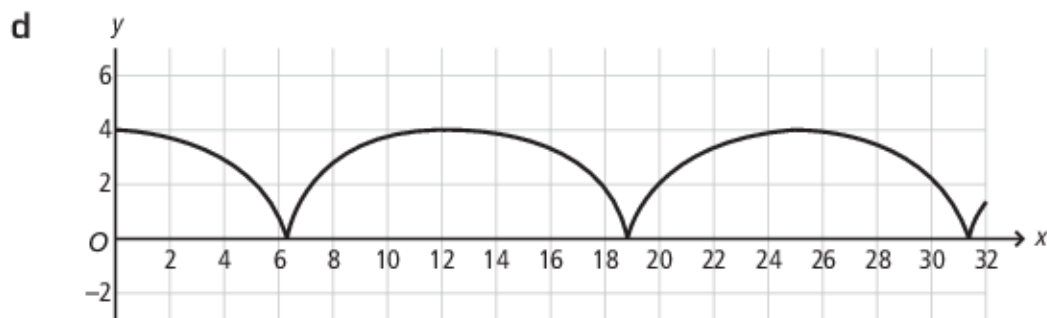
$$\frac{t}{2\pi} \cdot 4\pi = t \cdot 2 = 2t.$$

De  $y$ -coördinaat blijft steeds hetzelfde, namelijk 2.

Dus de coördinaten van  $M$  zijn  $(2t, 2)$ .

**c**  $x_P = x_M + PQ = 2t + 2\sin(t)$

$y_P = y_M + MQ = 2 + 2\cos(t)$



**b**  $t = 0$  geeft  $P_0 = (3, 1)$  en  $Q_0 = (-2, 2)$ .

$t = \frac{1}{2}\pi$  geeft  $P_{\frac{1}{2}\pi} = (4, 2)$  en  $Q_{\frac{1}{2}\pi} = (0, -1)$ .

**c**  $M_0 = \left( \frac{3 + (-2)}{2}, \frac{1 + 2}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2} \right)$

$M_{\frac{1}{2}\pi} = \left( \frac{4 + 0}{2}, \frac{2 - 1}{2} \right) = \left( 2, \frac{1}{2} \right)$

**d**  $M\left( \frac{3 + \sin(t) - 2 + 2\sin(t)}{2}, \frac{2 - \cos(t) - 1 + 3\cos(t)}{2} \right) = \left( \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sin(t), \frac{1}{2} + \cos(t) \right)$

Dus een parametervoorstelling van de baan van  $M$  is  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sin(t) \\ y = \frac{1}{2} + \cos(t) \end{cases}$

**30a** In  $\triangle OPA$  geldt  $\cos(t) = \frac{OP}{OA} = \frac{1}{OA}$ , dus is  $OA = \frac{1}{\cos(t)}$ .

**b** In  $\triangle OPB$  is  $\angle OBP = t$  (vanwege gelijkvormigheid van  $\triangle ODP$  en  $\triangle OPB$ ) en

geldt  $\sin(t) = \frac{OP}{OB} = \frac{1}{OB}$ , dus is  $y_B = OB = \frac{1}{\sin(t)}$ .

**c** Er geldt  $x_M = \frac{1}{2}x_A$  en  $y_M = \frac{1}{2}y_A$ , dus de coördinaten van  $M$  zijn  $M\left( \frac{1}{2\cos(t)}, \frac{1}{2\sin(t)} \right)$ .

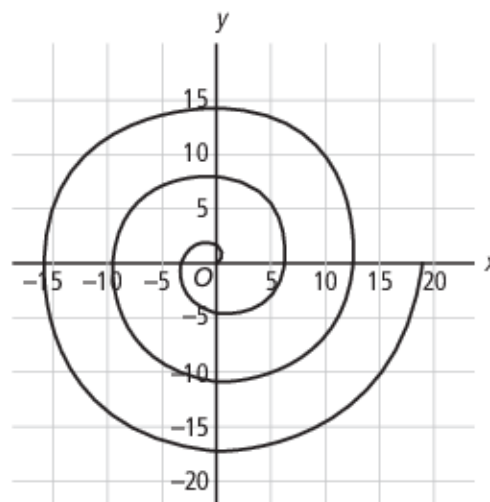
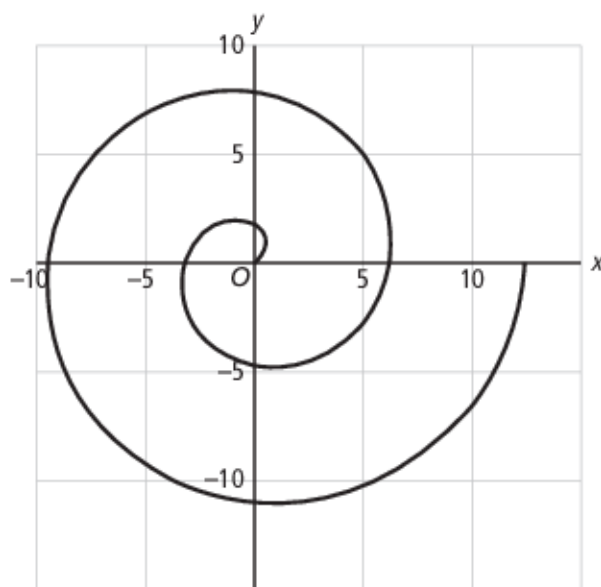


De parametervoorstelling van de baan van  $M$  is  $\begin{cases} x = \frac{1}{2\cos(t)} \\ y = \frac{1}{2\sin(t)} \end{cases}$

## 1-6 Gemengde opdrachten

Pagina 24:

31ab



c  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin(t) + t\cos(t)}{\cos(t) - t\sin(t)}$   
 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{\sin(t) + t\cos(t)}{\cos(t) - t\sin(t)} \bigg|_{t=0} = \frac{0+0}{1-0} = 0$

d In de snijpunten geldt  $y = x$ .

$$t\cos(t) = t\sin(t)$$

$$\sin(t) = \cos(t)$$

$$\tan(t) = 1$$

$$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi.$$

$$t = \frac{1}{4}\pi \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \left(\frac{1}{8}\pi\sqrt{2}, \frac{1}{8}\pi\sqrt{2}\right)$$

$$t = 1\frac{1}{4}\pi \Rightarrow \left(1\frac{1}{4}\pi \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1\frac{1}{4}\pi \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \left(-\frac{5}{8}\pi\sqrt{2}, -\frac{5}{8}\pi\sqrt{2}\right)$$

$$t = 2\frac{1}{4}\pi \Rightarrow \left(2\frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}, 2\frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \left(\frac{9}{8}\pi\sqrt{2}, \frac{9}{8}\pi\sqrt{2}\right)$$

e Voor het snijpunt bij  $t = \frac{1}{4}\pi$  geldt:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{1}{4}\pi} = \frac{\sin(\frac{1}{4}\pi) + \frac{1}{4}\pi \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi)}{\cos(\frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{4}\pi \cdot \sin(\frac{1}{4}\pi)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1 + \frac{1}{4}\pi}{1 - \frac{1}{4}\pi} = \frac{4 + \pi}{4 - \pi} \approx 8,32.$$

De raaklijn aan  $K$  heeft hellingshoek  $\tan^{-1}(8,32) \approx 83,15^\circ$ .

De hoek tussen  $K$  en de lijn  $y = x$  is ongeveer  $83,15^\circ - 45,00^\circ = 38,15^\circ$ .

32a Invoer:  $Y1 = \sin(X)/(2 - \sin(X))$

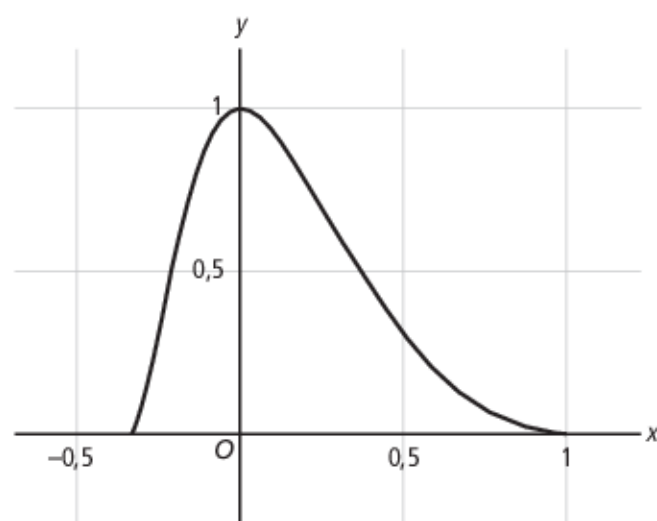
Venster:  $X_{\min} = 0, X_{\max} = 2\pi, Y_{\min} = -2, Y_{\max} = 2$

Optie: CALC, minimum en maximum (TI) of G-Solv, MIN en MAX (Casio).

Er geldt  $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ .



b



c

$$x = \frac{\sin(t)}{2 - \sin(t)}$$

$$x(2 - \sin(t)) = \sin(t)$$

$$2x - x\sin(t) = \sin(t)$$

$$\sin(t) + x\sin(t) = 2x$$

$$\sin(t) \cdot (1 + x) = 2x$$

$$\sin(t) = \frac{2x}{1+x}$$

Invullen in  $y = \cos^4(t)$  geeft

$$y = (\cos^2(t))^2$$

$$y = (1 - \sin^2(t))^2$$

$$y = \left(1 - \left(\frac{2x}{1+x}\right)^2\right)^2$$

$$\text{Dus } f(x) = \left(1 - \left(\frac{2x}{1+x}\right)^2\right)^2 \text{ met } -\frac{1}{3} \leq x \leq 1.$$

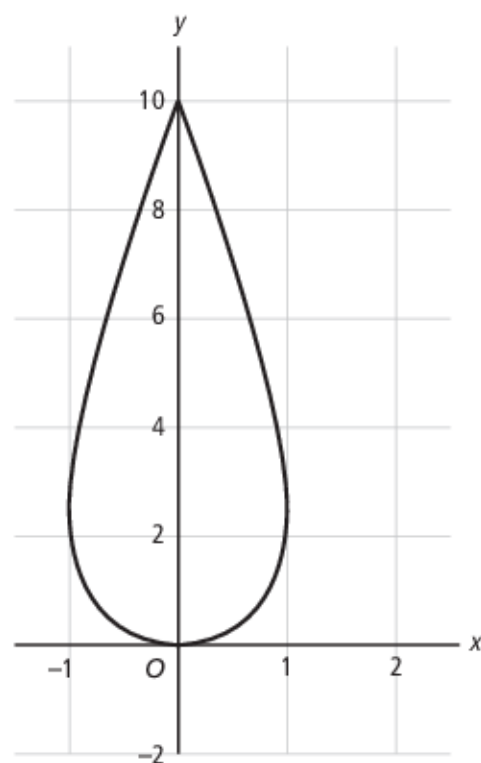
d

$$f'(x) = 2\left(1 - \left(\frac{2x}{1+x}\right)^2\right) \cdot -2 \cdot \frac{2x}{1+x} \cdot \frac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = -4\left(1 - \left(\frac{2x}{1+x}\right)^2\right) \cdot \frac{4x}{(1+x)^3}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4\left(1 - \left(\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}\right)^2\right) \cdot \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3} = -4\left(1 - \left(\frac{1}{1\frac{1}{2}}\right)^2\right) \cdot \frac{2}{\left(1\frac{1}{2}\right)^3} = -4\left(1 - \frac{4}{9}\right) \cdot \frac{16}{27} = -\frac{320}{243} = -1\frac{77}{243}$$

33a



- b** Als de raaklijn evenwijdig is aan de y-as geldt  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $\frac{dy}{dt} \neq 0$ .  
 $x'(t) = -\cos(t)$   
 $-\cos(t) = 0$  als  $t = \frac{1}{2}\pi$  of  $t = -\frac{1}{2}\pi$ .  
 De bijbehorende punten zijn  $(-1, \frac{1}{4}\pi^2)$  en  $(1, \frac{1}{4}\pi^2)$ .
- c** Als  $K$  symmetrisch is in de y-as moet gelden  $x(-t) = -x(t)$  en  $y(-t) = y(t)$ .  
 $x(-t) = \sin(-t) = -\sin(t) = -x(t)$   
 $y(-t) = \frac{1}{(-t)^2} = \frac{1}{t^2} = y(t)$   
 Dus  $K$  is symmetrisch in de y-as.
- d**  $x(-\pi) = x(\pi) = 0$   
 $y(\pi) = y(-\pi) = \frac{1}{\pi^2} \approx 0,10$ .  
 Dus als  $t \rightarrow -\pi$  of  $t \rightarrow \pi$  dan nadert en bereikt de kromme het punt  $(0, \frac{1}{\pi^2})$ .
- e** Als  $t \rightarrow 0$  dan  $x \rightarrow 0$  en  $y \rightarrow \infty$ .  
 De kromme  $K$  heeft de lijn  $x = 0$  als verticale asymptoot.

**Pagina 25:**

- 34a** Een cirkel met middelpunt  $(0, 0)$  en straal 10 krijg je met  $x = 10\cos(t)$  en  $y = 10\sin(t)$ .  
 Om middelpunt  $(0, 14)$  te krijgen stel je  $y = 14 + 10\sin(t)$ .  
 Op  $t = 0$  start de kromme nu in het punt  $(10, 14)$ .  
 Om de kromme in  $P(-8, 8)$  te laten starten moet gelden  $x(0) = -8$  en  $y(0) = 8$ .  
 $10\cos(0 + a) = -8$   
 Met de optie intersect/ISCT op de rekenmachine vind je  $a \approx 2,498$  of  $a \approx 3,785$ .  
 $10\sin(0 + a) + 14 = 8$   
 Met de optie intersect/ISCT op de rekenmachine vind je  $a \approx 3,785$  of  $a \approx 5,640$ .  
 Conclusie:  $a \approx 3,785$ .
- b** De bewegingsrichting van  $A$  is tegen de klok in, dus  $B$  draait met de klok mee.
- c** De omtrek van  $c_2$  is de helft van die van  $c_1$ .  
 Dus  $c_2$  draait twee keer zo snel rond en er zal gelden  
 $x = -12 + 5\cos(2t + a)$  en  $y = 5 - 5\sin(2t + a)$  voor zekere  $a$ .  
 $x(0) = -8$  geeft  
 $-12 + 5\cos(2 \cdot 0 + a) = -8$   
 $5\cos(a) = 4$   
 Met de optie intersect/ISCT op de rekenmachine vind je  $a \approx 0,644$  of  $a \approx 5,640$ .  
 $y(0) = 8$  geeft  
 $5 - 5\sin(2 \cdot 0 + a) = 8$   
 $-5\sin(a) = 3$   
 Met de optie intersect/ISCT op de rekenmachine vind je  $a \approx 3,785$  of  $a \approx 5,640$ .  
 Als  $a \approx 5,640$  start  $c_2$  in  $P(-8, 8)$  en geldt  
 $x = -12 + 5\cos(2t + 5,640)$  en  $y = 5 - 5\sin(2t + 5,640)$ .
- d** In punt  $Q$  geldt  $y = 0$ .  
 $5 - 5\sin(2t + 5,640) = 0$   
 $\sin(2t + 5,640) = 1$   
 $2t + 5,640 = \frac{1}{2}\pi$   
 $t \approx -2,03$

$$\frac{dx}{dt} = -10 \sin(2t + 5,640)$$

$t \approx -2,03$  invullen geeft  $\frac{dx}{dt} = -10 \sin(2 \cdot -2,03 + 5,640) \approx -10,0$

## Test jezelf

Pagina 28:

**T-1a**  $-6 \leq x \leq 2$  en  $0 \leq y \leq 2$ .

**b** Voor een snijpunt met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .

$$1 - \sin\left(\frac{1}{2}t\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}t\right) = 1$$

$$\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \pi + k \cdot 4\pi$$

Dan is  $x(\pi) = 4 \sin\left(\pi - \frac{1}{4}\pi\right) - 2 = 4 \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) - 2 = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$ .

Dus de coördinaten van het snijpunt met de  $x$ -as zijn  $(2\sqrt{2} - 2, 0)$ .

**c** Voor een snijpunt met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .

$$4 \sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) - 2 = 0$$

$$\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

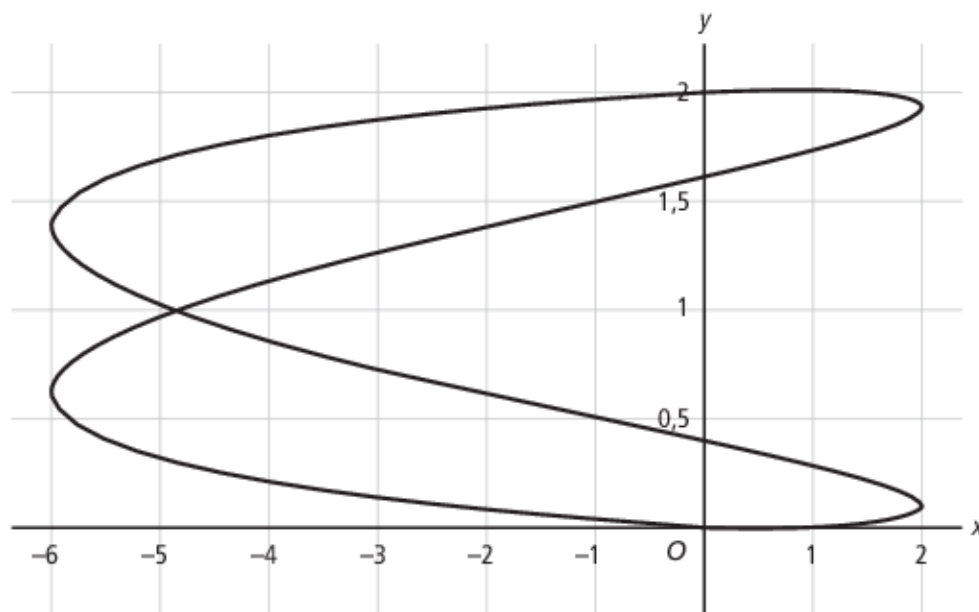
$$t - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t - \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad t = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

Dan is  $y\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 1 - \sin\left(\frac{5}{24}\pi\right) \approx 0,39$  of  $y\left(\frac{11}{12}\pi\right) = 1 - \sin\left(\frac{29}{24}\pi\right) \approx 1,61$ .

En  $y\left(\frac{17}{12}\pi\right) = 1 - \sin\left(\frac{13}{24}\pi\right) \approx 0,009$  of  $y\left(\frac{23}{12}\pi\right) = 1 - \sin\left(\frac{37}{12}\pi\right) \approx 1,99$ .

Snijpunten:  $(0; 0,39)$ ,  $(0; 1,61)$ ,  $(0; 0,009)$  en  $(0; 1,99)$ .

**d**



**T-2a**  $x\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 8 \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 8 \cdot -\frac{1}{2} = -4$

$$y\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 5 \sin(\pi) = 0$$

Dus de coördinaten van A zijn  $(-4, 0)$ .

**b**  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{1}{3}\pi} = \frac{15 \cos(3t)}{-32 \sin(4t)} \Big|_{t=\frac{1}{3}\pi} = \frac{15 \cos(\pi)}{-32 \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)} = \frac{-15}{-32 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{15}{16\sqrt{3}} = \frac{5}{16}\sqrt{3}$

Bij  $A(-4, 0)$  hoort ook  $t = \frac{2}{3}\pi$ .

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{2}{3}\pi} = \frac{15 \cos(3t)}{-32 \sin(4t)} \Big|_{t=\frac{2}{3}\pi} = \frac{15 \cos(2\pi)}{-32 \sin\left(\frac{8}{3}\pi\right)} = \frac{15}{-32 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{15}{-16\sqrt{3}} = -\frac{5}{16}\sqrt{3}$$

- c Als de raaklijn evenwijdig is met de y-as moet gelden  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $\frac{dy}{dt} \neq 0$ .

$$x'(t) = -32\sin(4t)$$

$$-32\sin(4t) = 0$$

$$\sin(4t) = 0$$

$$4t = k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{4}k \cdot \pi$$

$$y'(t) = 15\cos(3t)$$

$$15\cos(3t) = 0$$

$$\cos(3t) = 0$$

$$3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

De oplossingen zijn  $t = \frac{1}{4}\pi, t = \frac{3}{4}\pi, t = \pi, t = 1\frac{1}{4}\pi, t = 1\frac{3}{4}\pi$

Voor  $t = \frac{1}{4}\pi$  en  $t = \frac{3}{4}\pi$  zijn de coördinaten  $(8\cos(\pi), 5\sin(\frac{3}{4}\pi)) = (-8, 2\frac{1}{2}\sqrt{2})$ .

Voor  $t = \pi$  zijn de coördinaten  $(8\cos(4\pi), 5\sin(3\pi)) = (8, 0)$ .

Voor  $t = 1\frac{1}{4}\pi$  en  $t = 1\frac{3}{4}\pi$  zijn de coördinaten

$$(8\cos(5\pi), 5\sin(3\frac{3}{4}\pi)) = (-8, -2\frac{1}{2}\sqrt{2}).$$

- d Voor  $t = \frac{1}{2}\pi$  geldt  $\frac{dx}{dt} = -32\sin(4 \cdot \frac{1}{2}\pi) = 0$ , dus kun je  $\frac{dy}{dx}$  niet berekenen.

In dit punt is  $t = \frac{1}{2}\pi \approx 1,5708$ . Voor  $t = 1,5708$  is  $\frac{dx}{dt} \approx -0,000\,470\,2$  en

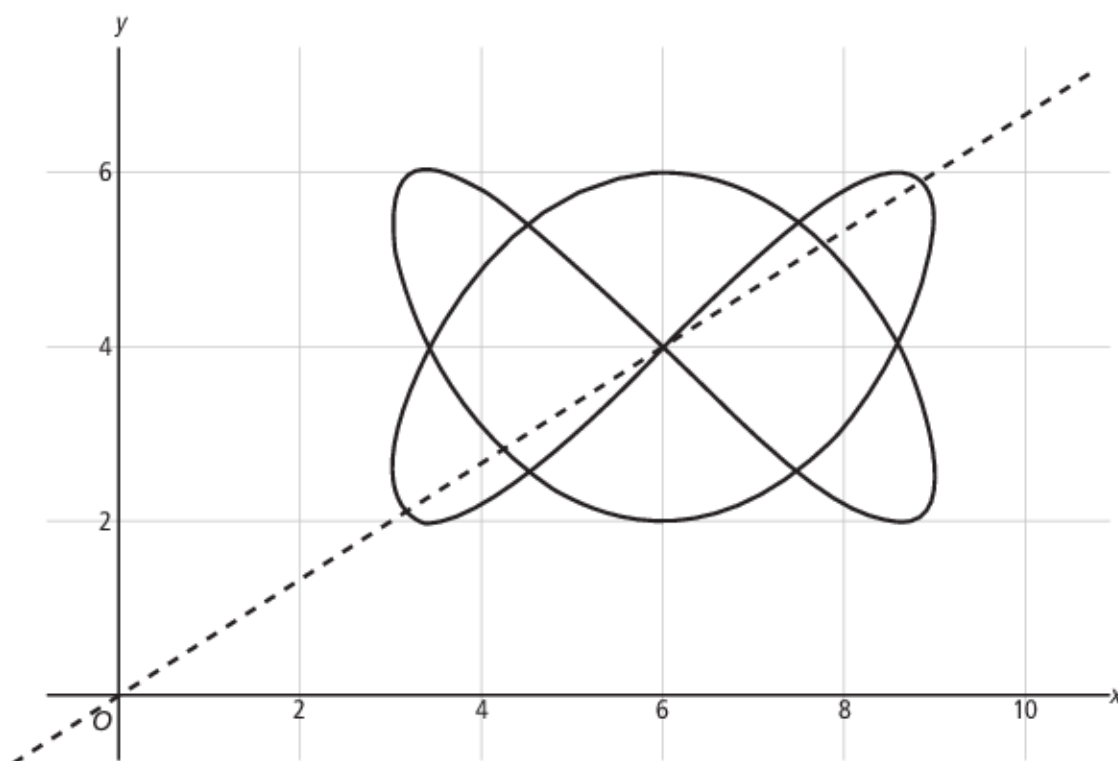
$$\frac{dy}{dt} \approx 0,000\,165\,29.$$

De helling in  $(8, -5)$  is  $\frac{dy}{dx} \approx -0,35$ .

**T-3a** De afzonderlijke grafieken van  $x$  en  $y$  zijn sinusoiden.

- b  $3 \leq x \leq 9$  en  $2 \leq y \leq 6$

c



- d In de snijpunten geldt  $y = 4$ .

$$4 + 2\cos(3(t + \frac{5}{6}\pi)) = 0$$

$$\cos(3t + 2\frac{1}{2}\pi) = 0$$

$$3t + 2\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$3t = -2\pi + k \cdot \pi$$

$$t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

$$x(-\frac{2}{3}\pi) = x(\frac{1}{3}\pi) = 6 - 3\sin(\frac{2}{3}\pi) = 6 - 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x(0) = x(\pi) = 6 - 0 = 6$$

$$x(-\frac{1}{3}\pi) = x(\frac{2}{3}\pi) = 6 - 3\sin(\frac{4}{3}\pi) = 6 - 3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 6 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

- e Bij het punt (6, 4) horen  $t = 0$  en  $t = \pi$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2 \cdot -\sin(3t + 2\frac{1}{2}\pi) \cdot 3}{-3\cos(2t) \cdot 2} = \frac{\sin(3t + 2\frac{1}{2}\pi)}{\cos(2t)}$$

$$t = 0 \text{ invullen geeft } \frac{\sin(2\frac{1}{2}\pi)}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$t = \pi \text{ invullen geeft } \frac{\sin(5\frac{1}{2}\pi)}{\cos(2\pi)} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Voor de eerste raaklijn geldt  $y = x + b$ . Het punt (6, 4) invullen geeft  $b = -2$ . Dus de vergelijking van de eerste raaklijn is  $y = x - 2$ .

Voor de tweede raaklijn geldt  $y = -x + b$ . Het punt (6, 4) invullen geeft  $b = 10$ .

Dus de vergelijking van de tweede raaklijn is  $y = -x + 10$ .

- f Uit  $y = \frac{2}{3}x$  volgt  $3y = 2x$ . Hierin de parametervoorstelling invullen geeft

$$12 + 6\cos(3t + 2\frac{1}{2}\pi) = 12 - 6\sin(2t)$$

$$\cos(3t + 2\frac{1}{2}\pi) = -\sin(2t)$$

Invoer: Y1 =  $\cos(3X + 2.5\pi)$  en Y2 =  $-\sin(2X)$

Venster: Xmin = 0, Xmax =  $2\pi$ , Ymin = -2, Ymax = 2

Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solve, ISCT (Casio)

De oplossingen zijn  $t = 0$ ,  $t \approx 0,6283$ ,  $t \approx 1,8850$ ,  $t = \pi$ ,  $t \approx 4,3982$  en  $t \approx 5,6549$ .

Bij  $t = 0$  en bij  $t = \pi$  hoort het punt (6, 4).

Bij  $t = 0,6283$  hoort het punt (3,14; 2,10).

Bij  $t = 1,8850$  hoort het punt (7,76; 5,18).

Bij  $t = 4,3982$  hoort het punt (4,24; 2,82).

Bij  $t = 5,6549$  hoort het punt (8,85; 5,90).

**Pagina 29:**

- T-4a Voor  $a = 0$  is de parametervoorstelling  $\begin{cases} x = 1 + \cos(t) \\ y = 3 + \cos(t) \end{cases}$

Dus is  $x - y = -2$  ofwel  $y = x + 2$ .

- b Voor  $a = \pi$  is de parametervoorstelling  $\begin{cases} x = 1 + \cos(t) \\ y = 3 + \cos(t - \pi) = 3 - \cos(t) \end{cases}$

Dus is  $x + y = 4$ . Elk punt van  $K$  ligt op de lijn met vergelijking  $y = 4 - x$ .

- c De kromme is een cirkel als  $\cos(t - a) = \sin(t)$ . Dus neem bijvoorbeeld  $a = \frac{1}{2}\pi$ .

$$\text{Dan is de parametervoorstelling } \begin{cases} x = 1 + \cos(t) \\ y = 3 + \cos(t - \frac{1}{2}\pi) = 3 + \sin(t) \end{cases}$$

Hierbij hoort een cirkel met straal 1 en middelpunt (1, 3).

- T-5a  $x_p = 3$  en  $y_p = 3\tan(t)$

- b  $x_Q = 3 + AP = 3 + 3\tan(t)$

$$y_Q = y_p = 3\tan(t)$$

$$\text{De punten van } Q \text{ voldoen aan de parametervoorstelling } \begin{cases} x = 3 + 3\tan(t) \\ y = 3\tan(t) \end{cases}$$

met  $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ .

- c  $x = 3 + y$  ofwel  $y = x - 3$ .



- T-6a** Voor een snijpunt met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .  
 $2\cos(t) = 0$  dus  $t = \frac{1}{2}\pi$  of  $t = 1\frac{1}{2}\pi$ .  
 $t = \frac{1}{2}\pi$  geeft  $(0, 3)$  en  $t = 1\frac{1}{2}\pi$  geeft  $(0, -3)$ .  
 Voor een snijpunt met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .  
 $4\sin^3(t) - \sin(t) = 0$   
 $\sin(t) \cdot (4\sin^2(t) - 1) = 0$   
 $\sin(t) = 0$  of  $\sin(t) = \frac{1}{2}$  of  $\sin(t) = -\frac{1}{2}$   
 $t = 0$  of  $t = \pi$  of  $t = 2\pi$  of  $t = \frac{1}{6}\pi$  of  $t = \frac{5}{6}\pi$  of  $t = 1\frac{1}{6}\pi$  of  $t = 1\frac{5}{6}\pi$   
 Dit geeft als snijpunten met de  $x$ -as:  
 $(2, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, 0)$ ,  $(-\sqrt{3}, 0)$  en  $(-2, 0)$ .
- b** Het punt  $(1, 0)$ :  
 $x = 1$  geeft  $2\cos(t) = 1$  dus  $\cos(t) = \frac{1}{2}$ .  
 Dit geeft  $t = \frac{1}{3}\pi$  of  $t = 1\frac{2}{3}\pi$ .  
 $y = 0$  geeft  
 $4\sin^3(\frac{1}{3}\pi) - a \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi) = 0$   
 $\sin(\frac{1}{3}\pi) \cdot (4\sin^2(\frac{1}{3}\pi) - a) = 0$   
 $4 \cdot \frac{3}{4} - a = 0$  dus  $a = 3$ .  
 Het punt  $(-1, 0)$ :  
 $x = -1$  geeft  $2\cos(t) = -1$  dus  $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ .  
 Dit geeft  $t = \frac{2}{3}\pi$  of  $t = 1\frac{1}{3}\pi$ .  
 $y = 0$  geeft  
 $4\sin^3(\frac{2}{3}\pi) - a \cdot \sin(\frac{2}{3}\pi) = 0$   
 $\sin(\frac{2}{3}\pi) \cdot (4\sin^2(\frac{2}{3}\pi) - a) = 0$   
 $4 \cdot \frac{3}{4} - a = 0$  dus  $a = 3$ .  
 Dus voor  $a = 3$  gaat de kromme door  $(1, 0)$  en door  $(-1, 0)$ .
- c**  $x = 0$  geeft  $t = \frac{1}{2}\pi$  of  $t = 1\frac{1}{2}\pi$  (zie onderdeel a)  
 $y = 0$  geeft  
 $4\sin^3(\frac{1}{2}\pi) - a \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi) = 0$  ofwel  $4 \cdot 1 - a \cdot 1 = 0$ , dus  $a = 4$   
 of  $4\sin^3(1\frac{1}{2}\pi) - a \sin(1\frac{1}{2}\pi) = 0$  ofwel  $4 \cdot -1 - a \cdot -1 = 0$ , dus  $a = 4$ .  
 Uit een plot blijkt dat voor  $a = 4$  de kromme de  $x$ -as raakt in de oorsprong.
- d** In een snijpunt met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .  
 $4\sin^3(t) - a \cdot \sin(t) = 0$   
 $\sin(t) \cdot (4\sin^2(t) - a) = 0$   
 $\sin(t) = 0$  of  $\sin^2(t) = \frac{1}{4}a$   
 $\sin(t) = 0$  geeft  $t = 0$ ,  $t = \pi$  of  $t = 2\pi$ , dit geeft de punten  $(2, 0)$  en  $(-2, 0)$ .  
 $\sin^2(t) = \frac{1}{4}a$  heeft geen oplossingen voor  $a > 4$ .  
 Dus als  $a \geq 4$  zijn er twee snijpunten met de  $x$ -as.
- e** Als  $a = 4$  geldt  $\sin^2(t) = 1$  dus  $t = \frac{1}{2}\pi$  of  $t = 1\frac{1}{2}\pi$ .  
 Deze  $t$ -waarden geven allebei het punt  $(0, 0)$ .  
 Er zijn dus drie snijpunten met de  $x$ -as als  $a = 4$ .  
 Voor  $0 < a < 4$  heeft  $\sin^2(t) = \frac{1}{4}a$  vier oplossingen die twee verschillende snijpunten met de  $x$ -as geven anders dan  $(2, 0)$  en  $(-2, 0)$ .  
 Dus als  $0 < a < 4$  zijn er vier snijpunten met de  $x$ -as.



# Hoofdstuk 2 – Toepassingen van integreren

## Voorkennis: Integreren

Pagina 32:

**V-1a**  $f'(x) = 3x^2 - 3$

**b**  $g'(x) = \cos(x) - \sin(2x) \cdot 2$

$$g'(x) = \cos(x) - 2\sin(2x)$$

**c** Met de kettingregel:

$$h'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

**d** Met de productregel en kettingregel:

$$k'(x) = 2\sin(x^2) + 2x\cos(x^2) \cdot 2x$$

$$k'(x) = 2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2)$$

**e**  $l'(x) = 1 + \frac{1}{\cos^2(x)}$

**f** Met de kettingregel:

$$m'(x) = e^x + e^{-x} \cdot -1 = e^x - e^{-x}$$

**V-2a**  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c$

**b**  $G(x) = -\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + c$

**c**  $H(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + c$

**d**  $K(x) = e^x + e^{-x} + c$

**e**  $L(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}(3x+4)^6 + c$

$$L(x) = \frac{1}{18}(3x+4)^6 + c$$

**f**  $M(x) = \frac{1}{2}e^{2x-2} + c$

**g**  $n(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x} = x + 4 + 2x^{-1}$

$$N(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2\ln|x| + c$$

**V-3a**  $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2x}$ . Probeer  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + a(2x)^{\frac{1}{2}}$ .

Er moet gelden dat  $F'(x) = f(x)$ , dus

$$F'(x) = x^2 + a \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = x^2 + 3a\sqrt{2x} = f(x) = x^2 + 2\sqrt{2x}, \text{ dus } a = \frac{2}{3}.$$

De algemene oplossing is  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}(2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x\sqrt{2x} + c$ .

**b**  $g(x) = \frac{1}{4x} + 4\sin(4x)$ . Probeer  $G(x) = \frac{1}{4}\ln|x| + a\cos(4x)$ .

Er moet gelden dat  $G'(x) = g(x)$ , dus

$$G'(x) = \frac{1}{4x} - a\sin(4x) \cdot 4 = g(x) = \frac{1}{4x} + 4\sin(4x), \text{ dus } a = -1.$$

De algemene oplossing is  $G(x) = \frac{1}{4}\ln|x| - \cos(4x) + c$ .

c  $h(x) = 3^x + 3^{-x}$

$$H(x) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^x + \frac{1}{\ln(\frac{1}{3})} \cdot 3^{-x} + c =$$

$$H(x) = \frac{1}{\ln(3)}(3^x - 3^{-x}) + c$$

d  $k(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = x^{-2} - 2x^{-3}$

$$K(x) = \frac{1}{-1} \cdot x^{-1} - 2 \cdot \frac{1}{-2} \cdot x^{-2} + c$$

$$K(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$$

e  $l(x) = \frac{1}{2x-4}$ . Probeer  $L(x) = a \cdot \ln|2x-4|$ .

Er moet gelden dat  $L'(x) = l(x)$ , dus

$$L'(x) = \frac{a}{2x-4} \cdot 2 = \frac{2a}{2x-4} = l(x) = \frac{1}{2x-4}, \text{ dus } a = \frac{1}{2}.$$

De algemene oplossing is  $L(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln|2x-4| + c$ .

f  $m(x) = \frac{1}{(2x-4)^2}$ . Probeer  $M(x) = a \cdot (2x-4)^{-1}$ .

Er moet gelden dat  $M'(x) = m(x)$ , dus

$$M'(x) = a \cdot -1(2x-4)^{-2} \cdot 2 = -\frac{2a}{(2x-4)^2} = m(x) = \frac{1}{(2x-4)^2}, \text{ dus } a = -\frac{1}{2}.$$

De algemene oplossing is  $M(x) = -\frac{\frac{1}{2}}{2x-4} + c = -\frac{1}{4x-8} + c$ .

V-4a  $\int_1^e \frac{2}{x} dx = [2\ln|x|]_1^e = 2 - 0 = 2$

b  $\int_0^\pi 2\sin(3x) dx = \left[-\frac{2}{3}\cos(3x)\right]_0^\pi = \frac{2}{3} - (-\frac{2}{3}) = 1\frac{1}{3}$

c  $\int_1^2 (2^x - \frac{1}{2}x) dx = \left[\frac{1}{\ln(2)}2^x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = \left(\frac{4}{\ln(2)} - 1\right) - \left(\frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\ln(2)} - \frac{3}{4}$

Pagina 33:

V-5a  $\int_0^3 (x^3 - x^2) dx + \int_3^5 (x^3 - x^2) dx = \int_0^5 (x^3 - x^2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^5 = \frac{625}{4} - \frac{125}{3} = 114\frac{7}{12}$

b  $\int_{-2}^2 (x^5 - x^3 + 2x) dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_{-2}^2 = 0.$

Omdat er slechts kwadraten in de primitieve voorkomen geeft invullen van  $-2$  hetzelfde resultaat als het invullen van  $2$ . Je kunt dus met een minimum aan rekenwerk concluderen dat de integraal de waarde  $0$  heeft.

$$\text{c} \quad \int_0^{\pi} (\sin(2x) + \cos(x)) \, dx = \left[ -\frac{1}{2}\cos(2x) + \sin(x) \right]_0^{\pi} = \left( -\frac{1}{2} + 0 \right) - \left( -\frac{1}{2} + 0 \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad & \int_1^e (3x^2 + \ln(x)) \, dx - \int_1^e (2x + \ln(x)) \, dx = \\ & \int_1^e ((3x^2 + \ln(x)) - (2x + \ln(x))) \, dx = \int_1^e (3x^2 - 2x) \, dx = \\ & \left[ x^3 - x^2 \right]_1^e = (e^3 - e^2) - (1 - 1) = e^3 - e^2 \end{aligned}$$

$$\text{e} \quad \int_{-e}^{-1} \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \, dx = \left[ 2\ln|x| - \frac{1}{x} \right]_{-e}^{-1} = (0 + 1) - \left( 2 + \frac{1}{e} \right) = -\frac{1}{e} - 1$$

$$\text{f} \quad \int_0^7 \frac{1}{\sqrt{3x+4}} \, dx = \left[ \frac{2}{3}\sqrt{3x+4} \right]_0^7 = \frac{2}{3} \cdot \left[ \sqrt{3x+4} \right]_0^7 = \frac{2}{3} \cdot (5 - 2) = 2$$

**V-6a** De gevraagde Riemann-som is

$$\sum_{k=0}^2 \ln\left(1\frac{1}{2} + k\right) \cdot 1 = \ln\left(1\frac{1}{2}\right) + \ln\left(2\frac{1}{2}\right) + \ln\left(3\frac{1}{2}\right) \approx 2,57$$

$$\text{b} \quad \Delta x = \frac{4-1}{30} = \frac{1}{10} \quad \text{en} \quad m_0 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = 1\frac{1}{20}.$$

$$\text{De Riemann-som is } \sum_{k=0}^{29} \ln\left(1\frac{1}{20} + k \cdot \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{1}{10}.$$

**TI:** sum(seq(0.1ln(X), X, 1.05, 3.95, 0.1))  $\approx 2,55$

**Casio:** Sum Seq(0.1ln(X), X, 1.05, 3.95, 0.1)  $\approx 2,55$

**V-7a** Invoer:  $Y1 = 4\sqrt{1-X^2}$

Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 2$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 5$

Optie: CALC,  $\int f(x) \, dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)

De oppervlakte is 3,14.

**b** Invoer:  $Y1 = \sin(X^2)$

Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = \pi$ ,  $Y_{\min} = -1$ ,  $Y_{\max} = 1$

Optie: CALC,  $\int f(x) \, dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)

De oppervlakte is 0,89.

**V-8a** De helling van lijn  $l$  is gelijk aan  $f'(3)$ .

Er geldt  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ , dus  $f'(3) = 11$ .

Een vergelijking van lijn  $l$  heeft de vorm  $y = 11x + b$ .

Punt (3, 6) invullen geeft  $b = -27$ .

De gezochte vergelijking is dus  $y = 11x - 27$ .

**b** De nulpunten van de grafiek van  $f$ :

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2.$$

Het nulpunt van lijn  $l$  is  $x = \frac{27}{11} = 2\frac{5}{11}$ .

De exacte oppervlakte van gebied  $W$  is dan

$$\int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 2x) \, dx - \int_{2\frac{5}{11}}^3 (11x - 27) \, dx =$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_2^3 - \left[5\frac{1}{2}x^2 - 27x\right]_{2\frac{4}{11}}^3 = \left(2\frac{1}{4} - 0\right) - \left(-31\frac{1}{2} + 33\frac{3}{22}\right) = \frac{27}{44}.$$

$$\text{c} \quad \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{4}$$

$$\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2 = \left(0 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^2 = (0 - 0) = 0$$

$$\text{d} \quad \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$$

## 2-1 Integraal en oppervlakte

Pagina 34:

1a Er moet gelden  $f(x) = 0$ .

$$x^3 - 8x^2 + 12x = 0$$

$$x(x^2 - 8x + 12) = 0$$

$$x(x - 2)(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = 6$$

$$\text{b} \quad \int_0^2 (x^3 - 8x^2 + 12x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2\frac{2}{3}x^3 + 6x^2\right]_0^2 = 6\frac{2}{3} - 0 = 6\frac{2}{3}$$

$$\text{c} \quad -\int_2^6 (x^3 - 8x^2 + 12x) dx = -\left[\frac{1}{4}x^4 - 2\frac{2}{3}x^3 + 6x^2\right]_2^6 = -(-36 - 6\frac{2}{3}) = 42\frac{2}{3}$$

$$\text{d} \quad \int_0^6 (x^3 - 8x^2 + 12x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2\frac{2}{3}x^3 + 6x^2\right]_0^6 = (-36 - 0) = -36$$

e Je kunt gebruik maken van de uitkomsten van onderdelen b en c.

$$\int_0^6 (x^3 - 8x^2 + 12x) dx = \int_0^2 (x^3 - 8x^2 + 12x) + \int_2^6 (x^3 - 8x^2 + 12x) = 6\frac{2}{3} - 42\frac{2}{3} = -36$$

2a Er moet gelden  $f(x) = 1$ .

$$2\sin(2x) = 1$$

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{1}{6}\pi + 2k \cdot \pi \vee 2x = \frac{5}{6}\pi + 2k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$$

De  $x$ -coördinaten zijn  $x = \frac{1}{12}\pi$  en  $x = \frac{5}{12}\pi$ .

Er moet gelden  $f(x) = -1$ .

$$2\sin(2x) = -1$$

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$2x = 1\frac{1}{6}\pi + 2k \cdot \pi \vee 2x = 1\frac{5}{6}\pi + 2k \cdot \pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$$

De  $x$ -coördinaten zijn  $x = \frac{7}{12}\pi$  en  $x = \frac{11}{12}\pi$ .

$$\text{b} \quad \int_{\frac{1}{12}\pi}^{\frac{5}{12}\pi} (2\sin(2x) - 1) dx$$

$$\text{c} \quad \int_{\frac{1}{12}\pi}^{\frac{5}{12}\pi} (2\sin(2x) - 1) dx = \left[ -\cos(2x) - x \right]_{\frac{1}{12}\pi}^{\frac{5}{12}\pi} = \left( \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{12}\pi \right) - \left( -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{12}\pi \right) = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$$

$$\text{d} \quad \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{7}{12}\pi} 2\sin(2x) dx, \int_{\frac{7}{12}\pi}^{\frac{11}{12}\pi} (-1) dx \text{ en } \int_{\frac{11}{12}\pi}^{\pi} 2\sin(2x) dx$$

$$\text{e} \quad -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{7}{12}\pi} 2\sin(2x) dx - \int_{\frac{7}{12}\pi}^{\frac{11}{12}\pi} (-1) dx - \int_{\frac{11}{12}\pi}^{\pi} 2\sin(2x) dx =$$

$$- \left[ -\cos(2x) \right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{7}{12}\pi} - \left[ -x \right]_{\frac{7}{12}\pi}^{\frac{11}{12}\pi} - \left[ -\cos(2x) \right]_{\frac{11}{12}\pi}^{\pi} =$$

$$\left[ \cos(2x) \right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{7}{12}\pi} + \left[ x \right]_{\frac{7}{12}\pi}^{\frac{11}{12}\pi} + \left[ \cos(2x) \right]_{\frac{11}{12}\pi}^{\pi} =$$

$$\left( -\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 \right) + \left( \frac{11}{12}\pi - \frac{7}{12}\pi \right) + \left( 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi$$

**Pagina 35:**

**3** De snijpunten van de grafieken  $f$  en  $g$ :

$$x + 1 = x^2 - 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2 \vee x = -1$$

De snijpunten zijn dus  $(2, 3)$  en  $(-1, 0)$ .

Het snijpunt van de grafiek van  $f$  en de lijn  $y = 1$  is  $(0, 1)$ .

De snijpunten van de grafiek van  $g$  en de lijn  $y = 1$ :

$$x^2 - 1 = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

De snijpunten zijn dus  $(-\sqrt{2}, 1)$  en  $(\sqrt{2}, 1)$ .

De gevraagde oppervlakte is gelijk aan:

$$\int_{-1}^0 ((x+1) - (x^2-1)) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (1 - (x^2-1)) dx = \int_{-1}^0 (-x^2 + x + 2) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx =$$

$$\left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^0 + \left[ 2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} = (0 - (-1\frac{1}{6})) + (1\frac{1}{3}\sqrt{2} - 0) = 1\frac{1}{6} + 1\frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

**4** De snijpunten van de grafiek van  $f$  en lijn  $l$ :

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{5}x + 1\frac{1}{5}$$

$$5 = -x^2 + 6x$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

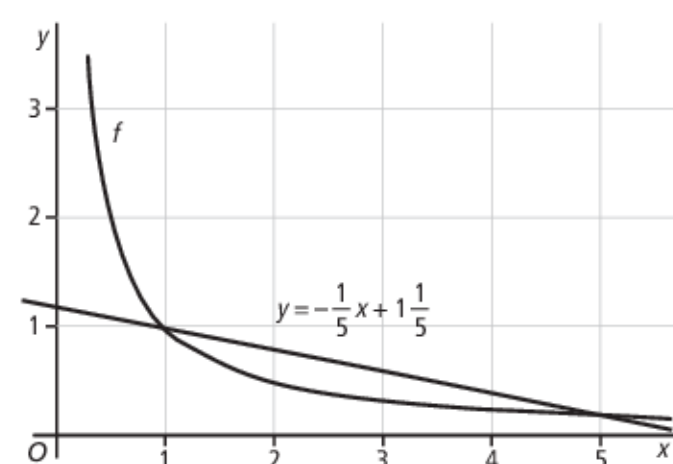
$$x = 1 \vee x = 5$$

De snijpunten zijn dus  $(1, 1)$  en  $(5, \frac{1}{5})$ .

De oppervlakte van het ingesloten gebied is

$$\int_1^5 \left( \left( -\frac{1}{5}x + 1\frac{1}{5} \right) - x^{-1} \right) dx = \left[ -\frac{1}{10}x^2 + 1\frac{1}{5}x - \ln|x| \right]_1^5 =$$

$$\left( 3\frac{1}{2} - \ln(5) \right) - 1\frac{1}{10} = 2\frac{2}{5} - \ln(5).$$





- 5a** De grafieken van  $f$  en  $g$  snijden elkaar in  $(1, 1)$ .

Voor  $1 < x < 4$  is  $f(x) > g(x)$  en dus is de gevraagde oppervlakte

$$\int_1^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^4 (x^{-1} - x^{-2}) dx = \left[ \ln |x| + \frac{1}{x} \right]_1^4 = (\ln(4) + \frac{1}{4}) - 1 = \ln(4) - \frac{3}{4}.$$

- b** De snijpunten van de grafieken van  $f$  en  $g$  met de lijn  $y = 4$  zijn respectievelijk  $(\frac{1}{4}, 4)$  en  $(\frac{1}{2}, 4)$ .

Voor  $\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$  geldt  $f(x) < 4$  en voor  $\frac{1}{2} \leq x < 1$  is  $g(x) > f(x)$ .

De gevraagde oppervlakte is dan

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (4 - x^{-1}) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x^{-2} - x^{-1}) dx = \left[ 4x - \ln |x| \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + \left[ -x^{-1} - \ln |x| \right]_{\frac{1}{2}}^1 = ((2 + \ln(2)) - (1 + 2\ln(2))) + ((-1 - 0) - (-2 + \ln(2))) = 2 - 2\ln(2).$$

- c** Voor willekeurige  $a > 1$  is de oppervlakte gelijk aan

$$\int_1^a (f(x) - g(x)) dx = \int_1^a (x^{-1} - x^{-2}) dx = \left[ \ln |x| + \frac{1}{x} \right]_1^a = \ln a + a^{-1} - 1.$$

Invoer: Y1 =  $\ln(X) + X^{-1} - 1$  en Y2 = 8

Venster: Xmin = 0, Xmax = 10000, Ymin = 0, Ymax = 15

Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solve, ISCT (Casio)

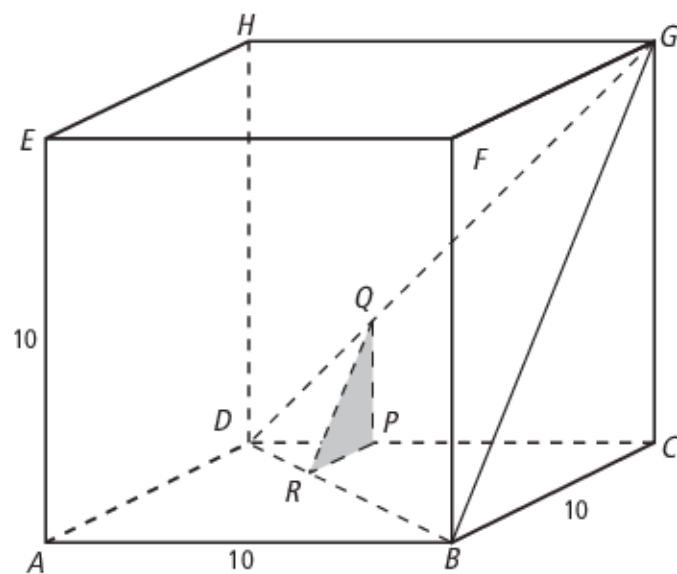
De oplossing is  $a \approx 8102,08$ .

De kleinste gehele waarde van  $a > 1$  waarvoor de oppervlakte minimaal 8 is, is dus  $a = 8103$ .

## 2-2 Integraal en inhoud

Pagina 36:

6abc



- d** Maak gebruik van de gelijkvormigheid van driehoeken:

$$\triangle DCG \sim \triangle DPQ \text{ dus } \frac{CG}{DC} = \frac{PQ}{DP} \rightarrow \frac{10}{10} = \frac{PQ}{3} \rightarrow PQ = 3.$$

$$\text{Uit } \triangle DCB \sim \triangle DPR \text{ volgt } \frac{CB}{DC} = \frac{PR}{DP} \rightarrow \frac{10}{10} = \frac{PR}{3} \rightarrow PR = 3.$$

$$\text{De oppervlakte van driehoek } PQR = \frac{1}{2} PQ \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4\frac{1}{2}.$$

- e**  $DP = x$  dus volgt uit de gelijkvormigheid van driehoeken dat  $PQ = x$  en  $PR = x$ .

$$\text{De oppervlakte van } \triangle PQR \text{ is dan } \frac{1}{2} \cdot PR \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2}x^2.$$



- 7a** De getekende prisma's vallen alle binnen de piramide.  
 Het grootste prisma begint op  $x = 9$ , het kleinste op  $x = 1$ .  
 Er zijn dus 9 prisma's met hoogte 1, zodat de benadering voor de inhoud wordt

$$\sum_{k=0}^9 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + k\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 \left(\frac{1}{2} + k\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4\frac{1}{2}\right)^2 + \left(5\frac{1}{2}\right)^2 + \left(6\frac{1}{2}\right)^2 + \left(7\frac{1}{2}\right)^2 + \left(8\frac{1}{2}\right)^2 + \left(9\frac{1}{2}\right)^2 \right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 332\frac{1}{2} = 166\frac{1}{4}$$

- b** Omdat de prisma's alle binnen de piramide vallen zal de benadering kleiner zijn dan de exacte inhoud van de piramide.

**c** 
$$\int_0^{10} \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{10} = \frac{1}{6} \cdot 1000 = 166\frac{2}{3}$$

- d** Voor de inhoud van een piramide geldt  $I = \frac{1}{3} \cdot \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}$ .  
 Met  $\triangle BCG$  als grondvlak met oppervlakte  $10 \times 10 : 2 = 50$  en  $CD = 10$  als hoogte geeft de formule  $I = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 10 = 166\frac{2}{3}$ .  
 De uitkomst is hetzelfde als bij de integraal.

- 8a** Manier 1:

De verhouding tussen  $PQ$  en  $a$  is gelijk aan de verhouding tussen de hoogte  $TM = 15$  en de breedte  $AB = 10$ . Dus  $PQ = \frac{10}{15}a = \frac{2}{3}a$ .  
 De oppervlakte van het vierkant wordt dan:  $(\frac{2}{3}a)^2 = \frac{4}{9}a^2$ .

- b** De inhoud van het blok met zijden  $PQ$  en  $QR$  en dikte  $\triangle a$  is  
 $PQ^2 \cdot \triangle a = (\frac{2}{3}a)^2 \cdot \triangle a = \frac{4}{9}a^2 \cdot \triangle a$ .

Met een groot aantal van zulke blokken kun je de inhoud van piramide  $T.ABCD$

benaderen door de Riemann-som  $\sum_{k=0}^{n-1} f(m_0 + k \cdot \triangle a) \cdot \triangle a = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{9}(m_0 + k \cdot \triangle a)^2 \cdot \triangle a$ .

Door  $\triangle a$  steeds kleiner te nemen als  $a$  het interval  $[0, 15]$  doorloopt gaat de

Riemann-som over in de integraal  $\int_0^{15} \frac{4}{9}a^2 da$ .

**c** 
$$\int_0^{15} \frac{4}{9}a^2 da = \left[\frac{4}{27}a^3\right]_0^{15} = 500 - 0 = 500$$

**Pagina 37:**

- 9a** De straal  $r$  neemt evenredig met de hoogte  $h$  toe.  
 De toename van de straal  $r$  is  $20 - 10 = 10$  cm over een hoogte van 40 cm,  
 ofwel  $10 : 40 = \frac{1}{4}$  cm toename van  $r$  per cm stijging.

De beginwaarde van de straal is 10 cm voor  $h = 0$ , dus  $r = 10 + \frac{1}{4}h$ .

- b** De oppervlakte van een cirkel op hoogte  $h$  is  $\pi r^2 = \pi(10 + \frac{1}{4}h)^2$ .

De gevraagde inhoud is

$$\int_0^{40} \pi(10 + \frac{1}{4}h)^2 dh = \pi \left[ \frac{1}{3} (10 + \frac{1}{4}h)^3 \cdot 4 \right]_0^{40} =$$

$$\frac{4}{3} \pi ((10 + \frac{1}{4} \cdot 40)^3 - (10 + 0)^3) = \frac{4}{3} \pi (8000 - 1000) = \frac{28000}{3} \pi \text{ cm}^3 = \frac{28}{3} \pi \text{ dm}^3 = 9\frac{1}{3} \pi \text{ dm}^3$$

**10a** De stelling van Pythagoras geeft

$$x^2 + r^2 = R^2$$

$$r^2 = R^2 - x^2$$

$$r = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

De oppervlakte is  $\pi r^2 = 21\pi$ .

**b**  $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{25 - x^2}$ .

De oppervlakte is  $\pi r^2 = \pi(25 - x^2)$ .

**c** 
$$\int_0^5 \pi(25 - x^2) dx = \pi \left[ 25x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^5 = \pi \left( (125 - \frac{1}{3} \cdot 125) - (0 - 0) \right) = \frac{2}{3}\pi \cdot 125 = 83\frac{1}{3}\pi.$$

**d** De inhoud van de halve bol is  $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 83\frac{1}{3}\pi$ .  
Dit antwoord komt overeen met dat van onderdeel c.

**11a** De oppervlakte van de cirkel is  $\pi r^2 = \pi h$ .

**b** 
$$\int_0^4 \pi h dh = \frac{1}{2}\pi [h^2]_0^4 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 = 8\pi \text{ cm}^3$$

## 2-3 Omwentelingslichamen

**Pagina 38:**

**12a** Voor  $x = \frac{1}{4}$  is  $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ , dus de oppervlakte van de cirkel is  $\pi(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}\pi$ .

Voor  $x = \frac{4}{9}$  is  $f(\frac{4}{9}) = \sqrt{\frac{4}{9}} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ , dus de oppervlakte van de cirkel  $\pi(\frac{2}{9})^2 = \frac{4}{81}\pi$ .

**b** Voor elke waarde van  $0 \leq x \leq 1$  is de oppervlakte van bijbehorende cirkel gelijk aan  $\pi(\sqrt{x} - x)^2 = \pi(x - 2x\sqrt{x} + x^2)$ .

**c** Hier is  $n = 4 + 1 = 5$ ;  $\Delta x = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5}$  en  $m_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ .

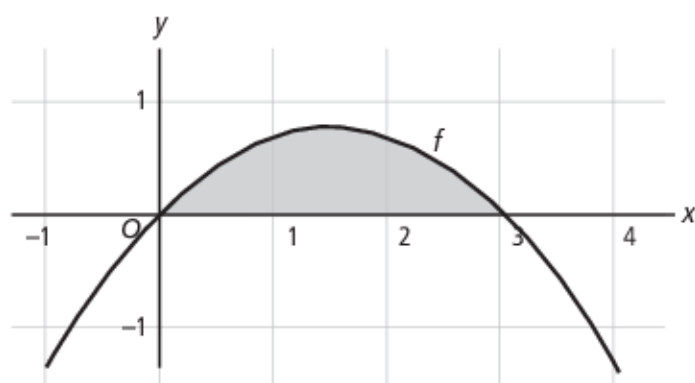
De Riemann-som is  $\sum_{k=0}^4 g(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}k) \cdot \frac{1}{5}$ .

**TI:**  $\text{sum}(\text{seq}(0, 2\pi^*(X - 2X\sqrt{X} + X^2); X; 0,1; 0,9; 0,2)) \approx 0,1081$

**Casio:**  $\text{Sum Seq } (\pi^*(X - 2X\sqrt{X} + X^2); X; 0,1; 0,9; 0,2) \cdot 0,2 \approx 0,1081$

**d** 
$$\int_0^1 \pi(x - 2x^{\frac{1}{2}} + x^2) dx = \pi \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \right) - 0 \right) \pi = \frac{1}{30}\pi$$

**13a**



Voor de nulpunten geldt  $f(x) = 0$ .

$$x - \frac{1}{3}x^2 = 0$$

$$\frac{1}{3}x(3 - x) = 0$$

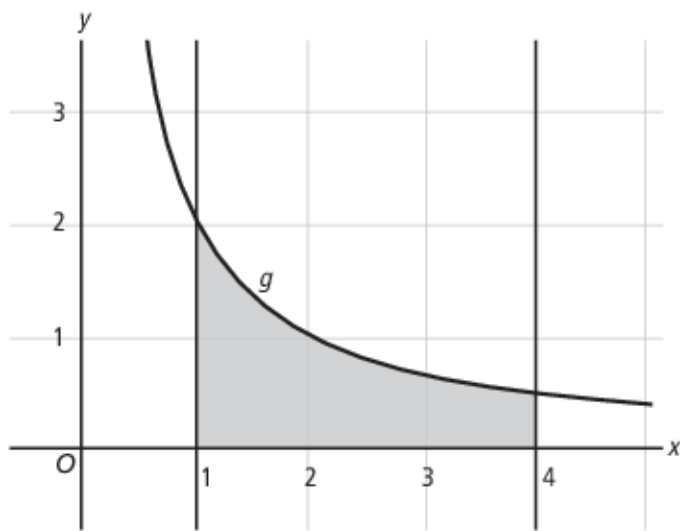
$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

- b Het ingesloten deel van de grafiek ligt tussen de nulpunten.

$$\int_0^3 \pi(x - \frac{1}{3}x^2)^2 dx = \pi \cdot \int_0^3 (x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{9}x^4) dx = \pi \cdot \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{45}x^5 \right]_0^3 = \pi \cdot ((9 - 13\frac{1}{2} + 5\frac{2}{5}) - 0) = \frac{9}{10}\pi$$

Pagina 39:

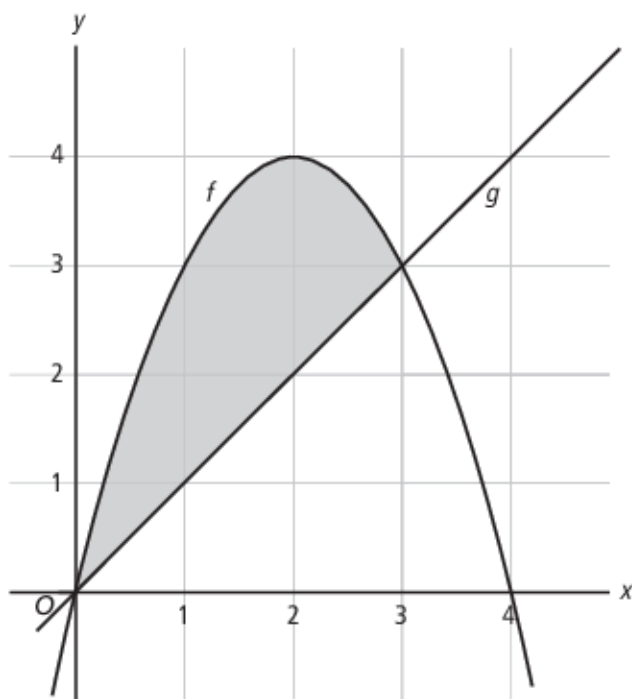
14a



b  $\int_1^4 \pi \cdot (g(x))^2 dx = \int_1^4 \pi \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 dx$

c  $\int_1^4 \pi \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 dx = \int_1^4 4\pi x^{-2} dx = [-4\pi x^{-1}]_1^4 = -\pi - (-4\pi) = 3\pi$

15a



Om de inhoud van het gevraagde omwentelingslichaam te berekenen moet je de inhoud van twee omwentelingslichamen van elkaar af te trekken. Dit komt

overeen met  $\int_0^3 \pi(f(x))^2 dx - \int_0^3 \pi(g(x))^2 dx$ .

b  $\int_0^3 \pi(f(x))^2 dx - \int_0^3 \pi(g(x))^2 dx = \int_0^3 \pi(4x - x^2)^2 dx - \int_0^3 \pi x^4 dx =$   
 $\int_0^3 \pi(16x^2 - 8x^3 + x^4) dx - \int_0^3 \pi x^4 dx = \pi \int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4) dx =$   
 $\pi \left[ 5x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^3 = \pi(135 - 162 + 48\frac{3}{5}) = 21\frac{3}{5}\pi$

- c Met de andere integraal bereken je de inhoud van het omwentelingslichaam dat hoort bij het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van  $h(x) = f(x) - g(x) = 3x - x^2$  en de  $x$ -as.

$$\int_0^3 (\pi(h(x))^2) dx = \pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx =$$

$$\pi \left[ 3x^3 - 1\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^3 = \pi \left( (81 - 121\frac{1}{2} + 48\frac{3}{5}) - 0 \right) = 8\frac{1}{10}\pi$$

- d De functies  $f$  en  $g$  snijden elkaar in punt  $(3, 3)$ .  
De inhoud van het gevraagde omwentelingslichaam is de som van de inhoud van twee omwentelingslichamen:

$$\int_0^3 \pi(g(x))^2 dx + \int_3^4 \pi(f(x))^2 dx = \int_0^3 \pi x^2 dx + \int_3^4 \pi(4x - x^2)^2 dx =$$

$$\int_0^3 \pi x^2 dx + \int_3^4 \pi(16x^2 - 8x^3 + x^4) dx = \pi \int_0^3 x^2 dx + \pi \int_3^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx =$$

$$\pi \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 + \pi \left[ 5\frac{1}{3}x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_3^4 = \pi(9 - 0) + \pi(34\frac{2}{15} - 30\frac{3}{5}) = 12\frac{8}{15}\pi$$

- 16a Voor de snijpunten geldt

$$3\sqrt{x} = 1\frac{1}{2}x$$

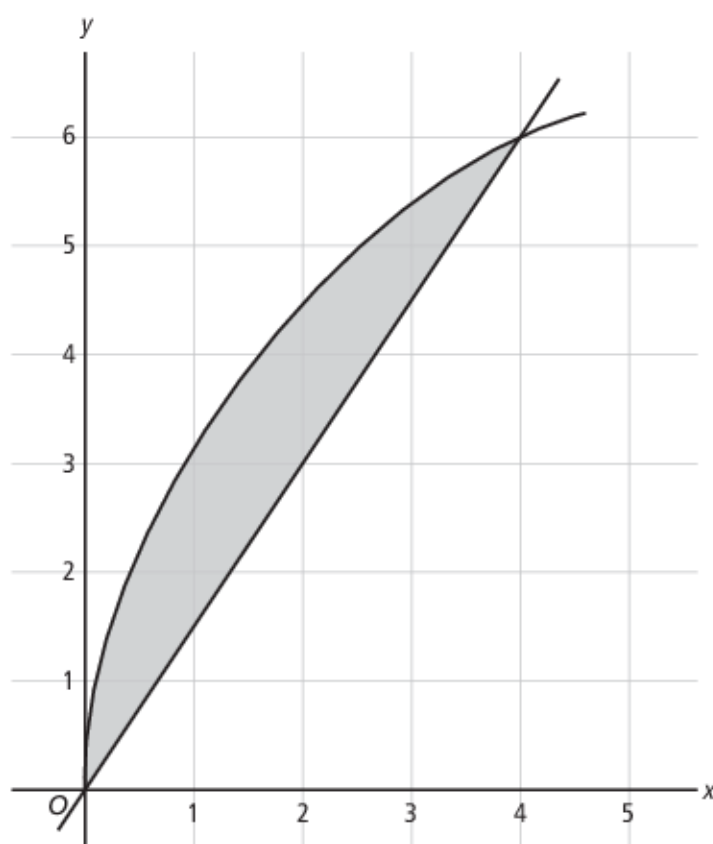
$$9x = 2\frac{1}{4}x^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

Hieronder een plot van beide functies. Het gebied  $G$  is gearceerd.



- b  $\int_0^4 \pi(3\sqrt{x})^2 dx - \int_0^4 \pi(1\frac{1}{2}x)^2 dx = 9\pi \int_0^4 x dx - 2\frac{1}{4}\pi \int_0^4 x^2 dx =$
- $$9\pi \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 - 2\frac{1}{4}\pi \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = 72\pi - 48\pi = 24\pi$$

- c De  $x$ -coördinaten van de snijpunten zijn opnieuw  $x = 0$  en  $x = 4$ .

$$\int_0^4 \pi(3\sqrt{x} + 1)^2 dx - \int_0^4 \pi(1\frac{1}{2}x + 1)^2 dx = \pi \int_0^4 (9x + 6\sqrt{x} + 1) dx - \pi \int_0^4 (2\frac{1}{4}x^2 + 3x + 1) dx =$$

$$\pi \int_0^4 (-2\frac{1}{4}x^2 + 6x + 6\sqrt{x}) dx = \pi \left[ -\frac{3}{4}x^3 + 3x^2 + 4x\sqrt{x} \right]_0^4 = 32\pi$$

- 17 De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$V = \int_0^4 \pi(\sqrt{4-x})^2 dx = \pi \int_0^4 (4-x) dx = \pi \left[ 4x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = 8\pi.$$

Verder is

$$M = \pi \int_0^4 x(\sqrt{4-x})^2 dx = \pi \int_0^4 (4x - x^2) dx = \pi \left[ 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = 10\frac{2}{3}\pi.$$

$$\text{Dus } x_z = \frac{M}{V} = \frac{10\frac{2}{3}\pi}{8\pi} = 1\frac{1}{3}.$$

## 2-4 Wentelen om de $y$ -as

Pagina 40:

- 18a Door  $f(x) = 3x$  te spiegelen in de lijn  $y = x$  verwisselen  $x$  en  $y$  van plaats. Er geldt dus  $x = 3y$ .

Dit geeft  $y = \frac{1}{3}x$ , dus  $g(x) = \frac{1}{3}x$ .

- b Bij draaiing van  $f$  om de  $y$ -as worden alle punten van  $f$  die behoren tot  $y$  in het interval  $[0, 5]$  rond de  $y$ -as gewenteld.

Door de spiegeling in de lijn  $y = x$  wordt het bereik van  $f$  het domein van  $g$ .

Bij draaiing van  $g$  om de  $x$ -as worden dus alle punten van  $g$  die behoren tot  $x$  in het interval  $[0, 5]$  rond de  $x$ -as gewenteld, dus het integratie-interval is  $[0, 5]$ .

$$\int_0^5 \pi\left(\frac{1}{3}x\right)^2 dx = \int_0^5 \pi \cdot \frac{1}{9}x^2 dx = \pi \left[ \frac{1}{27}x^3 \right]_0^5 = 4\frac{17}{27}\pi$$

- 19a  $x \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{\ln(\dots)} f(x)$

$$g(x) \xleftarrow{-1} \dots \xleftarrow{e^-} x$$

Het functievoorschrift van de inverse functie  $g$  is dus  $g(x) = e^x - 1$ .

- b De grafiek van  $f(x) = \ln(x + 1)$  is de grafiek van  $y = \ln(x)$  verschoven met 1 naar links.

De oorsprong is dus een nulpunt. Het gebied wordt verder beperkt door  $y = 2$ . Bij draaiing van  $f$  om de  $y$ -as worden alle punten van  $f$  die behoren tot  $y$  in het interval  $[0, 2]$  rond de  $y$ -as gewenteld.

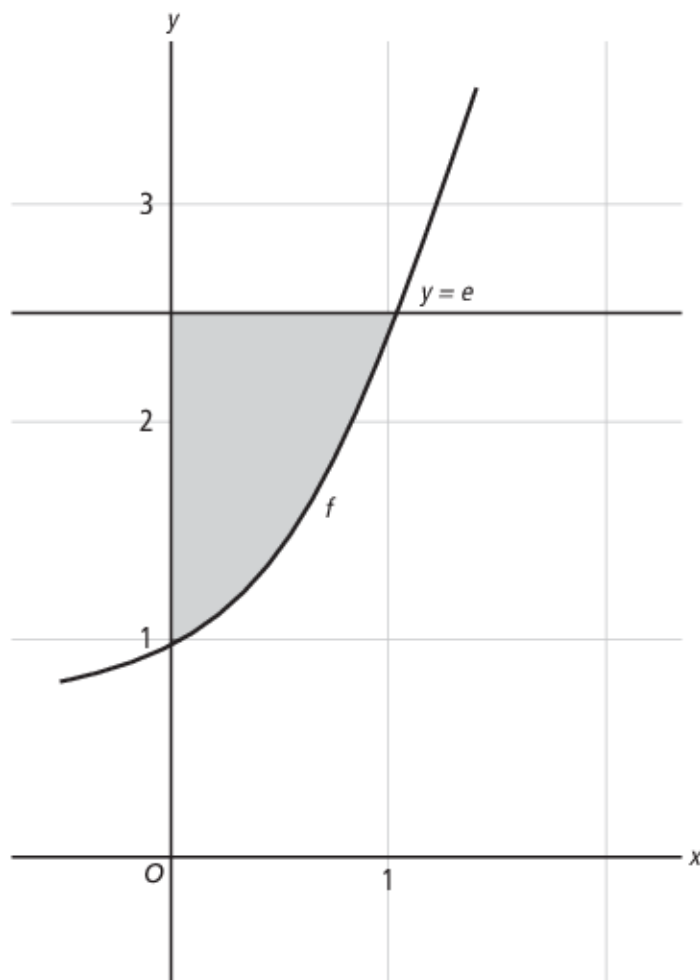
Het integratie-interval is dus  $[0, 2]$ .

- c 
$$\int_0^2 \pi(e^x - 1)^2 dx = \pi \int_0^2 (e^{2x} - 2e^x + 1) dx = \pi \left[ \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x \right]_0^2 =$$
- $$\pi \left[ \left( \frac{1}{2}e^4 - 2e^2 + 2 \right) - \left( \frac{1}{2} - 2 \right) \right] = \left( \frac{1}{2}e^4 - 2e^2 + 3\frac{1}{2} \right) \pi \approx 50,33$$



Pagina 41:

20a



$G$  is het gearceerde gebied hierboven.

- b** De  $y$ -waarden van  $G$  lopen van 1 tot  $e$ .

De inverse functie van  $f(x) = e^x$  is  $g(x) = \ln(x)$ .

De inhoud van het omwentelingslichaam is  $\int_1^e \pi (\ln(x))^2 dx$ .

Primitiveren lukt hier niet, dus benader je de inhoud met je rekenmachine.

Invoer:  $Y1 = \pi(\ln(X))^2$

Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 4$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 5$

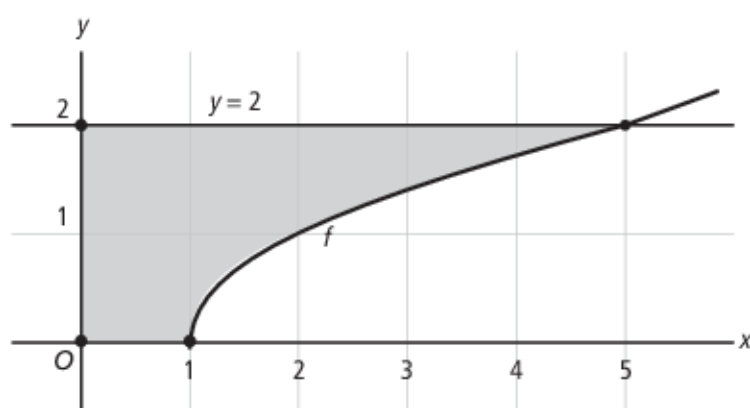
Optie: CALC,  $\int f(x) dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)

De oppervlakte is 2,26.

- c** De inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je om de  $x$ -as wentelt is

$$\int_0^1 \pi \cdot e^2 dx - \int_0^1 \pi \cdot e^{2x} dx = \pi [e^2 x]_0^1 - \pi \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \pi (e^2 - 0) - \pi \left( \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \pi (e^2 + 1).$$

21a



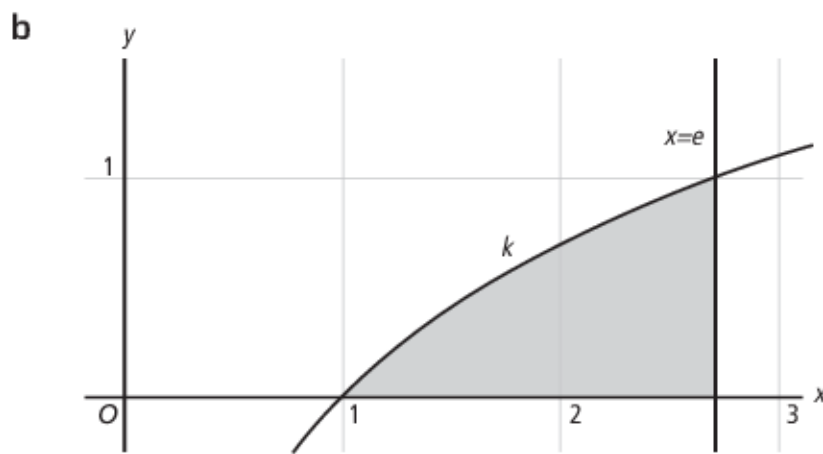
De  $y$ -waarden die horen bij gebied  $G$  lopen van 0 tot 2.

De inverse functie van  $f(x) = \sqrt{x-1}$  is  $g(x) = x^2 + 1$ .

De inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je  $G$  om de  $y$ -as wentelt is

$$\int_0^2 \pi (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \left[ \frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x \right]_0^2 = 13 \frac{11}{15}.$$





De y-waarden die horen bij gebied  $G$  lopen van 0 tot 1.

De inverse functie van  $k(x) = \ln(x)$  is  $m(x) = e^x$ .

De inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je  $G$  om de y-as wentelt is

$$\int_0^1 \pi \cdot e^2 dx - \int_0^1 \pi \cdot e^{2x} dx = \pi e^2 [x]_0^1 - \pi \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \pi e^2 - \pi \left( \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \pi (e^2 + 1).$$

Dit is overigens hetzelfde antwoord als dat bij opgave 20c.

- 22a** Als je  $G$  wentelt om de y-as krijg je een omwentelingslichaam met een grotere inhoud, omdat de ringen waaruit dat lichaam is opgebouwd wijder zijn dan de ringen die je krijgt als je  $G$  om de x-as wentelt.

- b** De grafieken snijden elkaar bij  $x = 0$  en  $x = 1$ .

Op het interval  $\langle 0, 1 \rangle$  is  $f(x) > g(x)$ .

$$\int_0^1 \pi (f(x))^2 dx - \int_0^1 \pi (g(x))^2 dx = \int_0^1 \pi x^2 dx - \int_0^1 \pi x^4 dx = \left[ \frac{1}{3} \pi x^3 \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{5} \pi x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \pi - \frac{1}{5} \pi = \frac{2}{15} \pi$$

- c** De functie  $f$  is de inverse van zichzelf en  $h(x) = \sqrt{x}$  is de inverse functie van  $g$ .

$$\int_0^1 \pi (\sqrt{x})^2 dx - \int_0^1 \pi (x)^2 dx = \int_0^1 \pi x dx - \int_0^1 \pi x^2 dx = \left[ \frac{1}{2} \pi x^2 \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{3} \pi x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{6} \pi$$

**23a**

$$\int_{-1}^2 \pi \left( 1 + \frac{4}{x+2} \right)^2 dx - \int_{-1}^2 \pi \cdot 1^2 dx = \pi \int_{-1}^2 \left( 1 + \frac{8}{x+2} + \frac{16}{(x+2)^2} \right) dx - \pi \int_{-1}^2 1 dx =$$

$$\pi \int_{-1}^2 \left( \frac{8}{x+2} + \frac{16}{(x+2)^2} \right) dx = \pi \left[ 8 \cdot \ln|x+2| - \frac{16}{x+2} \right]_{-1}^2 =$$

$$\pi((8 \cdot \ln(4) - 4) - (-16)) = \pi(8 \cdot \ln(4) + 12)$$

- b** De inverse functie  $g$  van  $f$  krijg je als je in  $y = 1 + \frac{4}{x+2}$  de  $x$  en de  $y$  verwisselt.

$$x = 1 + \frac{4}{y+2}$$

$$\frac{4}{y+2} = x - 1$$

$$y + 2 = \frac{4}{x - 1}$$

$$y = -2 + \frac{4}{x - 1}$$

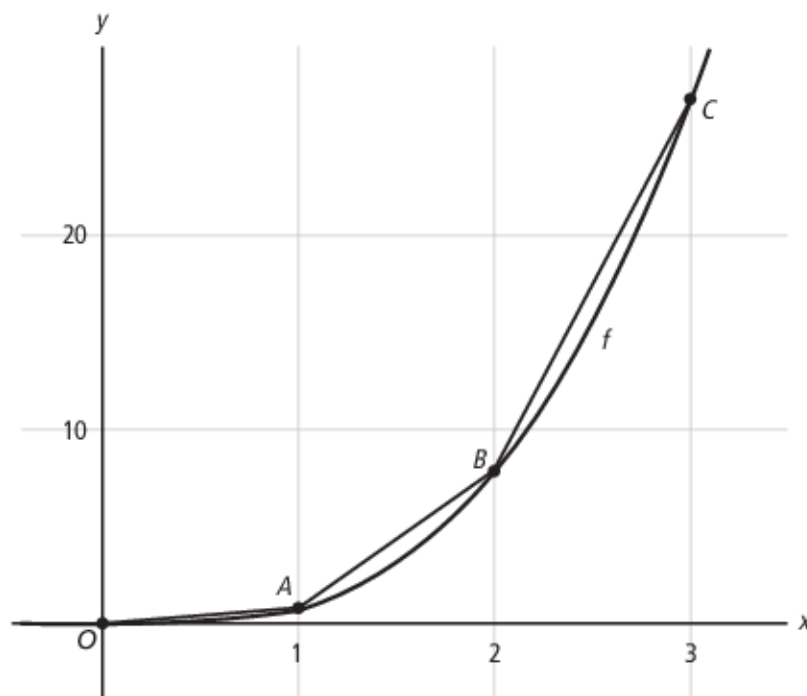
$$\text{Dus } g(x) = -2 + \frac{4}{x - 1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c} \quad & \int_1^2 \pi(2)^2 dx + \int_2^3 \pi \cdot \left(-2 + \frac{4}{x-1}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 4 dx + \pi \int_2^3 \left(4 - \frac{16}{x-1} + \frac{16}{(x-1)^2}\right) dx = \\
 & \pi[4x]_1^2 + \pi \left[4x - 16 \ln|x-1| - \frac{16}{x-1}\right]_2^3 = \\
 & \pi(8-4) + \pi((12-16 \ln(2)-8) - (8-16 \ln(1)-16)) = \\
 & 4\pi + \pi(12-16 \ln(2)) = 16\pi - 16\pi \ln(2)
 \end{aligned}$$

## 2-5 Lengte van een grafiek

Pagina 42:

24a



- b  $|OA| + |AB| + |BC| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{(8-1)^2 + (2-1)^2} + \sqrt{(27-8)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2} + \sqrt{50} + \sqrt{362} \approx 27,51$
- c De lijnstukken geven de kortste verbinding tussen de punten terwijl de grafiek er een boog tussen maakt. De werkelijke lengte is dus groter dan de som van de lengten.
- d De punten waarmee je nu te maken krijgt zijn  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1\frac{1}{2}, 3\frac{3}{8})$ ,  $(2, 8)$ ,  $(2\frac{1}{2}, 15\frac{5}{8})$  en  $(3, 27)$ . De benadering is dan  $\sqrt{(\frac{1}{8}-0)^2 + (\frac{1}{2}-0)^2} + \sqrt{(1-\frac{1}{8})^2 + (1-\frac{1}{2})^2} + \sqrt{(3\frac{3}{8}-1)^2 + (1\frac{1}{2}-1)^2} + \sqrt{(8-3\frac{3}{8})^2 + (2-1\frac{1}{2})^2} + \sqrt{(15\frac{5}{8}-8)^2 + (2\frac{1}{2}-2)^2} + \sqrt{(27-15\frac{5}{8})^2 + (3-2\frac{1}{2})^2}$ .
- TI:**  $\text{sum}(\text{seq}(\sqrt{((X+0.5)^3 - X^3)^2 + (0.5)^2}, X, 0, 2.5, 0.5)) \approx 27,63$
- Casio:**  $\text{Sum Seq}(\sqrt{((X+0.5)^3 - X^3)^2 + (0.5)^2}, X, 0, 2.5, 0.5) \approx 27,63$

$$\text{25a} \quad |PQ| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 \left(1 + \frac{(\Delta f)^2}{(\Delta x)^2}\right)} = \sqrt{(\Delta x)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2\right)} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}$$

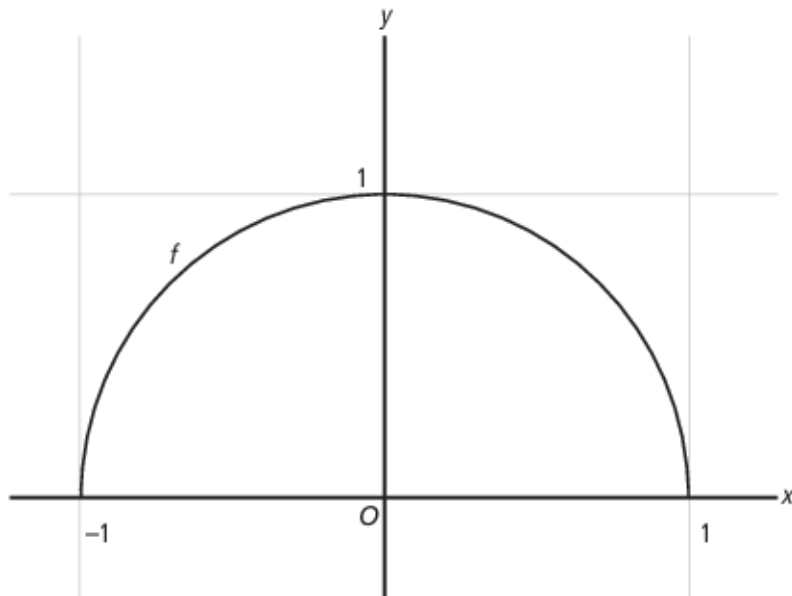
$$\text{b} \quad \text{Omdat } \frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x) \text{ is } |PQ| = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2} \approx \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot \Delta x.$$

$$\text{c} \quad \int_0^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx$$

- d Invoer:  $Y1 = \sqrt{1 + (3X^2)^2}$   
 Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 5$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 30$   
 Optie:  $\text{CALC } \int f(x) dx$  (TI) of  $\text{G-Solve, } \int dx$  (Casio).  
 De oppervlakte is 27,66.

Pagina 43:

26a



b De afgeleide:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

De integraal:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1-x^2}\right) dx$$

c Primitiveren lukt hier niet.

Invoer:  $Y1 = (1 - X^2)^{-1}$ Venster:  $X_{\min} = -2$ ,  $X_{\max} = 2$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 5$ Optie: CALC,  $\int f(x) dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)

De lengte van de grafiek is 3,14.

d De grafiek is de halve eenheidscirkel, dus is de lengte daarvan gelijk aan  $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$ .  
Dit klopt met het antwoord bij onderdeel c.

27 De afgeleide:

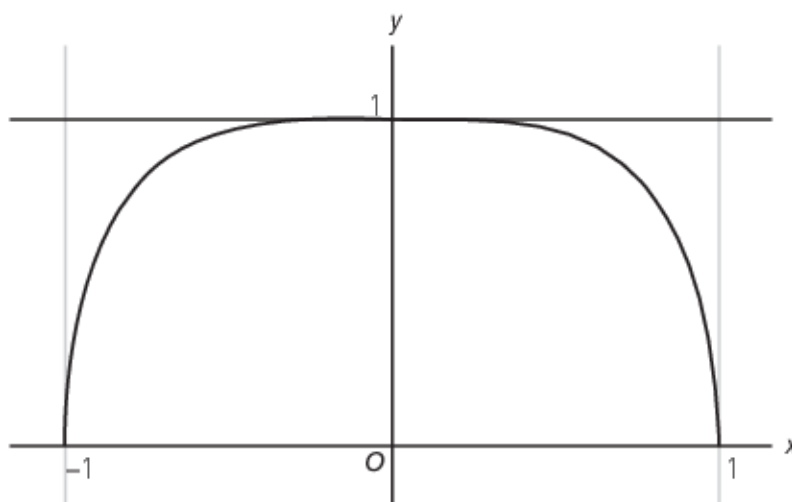
$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x = \sqrt{x}$$

De lengte  $L$  van de grafiek van  $f$ :

$$\int_0^3 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 5\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$$

28a



b De afgeleide:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot -4x^3 = \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$$

De lengte van de grafiek van  $f$ :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{4x^6}{1-x^4}} dx$$

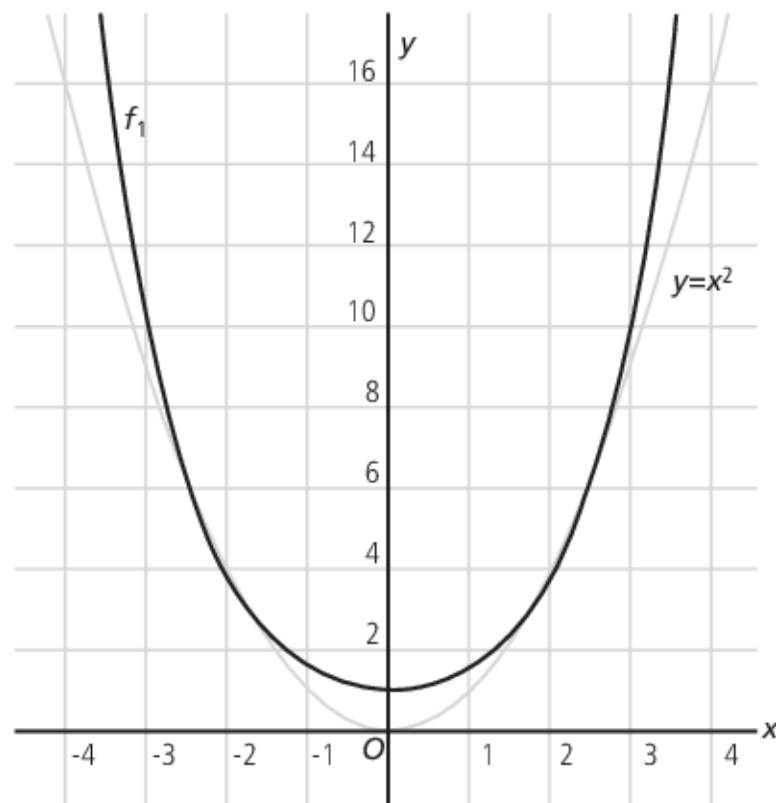
Invoer:  $Y1 = \sqrt{1 + 4X^6/(1 - X^4)}$

Venster:  $X_{\min} = -2$ ,  $X_{\max} = 2$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 5$

Optie: CALC,  $\int f(x) dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)

De lengte van de grafiek is 3,35.

29a



In de buurt van  $x = 0$  is de parabool steiler en zakt meer door. De kettinglijn is daar wat ronder.

Verder weg van  $x = 0$  is de kettinglijn juist steiler.

b  $f_1(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} \cdot -1) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

c De lengte van de grafiek van  $f_1$  voor  $0 \leq x \leq 4$ :

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}\right)} dx = \int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} dx =$$

$$\int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{(e^x + e^{-x})^2} dx = \int_0^4 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left(e^4 - \frac{1}{e^4}\right) \approx 27,29$$

Primitiveren lukt hier dus, maar als je dat niet ziet kun je natuurlijk (gezien de formulering in de vraagstelling) je rekenmachine gebruiken.

Invoer:  $Y1 = 0,5*\sqrt{(e^{(2X)} + 2 + e^{(-2X)})}$

Venster:  $X_{\min} = -5$ ,  $X_{\max} = 5$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 30$

Optie: CALC,  $\int f(x) dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)

De lengte is 27,29.

30a De afgeleide:

$$f(x) = 2\sqrt{(x+4)^3} = 2(x+4)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}} = 3(x+4)^{\frac{1}{2}}$$

De wortel:

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + (3(x+4)^{\frac{1}{2}})^2} = \sqrt{1 + 9(x+4)} = \sqrt{9x + 37}$$

- b Een primitieve van  $g(x) = \sqrt{9x+37}$  is van de vorm  $G(x) = a(9x+37)^{\frac{3}{2}}$ .  
De afgeleide van  $a(9x+37)^{\frac{3}{2}}$  is gelijk aan  $a \cdot \frac{3}{2}(9x+37)^{\frac{1}{2}} \cdot 9 = 13\frac{1}{2}a\sqrt{9x+37}$ .  
Dit moet gelijk zijn aan  $\sqrt{9x+37}$ . Dus moet  $a = \frac{1}{13\frac{1}{2}} = \frac{2}{27}$  zijn.
- Een primitieve van  $g(x) = \sqrt{9x+37}$  is dan  $G(x) = \frac{2}{27}(9x+37)^{\frac{3}{2}}$ .
- c De exacte lengte van de grafiek van  $f$  tussen de punten  $P$  en  $Q$  is dus  

$$\left[\frac{2}{27}(9x+37)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^0 = \frac{2}{27} \cdot 37\sqrt{37} - \frac{2}{27} = \frac{2}{27}(37\sqrt{37} - 1).$$

## 2-6 Lengte van een kromme

Pagina 44:

- 31a  $L \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , naarmate  $\Delta x$  (en dus  $\Delta y$ ) kleiner is zal dit beter kloppen.

$$\begin{aligned}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} &= \sqrt{(\Delta t)^2 \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}} = \sqrt{(\Delta t)^2 \left( \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2 \right)} = \sqrt{\left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2} \cdot \Delta t = \\ &\sqrt{\left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2} \cdot \Delta t \approx \sqrt{(f'(m_i))^2 + (g'(m_i))^2} \cdot \Delta t\end{aligned}$$

De gemiddelde helling  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  nadert naar  $f'(m_i)$  als  $\Delta t$  (en dus  $\Delta x$ ) naar 0 nadert.

De gemiddelde helling  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$  nadert analoog naar  $g'(m_i)$  als  $\Delta t$  (en dus  $\Delta y$ ) naar 0 nadert.

- b  $\sum \sqrt{(f'(m_i))^2 + (g'(m_i))^2} \cdot \Delta t$  nadert naar  $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$  als  $\Delta t \rightarrow 0$ .

- c De afgeleiden:

$$x'(t) = -3\sin(t)$$

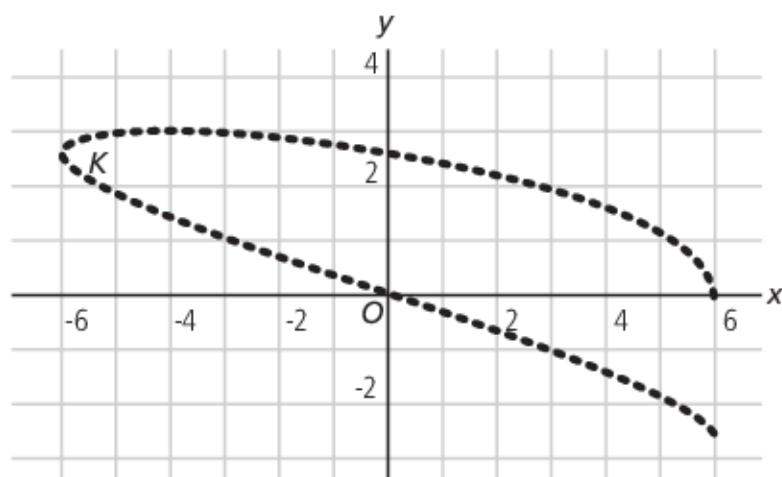
$$y'(t) = 3\cos(t)$$

De lengte van de kromme  $K$ :

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\sin(t))^2 + (3\cos(t))^2} dt = 3 \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = 3 \cdot \int_0^{2\pi} 1 dt = 3 \cdot [x]_0^{2\pi} = 6\pi$$

Pagina 45:

32a



- b De afgeleiden:

$$x'(t) = -6\sin(t)$$

$$y'(t) = \frac{2}{3} \cdot 3\cos\left(\frac{2}{3}t\right) = 2\cos\left(\frac{2}{3}t\right)$$



De lengte van de kromme  $K$ :

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-6\sin(t))^2 + (2\cos(\frac{2}{3}t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{36(\sin(t))^2 + 4(\cos(\frac{2}{3}t))^2} dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{9(\sin(t))^2 + (\cos(\frac{2}{3}t))^2} dt$$

Invoer:  $Y1 = 2\sqrt{9\sin(X)^2 + \cos(2/3X)^2}$

Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 8$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 10$

Optie: CALC,  $\int f(x) dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)

De lengte van  $K$  is 26,22.

**33a** De afgeleiden zijn  $x'(t) = 6t$  en  $y'(t) = 6t^2$ .

De lengte van  $K$  is  $\int_0^1 \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)^2} dt$ .

$$\text{b} \quad \int_0^1 \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)^2} dt = \int_0^1 6\sqrt{t^2 + t^4} dt = \int_0^1 6t\sqrt{1 + t^2} dt$$

**c** Als  $G(t) = a(1 + t^2)\sqrt{1 + t^2}$  de primitieve van  $g(t)$  is, dan moet gelden  $G'(t) = g(t)$ .

$$G'(t) = a \left( 2t \cdot \sqrt{1 + t^2} + (1 + t^2) \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 2t}{\sqrt{1 + t^2}} \right) = a \left( \frac{2t(1 + t^2)}{\sqrt{1 + t^2}} + \frac{t(1 + t^2)}{\sqrt{1 + t^2}} \right) = 3a \cdot t\sqrt{1 + t^2}$$

Er geldt  $3a = 6$ , dus  $a = 2$ .

$$\text{d} \quad \int_0^1 6t\sqrt{1 + t^2} dt = \left[ 2(1 + t^2)\sqrt{1 + t^2} \right]_0^1 = 4\sqrt{2} - 2$$

**34a** Voor snijpunten met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .

$$e^t \cdot \sin(t) = 0$$

$$\sin(t) = 0$$

$$t = 0 \vee t = \pi$$

Voor snijpunten met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .

$$e^t \cdot \cos(t) = 0$$

$$\cos(t) = 0$$

$$t = \frac{1}{2}\pi$$

De snijpunten met de assen zijn dan  $(e^0 \cos(0), 0) = (1, 0)$  en  $(e^\pi \cos(\pi), 0) = (-e^\pi, 0)$  en  $(0, e^{\frac{1}{2}\pi} \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi)) = (0, e^{\frac{1}{2}\pi})$ .

**b** De afgeleiden:

$$x'(t) = e^t(\cos(t) - \sin(t))$$

$$y'(t) = e^t(\cos(t) + \sin(t))$$

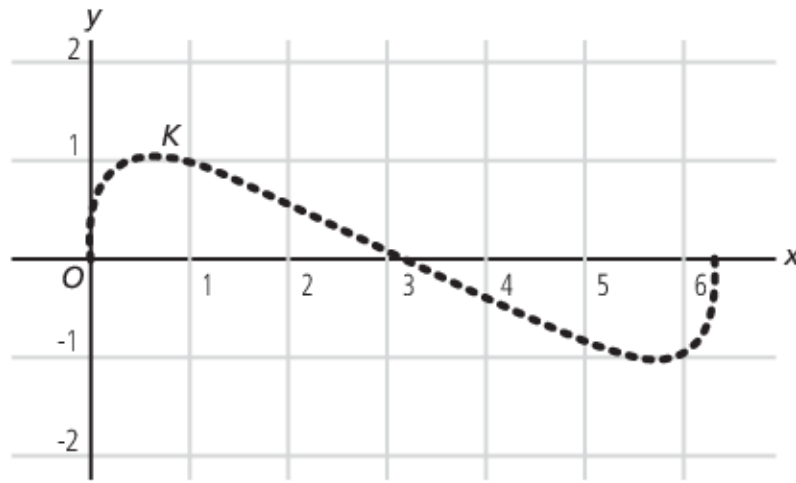
De integraal voor de lengte van  $K$ :

$$\int_0^\pi \sqrt{e^{2t}(\cos(t) - \sin(t))^2 + e^{2t}(\cos(t) + \sin(t))^2} dt$$

$$\text{c} \quad \int_0^\pi \sqrt{e^{2t}(\cos(t) - \sin(t))^2 + e^{2t}(\cos(t) + \sin(t))^2} dt = \int_0^\pi e^t \sqrt{2(\sin(t))^2 + 2(\cos(t))^2} = [e^t \sqrt{2}]_0^\pi = (e^\pi - 1)\sqrt{2}$$



35a



b De afgeleiden:

$$x'(t) = 1 - \cos(t)$$

$$y'(t) = \cos(t)$$

De lengte van de kromme  $K$ :

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + 2(\cos(t))^2} dt.$$

Invoer:  $Y1 = \sqrt{1 - 2\cos(X) + 2\cos(X)^2}$ Invoer:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 8$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 5$ Optie: CALC,  $\int f(x) dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)De lengte van  $K$  is 8,21.36a Voor snijpunten met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .

$$t^3 - t = 0$$

$$t(t-1)(t+1) = 0$$

$$t = -1 \text{ of } t = 0 \text{ of } t = 1$$

Deze waarden van  $t$  komen overeen met de punten  $(0, 3)$  (twee keer) en  $(0, 4)$ .Voor snijpunten met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .

$$4 - t^2 = 0$$

$$(2 - t)(2 + t) = 0$$

$$t = -2 \text{ of } t = 2$$

Deze waarden van  $t$  komen overeen met de punten  $(-6, 0)$  en  $(6, 0)$ .

b Het domein:

$$y = 4 - t^2 \geq 0 \text{ voor } -2 \leq t \leq 2$$

De afgeleiden:

$$x'(t) = 3t^2 - 1 \text{ en } y'(t) = -2t.$$

De lengte van het deel van de kromme dat boven de  $x$ -as ligt:

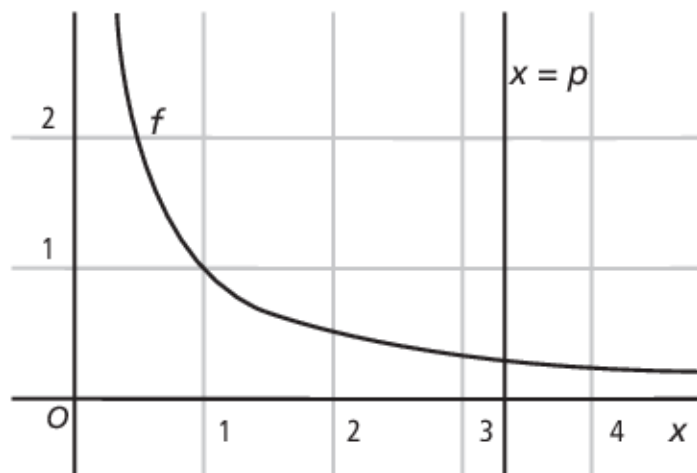
$$\int_{-2}^2 \sqrt{(3t^2 - 1)^2 + (-2t)^2} dt = \int_{-2}^2 \sqrt{9t^4 - 2t^2 + 1} dt.$$

c Invoer:  $Y1 = \sqrt{9X^4 - 2X^2 + 1}$ Invoer:  $X_{\min} = -4$ ,  $X_{\max} = 4$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 20$ Optie: CALC,  $\int f(x) dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)De lengte van het gedeelte van de kromme dat boven de  $x$ -as ligt is 16,21.

## 2-7 Gemengde opdrachten

Pagina 46:

37a



$$A(p) = \int_1^p x^{-1} dx = [\ln |x|]_1^p = \ln(p)$$

Als  $p$  onbeperkt toeneemt, wordt  $A(p)$  willekeurig groot.

**b** 
$$I(p) = \int_1^p \pi x^{-2} dx = [-\pi x^{-1}]_1^p = \pi(1 - p^{-1})$$

Als  $p$  onbeperkt toeneemt, gaat de term  $p^{-1}$  naar 0 en nadert  $I(p)$  dus naar  $\pi$ .

**38a** Het gebied onder de grafiek van  $g$  is een rechthoek.

De oppervlakte van een rechthoek is lengte  $\times$  breedte  $= (b - a)c$ .

Dit moet gelijk zijn aan de oppervlakte onder de grafiek van  $f$ .

**b** 
$$(b - a)c = \int_a^b f(x) dx, \text{ dus } c = \frac{1}{(b - a)} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

De gemiddelde functiewaarde van de functie  $f(x) = x^2$  op het interval  $[0, 1]$  is

$$\frac{1}{1 - 0} \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

De gemiddelde functiewaarde van de functie  $f(x) = x^2$  op het interval  $[0, 3]$  is

$$\frac{1}{3 - 0} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = 3.$$

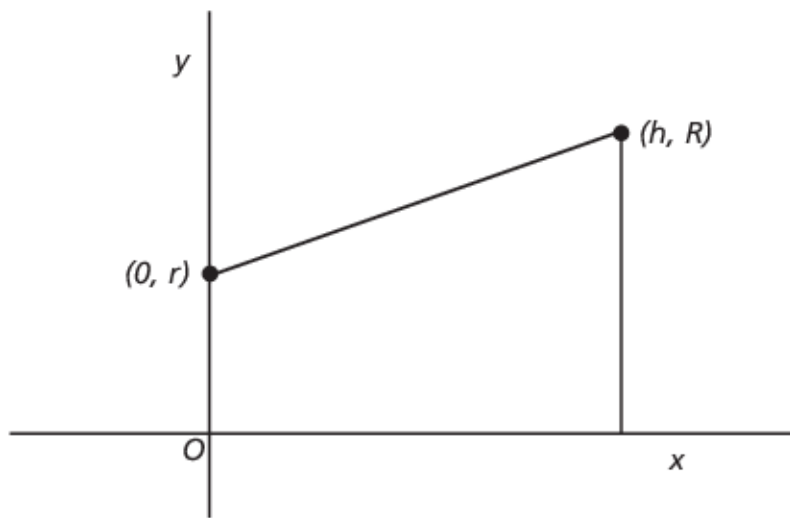
**c** 
$$\frac{1}{p - 0} \int_0^p x^2 dx = \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^p = \frac{1}{3} p^2$$

Er moet gelden  $\frac{1}{3} p^2 = 12$ , dus  $p^2 = 36$ , dus  $p = 6$ .

In dit vraagstuk is  $p > 0$ . Dit kun je bijvoorbeeld afleiden uit de notatie  $[0, p]$ .

Dus  $p = -6$  vervalt als oplossing.

39a



b De helling van deze lijn is  $\frac{R-r}{h}$ , dus is  $y = \frac{R-r}{h}x + r$  een vergelijking van de lijn.

c 
$$\int_0^h \pi \left( \frac{R-r}{h}x + r \right)^2 dx$$

d 
$$\int_0^h \pi \left( \frac{R-r}{h}x + r \right)^2 dx = \left[ \frac{\pi}{3 \cdot \frac{R-r}{h}} \left( \frac{R-r}{h}x + r \right)^3 \right]_0^h = \left[ \frac{h \cdot \pi}{3 \cdot (R-r)} \left( \frac{R-r}{h}x + r \right)^3 \right]_0^h =$$

$$\frac{h \cdot \pi \cdot R^3}{3 \cdot (R-r)} - \frac{h \cdot \pi \cdot r^3}{3 \cdot (R-r)} = \frac{h \cdot \pi \cdot (R^3 - r^3)}{3 \cdot (R-r)} = \frac{h \cdot \pi \cdot (R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{3 \cdot (R-r)} = \frac{1}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)h$$

**Pagina 47:**

40a Het moment van het  $k$ -de rechthoekje is  $(m_0 + k \cdot \Delta x) \cdot f(m_0 + k \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$ .

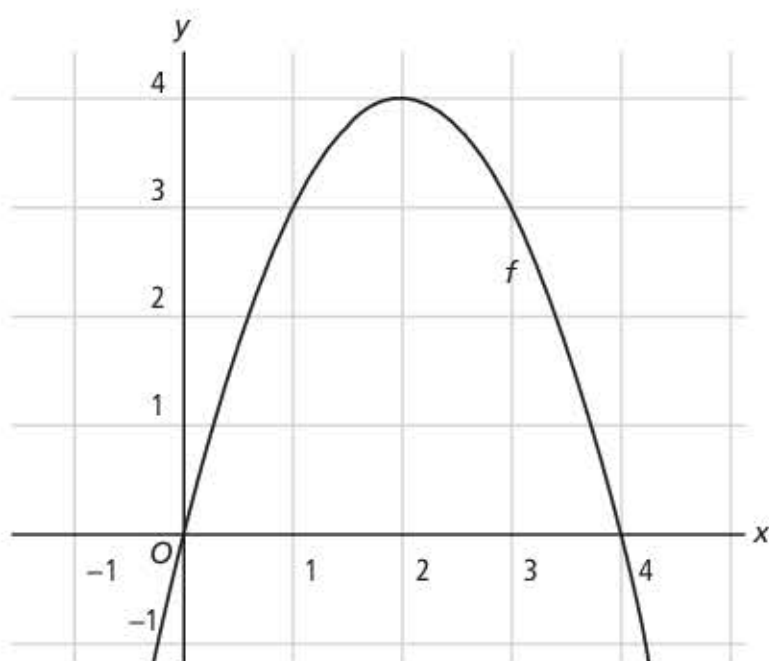
Sommeren over alle  $n$  rechthoekjes geeft de Riemann-som  $\sum_{k=0}^{n-1} (m_0 + k \cdot \Delta x) \cdot f(m_0 + k \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$ .

Als  $\Delta x$  naar 0 nadert gaat de Riemann-som naar  $M = \int_a^b x \cdot f(x) dx$ .

b 
$$M = x_Z \cdot \int_a^b f(x) dx, \text{ dus } x_Z = \frac{M}{\int_a^b f(x) dx}.$$

Omdat  $M = \int_a^b x \cdot f(x) dx$  is dus  $x_Z = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$

c



Het moment:

$$\int_0^4 x \cdot f(x) dx = \int_0^4 x(4x - x^2) dx = \int_0^4 (4x^2 - x^3) dx = \left[ \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^4 = 21\frac{1}{3}$$

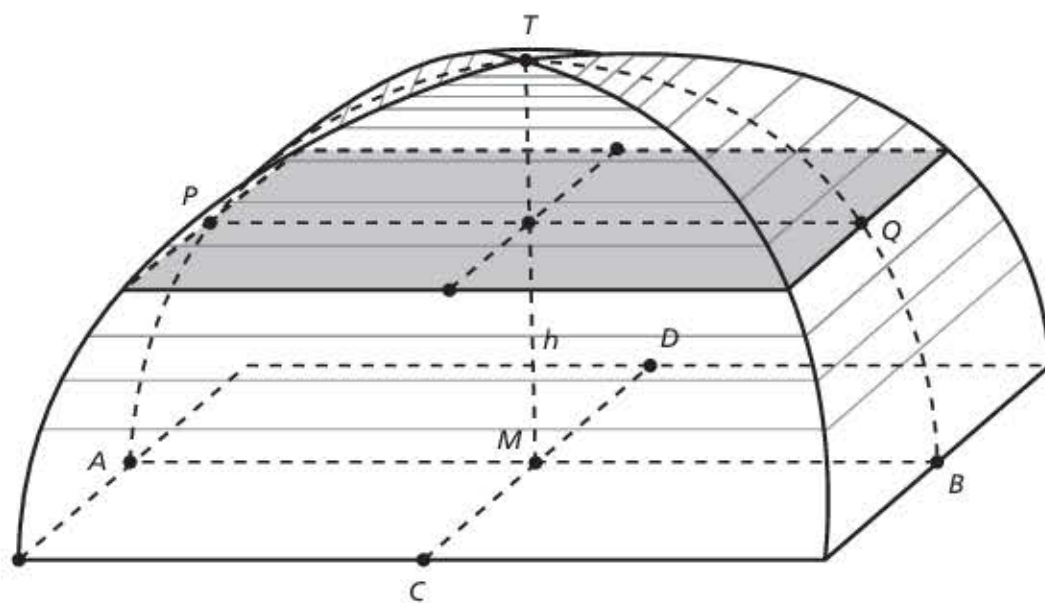
De oppervlakte ingesloten door  $f$  en de  $x$ -as:

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[ 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = 10\frac{2}{3}$$

De  $x$ -coördinaat van het zwaartepunt van het gebied  $G$ :

$$x_z = \frac{21\frac{1}{3}}{10\frac{2}{3}} = 2$$

41a



In de figuur zijn enkele hulplijnen getrokken, o.a.  $AB$  en  $CD$ , de assen van de halve cilinders en  $TM$ , de verbinding tussen het snijpunt van de assen en de top van het kruisgewelf.

De doorsnijdingsfiguur bij het vlak door  $A$ ,  $B$  en  $T$  is een halve cirkel met een straal van 5 meter, dus is de hoogte van het kruisgewelf ook gelijk aan 5 meter.

b  $\frac{1}{2}|PQ| = \sqrt{|PM|^2 - h^2} = \sqrt{25 - h^2}$

De hoogte en de breedte van het vierkant op hoogte  $h$  is dus gelijk aan  $2\sqrt{25 - h^2}$ .

De oppervlakte van een doorsnede op hoogte  $h$  is  $(2\sqrt{25 - h^2})^2 = 4(25 - h^2) = 100 - 4h^2$ .

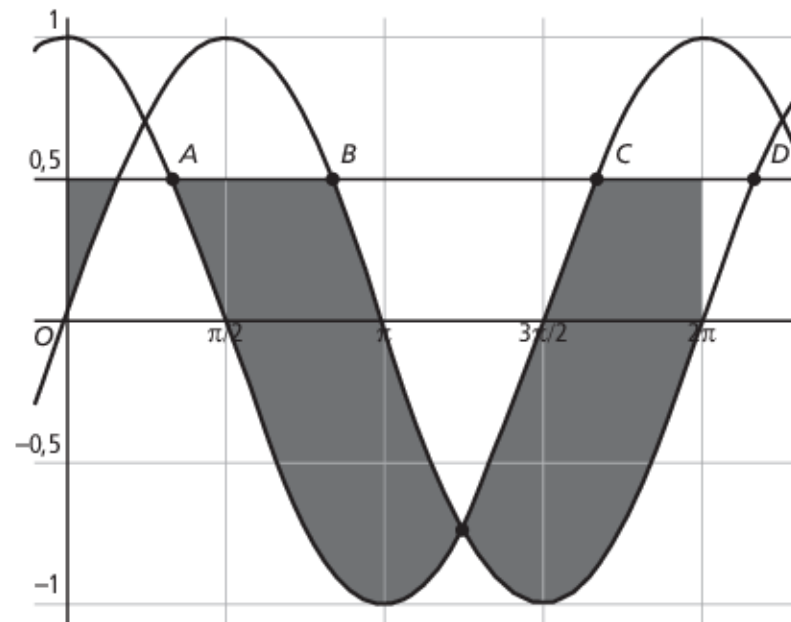
c De inhoud van het kruisgewelf is

$$\int_0^5 (100 - 4h^2) dh = \left[ 100h - \frac{4}{3}h^3 \right]_0^5 = 500 - \frac{500}{3} = 333\frac{1}{3} \text{ m}^3.$$

## Test jezelf

Pagina 50:

T-1a



De gevraagde oppervlakte bestaat uit drie delen.

Het linkerdeel en het rechterdeel zijn samen net zo groot als het middelste deel.

De oppervlakte van het middelste deel in twee stappen berekenen:

$$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \sin(x)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} = \frac{5}{12}\pi - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} (\sin(x) - \cos(x)) dx = \left[-\cos(x) - \sin(x)\right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

De oppervlakte van het middelste deel is  $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\pi + \sqrt{2}$ .

De totale oppervlakte is  $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\pi + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\pi + 2\sqrt{2}$ .

- b** Het rode gebied links van de y-as heeft een oppervlakte gelijk aan

$$\int_{-\pi}^0 (1 + \cos(x)) dx + - \int_{-\pi}^0 \sin(x) dx = \left[x + \sin(x)\right]_{-\pi}^0 - \left[-\cos(x)\right]_{-\pi}^0 = (0 + \pi) - (-1 - 1) = \pi + 2.$$

Rechts van de y-as heeft het rode gebied een oppervlakte gelijk aan

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos(x)) dx - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x) dx = \left[x + \sin(x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} - \left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \left(\frac{1}{2}\pi + 1\right) - (1) = \frac{1}{2}\pi.$$

Het hele rode gebied heeft dus een oppervlakte van  $(\pi + 2) + \frac{1}{2}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + 2$ .

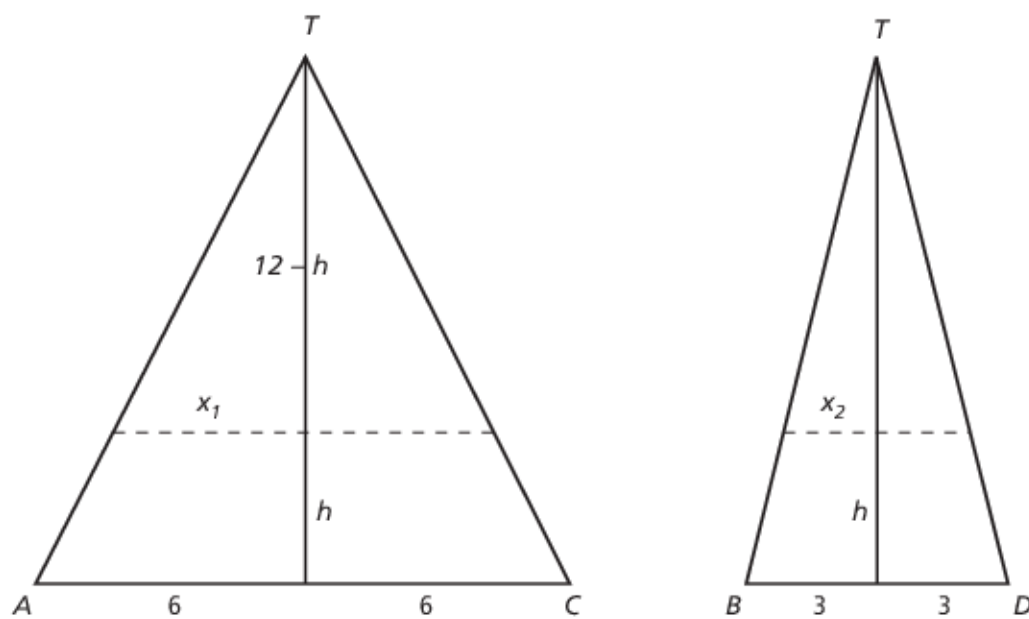
De oppervlakte van het blauwe gebied is

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \sin(x) dx - \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} (1 + \cos(x)) dx = \left[-\cos(x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} - \left[x + \sin(x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} = \left(\frac{1}{2}\pi + 1\right) - (1) =$$

$$1 - (\pi - (\frac{1}{2}\pi + 1)) = 2 - \frac{1}{2}\pi.$$



T-2a



Hierboven zie je twee doorsnedes van de piramide met daarin gelijkvormige driehoeken.

Voor de helft van de lange diagonaal van de ruit op hoogte  $h$  geldt:  $\frac{x_1}{12-h} = \frac{6}{12}$ .

Hieruit volgt dat  $x_1 = 6 - \frac{1}{2}h$ , dus de lange diagonaal van de ruit op hoogte  $h$  heeft lengte  $12 - h$ .

Voor de helft van de korte diagonaal van de ruit op hoogte  $h$  geldt:  $\frac{x_2}{12-h} = \frac{3}{12}$ .

Hieruit volgt dat  $x_2 = 3 - \frac{1}{4}h$ , dus de korte diagonaal heeft lengte  $6 - \frac{1}{2}h$ .

**b** De oppervlakte van de ruit op hoogte  $h$  is  $\frac{1}{2}(12-h)(6-\frac{1}{2}h) = (6-\frac{1}{2}h)^2$ .

**c** De inhoud van de piramide is  $\int_0^{12} (6-\frac{1}{2}h)^2 dh = [-\frac{2}{3}(6-\frac{1}{2}h)^3]_0^{12} = (0 - (-\frac{2}{3} \cdot 6^3)) = 144$ .

$$\begin{aligned} \text{T-3} \quad \int_2^8 \pi \cdot 2^2 dx - \int_2^8 \pi \cdot (\sqrt[3]{x})^2 dx &= [4\pi x]_2^8 - [\frac{3}{5}\pi x^{\frac{5}{3}}]_2^8 = \\ (32\pi - 8\pi) - (19\frac{1}{5}\pi - 1\frac{1}{5}\pi\sqrt[3]{2^2}) &= \pi(4\frac{4}{5} + 1\frac{1}{5}\sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

**T-4** De inverse functie van  $f$  is  $g(x) = x^3$ .

$$\int_0^{\sqrt[3]{2}} \pi \cdot 2^2 dx - \int_0^{\sqrt[3]{2}} \pi (x^3)^2 dx = \pi [4x]_0^{\sqrt[3]{2}} - \pi [\frac{1}{7}x^7]_0^{\sqrt[3]{2}} = 4\pi\sqrt[3]{2} - \frac{4}{7}\pi\sqrt[3]{2} = 3\frac{3}{7}\pi\sqrt[3]{2}$$

**T-5a** De afgeleide:

$$f'(x) = \frac{1}{6}\sqrt{x^2+4} \cdot 2x = \frac{1}{3}x\sqrt{x^2+4}$$

De lengte van de grafiek van  $f$  voor  $0 \leq x \leq \sqrt{5}$ :

$$\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{1 + \frac{1}{9}x^2(x^2+4)} dx$$

Invoer:  $Y1 = \sqrt{1 + 0.25X^2(X^2 + 4)}$

Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 4$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 10$

Optie: CALC,  $\int f(x) dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)

De lengte van de grafiek is 4,10.

**b**  $1 + \frac{1}{4}x^2(x^2+4) = 1 + \frac{1}{4}x^4 + x^2 = \frac{1}{4}(x^4 + 4x^2 + 4) = (\frac{1}{2}(x^2+2))^2$

De exacte lengte van de grafiek van  $f$  voor  $0 \leq x \leq \sqrt{5}$ :

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{1}{2}(x^2+2) dx = [\frac{1}{6}x^3 + x]_0^{\sqrt{5}} = 1\frac{5}{6}\sqrt{5}.$$



## Pagina 51:

T-6a De afgeleiden:

$$f'(t) = e^t + e^{-t} \cdot -1 = e^t - e^{-t}$$

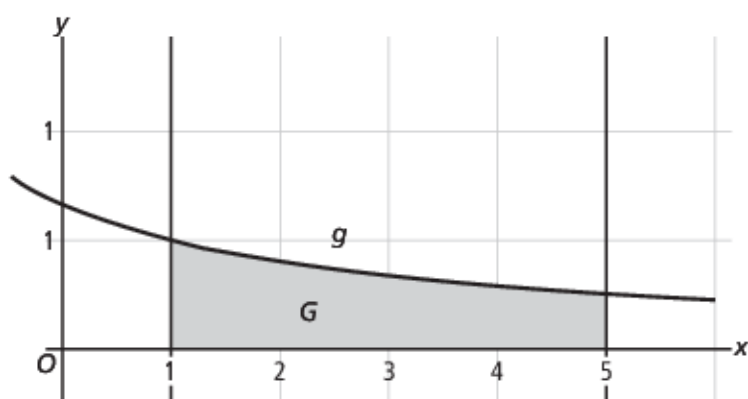
$$g'(t) = -2$$

Kwadraat uitwerken:

$$(f'(t))^2 + (g'(t))^2 = (e^t - e^{-t})^2 + 4 = e^{2t} - 2 + e^{-2t} + 4 = e^{2t} + 2 + e^{-2t} = (e^t + e^{-t})^2.$$

b De exacte lengte van de kromme is:  $\int_0^1 \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2} dx = \int_0^1 (e^t + e^{-t}) dx = [e^t - e^{-t}]_0^1 = e - \frac{1}{e}.$

T-7a



b  $\int_1^5 \pi \left( \frac{4}{x+3} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^5 16(x+3)^{-2} dx = \pi \cdot [-16(x+3)^{-1}]_1^5 = \pi \cdot (-2 - (-4)) = 2\pi$

c Functie  $g$  snijdt de lijn  $x = 1$  in punt  $(1, 1)$  en de lijn  $x = 5$  in punt  $(5, \frac{1}{2})$ .

De inverse functie  $h$  van  $g$  is  $h(x) = \frac{4}{x} - 3$ .

De exacte inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je  $G$  wentelt om de  $y$ -as is

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \pi \cdot 5^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \pi \cdot \left( \frac{4}{x} - 3 \right)^2 dx - \int_0^1 \pi \cdot 1^2 dx =$$

$$\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} 25 dx + \pi \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 (16x^{-2} - 24x^{-1} + 9) dx - \pi \cdot \int_0^1 1 dx =$$

$$\pi \cdot [25x]_0^{\frac{1}{2}} + \pi \cdot [-16x^{-1} - 24\ln|x| + 9x]_{\frac{1}{2}}^1 - \pi \cdot [x]_0^1 =$$

$$12\frac{1}{2}\pi + \pi \cdot (-7 - (-32 + 24\ln(2) + 4\frac{1}{2})) - \pi = (32 - 24\ln(2))\pi$$

T-8a De vergelijking van de horizontale lijn door B is  $y = e^{a+1}$ .De oppervlakte van het (van  $a$  afhankelijke) gebied is gelijk aan

$$\int_a^{a+1} e^{a+1} dx - \int_a^{a+1} e^x dx = [e^{a+1}x]_a^{a+1} - [e^x]_a^{a+1} = (e^{a+1}(a+1) - e^{a+1}a) - (e^{a+1} - e^a) = e^a.$$

De oppervlakte is dus gelijk aan 3 als  $a = \ln(3)$ .b Er geldt  $f'(x) = e^x$ .De lengte van de grafiek van  $f$  tussen A en B is

$$\int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}} dx.$$

Invoer: Y1 =  $\sqrt{1 + e^{2X}}$ 

Venster: Xmin = 0, Xmax = 3, Ymin = 0, Ymax = 10

Optie: CALC,  $\int f(x) dx$  (TI) of G-Solve,  $\int dx$  (Casio)

De lengte van de grafiek tussen A en B is 4,79.

c De inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als de rechthoek OPAQ

wordt gewenteld om de  $x$ -as is gelijk aan  $\int_0^1 \pi e^2 dx = [\pi e^2 x]_0^1 = \pi e^2.$

De inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als het gedeelte onder de

grafiek van  $f$  wordt gewenteld om de  $x$ -as is gelijk aan  $\int_0^1 \pi e^{2x} dx = \left[ \frac{1}{2} \pi e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \pi e^2 - \frac{1}{2} \pi$ .

De inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als het gedeelte boven de grafiek van  $f$  wordt gewenteld om de  $x$ -as blijft over. De inhoud hiervan is dus

$$\pi e^2 - \frac{1}{2} \pi (e^2 - 1) = \frac{1}{2} \pi e^2 + \frac{1}{2} \pi.$$

Het laatste lichaam is qua inhoud dus  $\pi$  groter.

**T-9a** 
$$\int_{-r}^r \pi (f_r(x))^2 dx = \int_{-r}^r \pi (r^2 - x^2) dx$$

**b** 
$$\int_{-r}^r \pi (r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \pi \left( \left( r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) - \left( -r^3 + \frac{1}{3} r^3 \right) \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

# Vaardigheden 1

Pagina 54:

**1a**  $4x - x^2 = x^3 - 4x^2$

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 3x^2 - 4) = 0$$

$$x(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4 \text{ of } x = -1$$

- b** Uit de getekende grafieken en uit het antwoord van opdracht a is af te leiden  $f(x) \leq g(x)$  voor  $-1 \leq x \leq 0$  of  $x \geq 4$ .

**c**  $4x - x^2 = -45$

$$x^2 - 4x - 45 = 0$$

$$(x - 9)(x + 5) = 0$$

$$x = 9 \text{ of } x = -5$$

De grafiek van  $f$  is een bergparabool. Hieruit volgt het antwoord  $x < -5$  of  $x > 9$ .

**2a**  $2x - 4 = 2 - \sqrt{x}$

$$2x - 6 = -\sqrt{x}$$

$$(2x - 6)^2 = x$$

$$4x^2 - 24x + 36 = x$$

$$4x^2 - 25x + 36 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36}}{2 \cdot 4}$$

$$x = 2\frac{1}{4} \text{ of } x = 4$$

Alleen  $x = 2\frac{1}{4}$  voldoet.

Het domein is  $x \geq 0$ .

Uit de plot en het snijpunt volgt dat  $2x - 4 \leq 2 - \sqrt{x}$  als  $0 \leq x \leq 2\frac{1}{4}$ .

**b**  $\frac{18x}{3x-1} = x$

$$18x = x(3x - 1)$$

$$18x = 3x^2 - x$$

$$3x^2 - 19x = 0$$

$$x(3x - 19) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$$

Beide oplossingen voldoen.

Alleen  $x = \frac{1}{3}$  hoort niet tot het domein.

Uit de plot en de snijpunten volgt dat  $\frac{18x}{3x-1} \geq x$  als  $x \leq 0$  of  $\frac{1}{3} < x \leq 6\frac{1}{3}$ .

- c** Deel 1

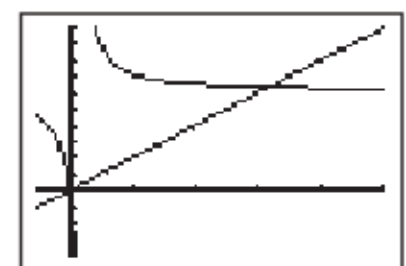
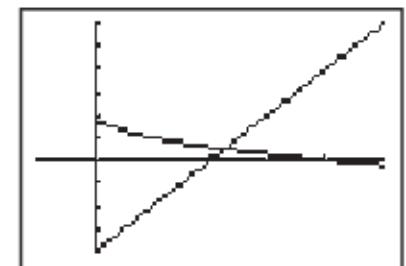
$$x^2 - 6x - 7 = -2x + 14$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(x - 7)(x + 3) = 0$$

$$x = 7 \text{ of } x = -3$$

Beide oplossingen voldoen.



## Deel 2

$$x^2 - 6x - 7 = -(-2x + 14)$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x - 7)(x - 1) = 0$$

$$x = 7 \text{ of } x = 1$$

De volledige oplossing van de vergelijking is  $x = -3$  of  $x = 1$  of  $x = 7$ .

Uit de plot en de snijpunten volgt dat  $|x^2 - 6x - 7| < |-2x + 14|$  als  $-3 < x < 1$ .

**d**  $2^{3-x^2} = \frac{1}{8}$   
 $2^{3-x^2} = 2^{-3}$

$$3 - x^2 = -3$$

$$x^2 = 6$$

$$x = -\sqrt{6} \text{ of } x = \sqrt{6}$$

Uit de plot en de snijpunten volgt dat  $2^{3-x^2} > \frac{1}{8}$

als  $-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$ .

**e**  $\frac{2x+2}{x^2+2} = \frac{1}{x+1}$

$$(2x+2)(x+1) = x^2+2$$

$$2x^2+4x+2 = x^2+2$$

$$x^2+4x = 0$$

$$x(x+4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -4$$

Beide oplossingen voldoen.

Alleen  $x = -1$  hoort niet tot het domein.

Uit de plot en de snijpunten volgt dat  $\frac{2x+2}{x^2+2} \leq \frac{1}{x+1}$  als  $x \leq -4$  of  $-1 < x \leq 0$ .

**f**  $8 - \sqrt{2 + \frac{1}{4}x^2} = 5x + 1\frac{1}{2}$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{4}x^2} = 6\frac{1}{2} - 5x$$

$$2 + \frac{1}{4}x^2 = (6\frac{1}{2} - 5x)^2$$

$$2 + \frac{1}{4}x^2 = 25x^2 - 65x + 42\frac{1}{4}$$

$$24\frac{3}{4}x^2 - 65x + 40\frac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{65 \pm \sqrt{(-65)^2 - 4 \cdot 24\frac{3}{4} \cdot 40\frac{1}{4}}}{2 \cdot 24\frac{3}{4}}$$

$$x_1 = 1 \text{ en } x_2 = 1\frac{62}{99}$$

Alleen  $x = 1$  voldoet.

Uit de plot en het snijpunt volgt dat  $8 - \sqrt{2 + \frac{1}{4}x^2} \geq 5x + 1\frac{1}{2}$  als  $x \leq 1$ .

## Pagina 55:

**3a** Invoer:  $Y1 = 10 - 0.4 \cdot 6^{(2-X)}$  en  $Y2 = X\sqrt{X+1}$

Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 6$ ,  $Y_{\min} = -5$ ,  $Y_{\max} = 12$

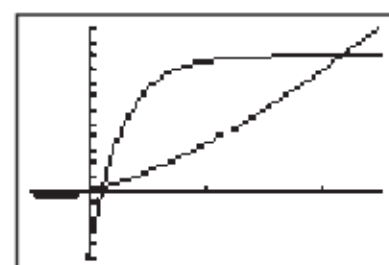
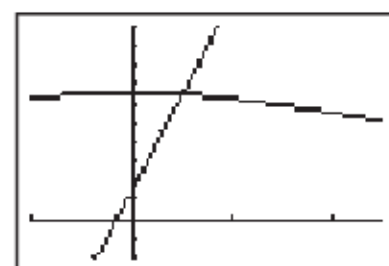
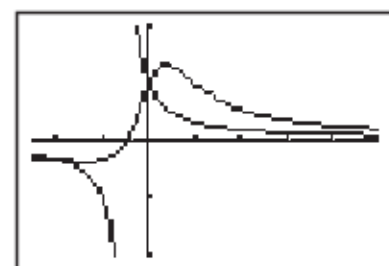
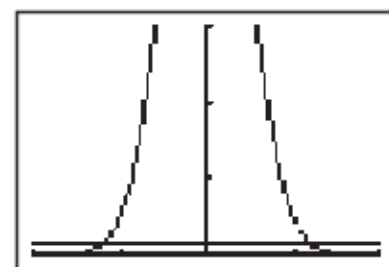
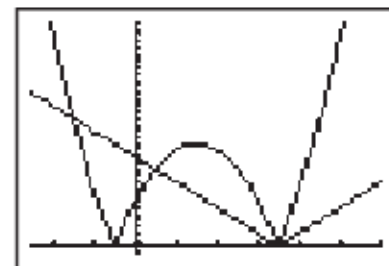
Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solv, ISCT (Casio)

De oplossing is  $x \approx 0,22$  of  $x \approx 4,33$ .

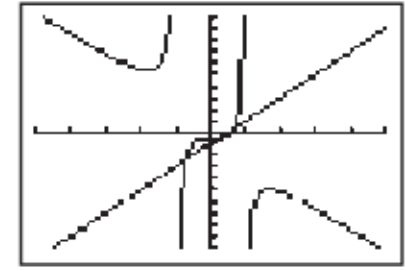
Het domein is  $x \geq -1$ .

Uit de plot en de snijpunten volgt dat

$$10 - 0,4 \cdot 6^{2-x} < x\sqrt{x+1} \text{ als } -1 \leq x < 0,22 \text{ of } x > 4,33.$$



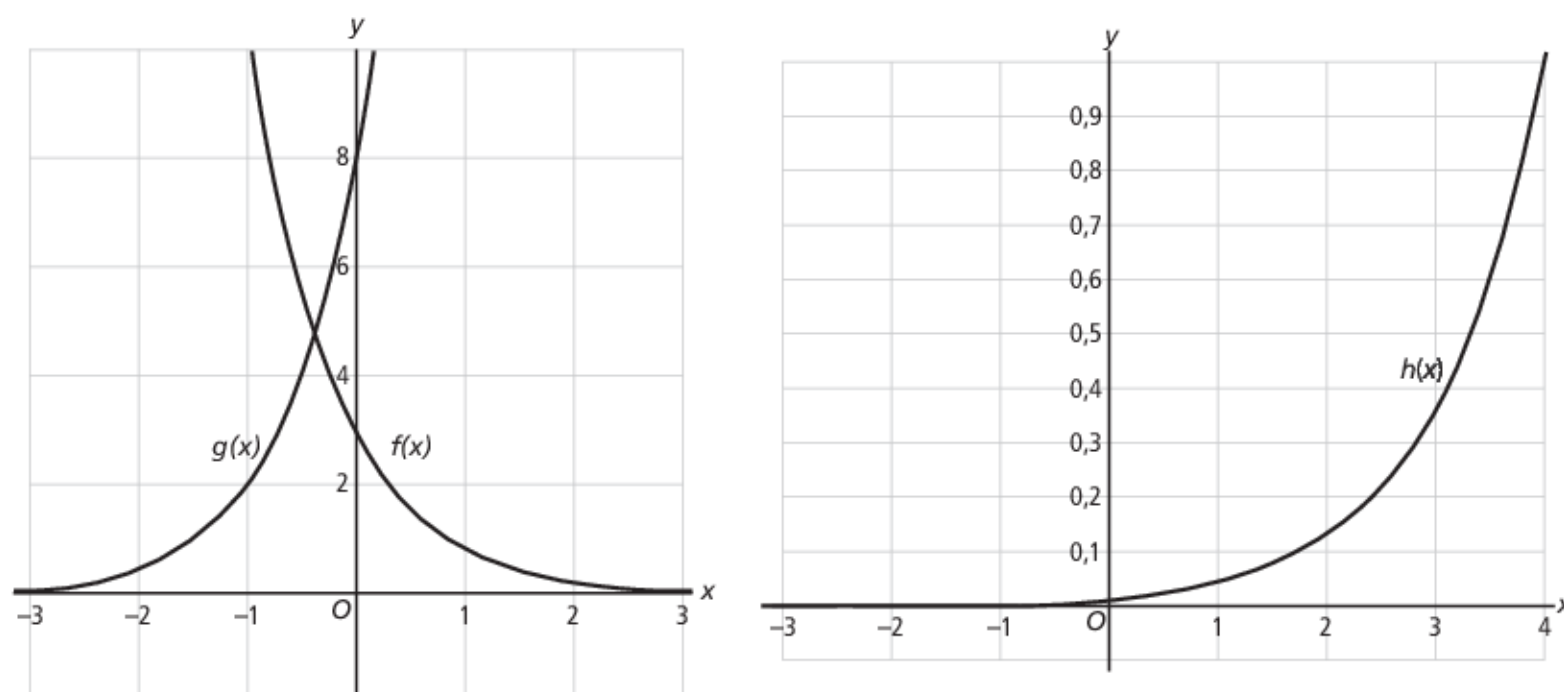
- b** Invoer:  $Y1 = (X^3 - 2)/(4 - X^2)$  en  $Y2 = X - 1$   
 Venster:  $X_{\min} = -10$ ,  $X_{\max} = 10$ ,  $Y_{\min} = -10$ ,  $Y_{\max} = 10$   
 Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solv, ISCT (Casio)  
 De oplossing is  $x \approx -1,41$  of  $x \approx 0,5$  of  $x \approx 1,41$ .  
 Het domein is  $\langle -\infty, -2 \rangle$ ,  $\langle -2, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, \infty \rangle$ .  
 Uit de plot en de snijpunten volgt dat  $\frac{x^3 - 2}{4 - x^2} > x - 1$  als  
 $x < -2$  of  $-1,41 < x < 0,5$  of  $1,41 < x < 2$ .



- 4a**  $9 - x^2 \geq 0$  geldt voor  $x^2 \leq 9$ , dus voor  $-3 \leq x \leq 3$ .  
 $6 - x \geq 0$  geldt voor  $x \leq 6$   
 Aan beide voorwaarden moet worden voldaan, dus het domein is  $-3 \leq x \leq 3$ .
- b** De waarde onder de wortel moet groter dan of gelijk aan nul zijn en de noemer van de breuk mag niet nul zijn, dus er moet gelden  $x^4 + x^2 > 0$ .  
 Dit geldt voor alle waarden ongelijk aan nul, dus het domein is  $x < 0$  of  $x > 0$ .
- c** De waarde onder de wortel moet groter dan of gelijk aan nul zijn en de noemer van de breuk mag niet nul zijn, dus moet gelden  $x + 4 \geq 0$ , dus  $x \geq -4$ .  
 Verder moet er gelden  $15 - 5\sqrt{x+4} \neq 0$ .  
 $\sqrt{x+4} \neq 3$   
 $x + 4 \neq 9$   
 $x \neq 5$   
 Het domein is  $-4 \leq x < 5$  of  $x > 5$ .
- d** Er moet gelden  $\frac{3x+17}{x^2+7} - 1 > 0$  en de noemer van de breuk mag niet nul zijn.  
 De noemer van de breuk is door het kwadraat altijd groter dan nul, dus dit levert geen beperkingen voor het domein.  
 $\frac{3x+17}{x^2+7} - 1 = 0$   
 $\frac{3x+17}{x^2+7} = 1$   
 $3x+17 = x^2+7$   
 $x^2 - 3x - 10 = 0$   
 $(x-5)(x+2) = 0$   
 $x = 5$  of  $x = -2$   
 Uit een plot en de snijpunten volgt dat  $\frac{3x+17}{x^2+7} - 1 > 0$  als  $-2 < x < 5$ .

- 5a**  $f_3(x) = (x^5 + 3x - 2)^3$   
 $f'_3(x) = 3(x^5 + 3x - 2)^2 \cdot (5x^4 + 3)$   
 De factoren 3 en  $(5x^4 + 3)$  zijn altijd positief.  
 $(x^5 + 3x - 2)^2$  is nul of groter dan nul, dus de afgeleide van  $f_3$  is nul of groter dan nul.  
 Conclusie: de grafiek van  $f_3$  is overal stijgend.
- b**  $f'_p(x) = p(x^5 + 3x - 2)^{p-1} \cdot (5x^4 + 3)$   
 $f'_p(2) = p(2^5 + 3 \cdot 2 - 2)^{p-1} \cdot (5 \cdot 2^4 + 3) = 83p \cdot 36^{p-1}$   
 Uit een tabel van  $Y1 = 83X \cdot 36^{(X-1)}$  volgt dat voor  $p \geq 4$  de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt met  $x$ -coördinaat 2 groter is dan één miljoen.

6a



- b Invoer:  $Y1 = 3 \cdot (2/7)^X$  en  $Y2 = 1/100$   
 Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 10$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 2/100$   
 Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solv, ISCT (Casio)  
 De oplossing is  $x \approx 4,55$ .  
 Uit de grafiek is af te lezen dat  $f(x) < \frac{1}{100}$  als  $x > 4,55$ .

- c  $g(x) = 64$   
 $8 \cdot 4^x = 64$   
 $4^x = 8$   
 $(2)^{2x} = 2^3$   
 $2x = 3$   
 $x = 1,5$

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 \\ e^{x-4} &= 1 \\ \ln(e^{x-4}) &= \ln(1) \\ x-4 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

- 7  $f(x) = 6 - 3 \cdot (0,43)^x$  heeft een horizontale asymptoot voor  $y = 6$ .  
 De grafiek van  $(0,43)^x$  is dalend, dus de grafiek van  $f(x)$  is stijgend.  
 Het bereik van  $f(x)$  is  $\langle \leftarrow, 6 \rangle$ .

$g(x) = 2 + 5 \cdot 1,4^{-x}$  heeft een horizontale asymptoot voor  $y = 2$ .  
 De grafiek van  $1,4^x$  is stijgend, dus de grafiek  $1,4^{-x}$  is dalend.  
 De grafiek van  $g(x)$  is dus ook dalend.  
 Het bereik van  $g(x)$  is  $\langle 2, \rightarrow \rangle$ .

8a  $8^{2t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$   
 $8^{2t} = \frac{1}{2^{1\frac{1}{2}}}$   
 $(2^3)^{2t} = 2^{-1\frac{1}{2}}$   
 $2^{6t} = 2^{-1\frac{1}{2}}$   
 $6t = -1\frac{1}{2}$   
 $t = -\frac{1}{4}$

b  $\sqrt[3]{5^{3t-2}} = \frac{1}{5} \cdot 125^{-t}$   
 $(5^{3t-2}) = 5^{-1} \cdot (5^3)^{-t}$   
 $5^{t-\frac{2}{3}} = 5^{-3t-1}$   
 $t - \frac{2}{3} = -3t - 1$   
 $4t = -\frac{1}{3}$   
 $t = -\frac{1}{12}$



## Pagina 56:

- 9a**  $6 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{3-t} = 2\sqrt{3}$   
 $3 \cdot (3^{-2})^{3-t} = \sqrt{3}$   
 $3 \cdot 3^{2t-6} = 3^{\frac{1}{2}}$   
 $3^{2t-5} = 3^{\frac{1}{2}}$   
 $2t-5 = \frac{1}{2}$   
 $2t = 5\frac{1}{2}$   
 $t = 2\frac{3}{4}$
- b**  $4 - 8^{0,2t+3} = 0$   
 $8^{0,2t+3} = 4$   
 $(2^3)^{0,2t+3} = 2^2$   
 $2^{0,6t+9} = 2^2$   
 $0,6t+9 = 2$   
 $0,6t = -7$   
 $t = -11\frac{2}{3}$
- 10a**  $26 - \frac{3}{11} \cdot 6^{x+7} = 5$   
 $\frac{3}{11} \cdot 6^{x+7} = 21$   
 $6^{x+7} = 77$   
 $x+7 = {}^6\log(77)$   
 $x = {}^6\log(77) - 7$
- b**  $\frac{-3}{7^{0,5x}} + 2 = -1$   
 $\frac{-3}{7^{0,5x}} = -3$   
 $7^{0,5x} = 1$   
 $0,5x = 0$   
 $x = 0$
- c**  $30 - 7 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{t^2-3} = -5$   
 $7 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{t^2-3} = 35$   
 $(5^{-\frac{1}{2}})^{t^2-3} = 5$   
 $5^{-\frac{1}{2}t^2+1\frac{1}{2}} = 5^1$   
 $-\frac{1}{2}t^2 + 1\frac{1}{2} = 1$   
 $t^2 = 1$   
 $t = -1$  of  $t = 1$
- d**  $e^{2-5x} = \sqrt{\frac{1}{e^x}}$   
 $e^{2-5x} = (e^{-x})^{\frac{1}{2}}$   
 $e^{2-5x} = e^{-\frac{1}{2}x}$   
 $2-5x = -\frac{1}{2}x$   
 $4\frac{1}{2}x = 2$   
 $x = \frac{4}{9}$
- c**  $e^{9-4x} - \sqrt{e^x} = 0$   
 $e^{9-4x} = e^{\frac{1}{2}x}$   
 $9-4x = \frac{1}{2}x$   
 $4\frac{1}{2}x = 9$   
 $x = 2$
- d**  $\frac{1}{e^x} - \frac{4}{e^{2x}} = 0$   
 $\frac{1}{e^x} = \frac{4}{e^{2x}}$   
 $1 \cdot e^{2x} = 4 \cdot e^x$   
 $e^x = 4$   
 $x = \ln(4)$
- 11a** Voor grote waarden van  $x$  nadert de grafiek van  $f(x)$  de waarde 14, dus de horizontale asymptoot is  $y = 14$ .  
 Er is geen verticale asymptoot.
- b** De noemer is nul als  $3e^x = 5$ . Dat is het geval voor  $x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ , dus de verticale asymptoot is  $x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ .  
 Voor grote waarden van  $x$  nadert de grafiek van  $g(x)$  naar  $\frac{7}{3}$ , dus een horizontale asymptoot is  $y = \frac{7}{3}$ .  
 Voor kleine waarden van  $x$  naderen de waarden van  $7e^x$  en  $3e^x$  beide naar nul.  
 De grafiek nadert dan naar  $-\frac{1}{5}$ , dus een horizontale asymptoot is ook  $y = -\frac{1}{5}$ .
- c** Voor kleine waarden van  $x$  nadert  $e^{6x-5}$  naar nul. Dan nadert  $h(x)$  naar  $\sqrt{4} = 2$ , dus de horizontale asymptoot is  $y = 2$ .  
 Er is geen verticale asymptoot.
- d** Voor kleine waarden van  $x$  naderen de machten van  $e$  beide naar nul.  
 De grafiek nadert naar  $4 \cdot -10 = -40$ , dus de horizontale asymptoot is  $y = -40$ .  
 Er is geen verticale asymptoot.

- 12a**  $x - 2 > 0$ , dus het domein van  $f(x)$  is  $\langle 2, \rightarrow \rangle$ .

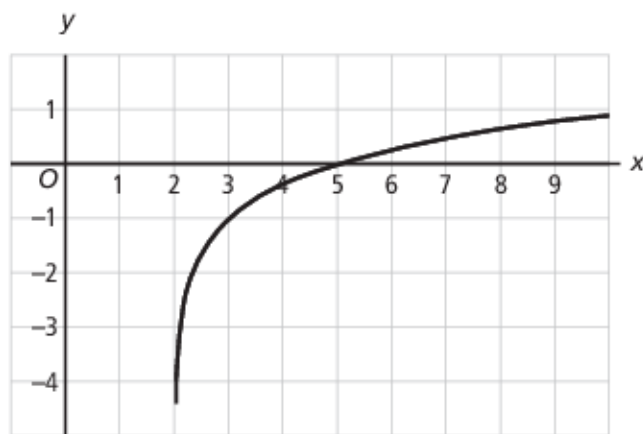
$${}^3\log(x - 2) - 1 = 0$$

$${}^3\log(x - 2) = 1$$

$$x - 2 = 3$$

$x = 5$ , dus het nulpunt is  $x = 5$ .

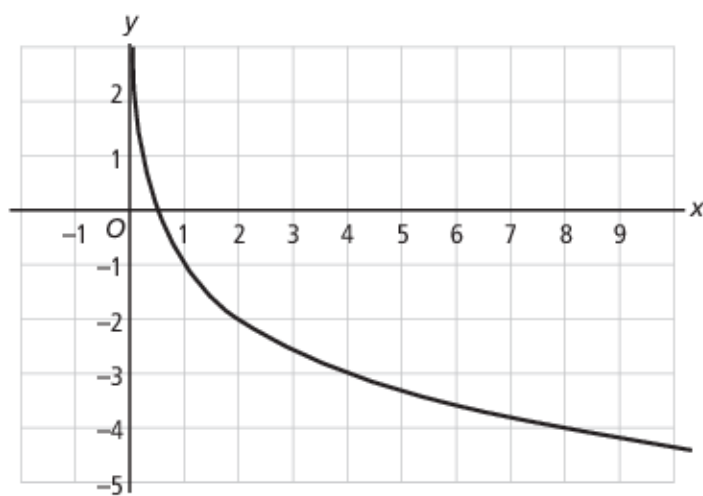
**b**



- c**  $2x > 0$ , dus het domein van  $g(x)$  is  $\langle 0, \rightarrow \rangle$ .

$$\frac{1}{2}\log(2x) = 0$$

$$2x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1, \text{ dus het nulpunt is } x = \frac{1}{2}.$$



- d**  $\frac{1}{3}\log(2x) = 8$

$$2x = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$$

**Pagina 57:**

- 13a**  $\frac{1}{3}\log(4x + 2) - \frac{1}{3}\log(2 - 6x) = -1$

$$\frac{1}{3}\log\left(\frac{4x + 2}{2 - 6x}\right) = -1$$

$$\frac{4x + 2}{2 - 6x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

$$4x + 2 = 3(2 - 6x)$$

$$4x + 2 = 6 - 18x$$

$$22x = 4$$

$$x = \frac{2}{11}$$

- b**  $(\ln(x) - 2)(\ln(x) + 4) = 16$

Stel  $\ln(x) = y$ .

$$(y - 2)(y + 4) = 16$$

$$y^2 + 2y - 24 = 0$$

$$(y + 6)(y - 4) = 0$$

$$y = -6 \text{ of } y = 4$$

$$\ln(x) = -6 \text{ of } \ln(x) = 4$$

$$x = e^{-6} \text{ of } x = e^4$$

- c**  $\frac{{}^2\log(2x + 12) - 1}{{}^2\log(x)} = 2$
- $${}^2\log(2x + 12) - 1 = 2 \cdot {}^2\log(x)$$
- $${}^2\log(2x + 12) - {}^2\log(2) = {}^2\log(x^2)$$
- $${}^2\log(x + 6) = {}^2\log(x^2)$$
- $$x^2 = x + 6$$
- $$x^2 - x - 6 = 0$$
- $$(x - 3)(x + 2) = 0$$
- $$x = 3 \text{ of } x = -2$$
- $x = -2$  voldoet niet
- $x = 3$  voldoet wel

$$d \quad 3 - 2 \cdot \ln(4x + 8) = 5$$

$$2 \cdot \ln(4x + 8) = -2$$

$$\ln(4x + 8) = -1$$

$$4x + 8 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$4x = \frac{1}{e} - 8$$

$$x = \frac{1}{4e} - 2$$

$$e \quad 2 \cdot \ln^2(x) - 3 \cdot \ln(x) = -1$$

$$\text{Stel } \ln(x) = y.$$

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$y = 1 \text{ of } y = \frac{1}{2}$$

$$\ln(x) = 1 \text{ of } \ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = e \text{ of } x = \sqrt{e}$$

$$f \quad 2 \cdot \ln(\ln(x)) = 3$$

$$\ln(\ln(x)) = 1\frac{1}{2}$$

$$\ln(x) = e^{1\frac{1}{2}} = e\sqrt{e}$$

$$x = e^{e\sqrt{e}}$$

**14a** Er moet voldaan worden aan twee voorwaarden.

De eerste voorwaarde is  $2x + 4 > 0$ , dus  $x > -2$ .

De tweede voorwaarde is  $5 - 4x > 0$ , dus  $x < 1\frac{1}{4}$ .

Uit de twee voorwaarden volgt het domein  $-2 < x < 1\frac{1}{4}$ .

$$b \quad f(x) = {}^2\log(2x + 4) + {}^2\log(5 - 4x) - {}^2\log(4)$$

$$f(x) = {}^2\log\left(\frac{(2x + 4)(5 - 4x)}{4}\right) = {}^2\log\left(\frac{20 - 6x - 8x^2}{4}\right) = {}^2\log(5 - 1\frac{1}{2}x - 2x^2)$$

$$15a \quad f(x) = 6e^2 - 2e^{8x-19}$$

$$f'(x) = -2e^{8x-19} \cdot 8 = -16e^{8x-19}$$

$$b \quad g(x) = 3\ln^2(x) - \ln(\ln(x))$$

$$g'(x) = 6 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x} \cdot \ln(x) - \frac{1}{x\ln(x)}$$

$$c \quad h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{3 + 2e^x}$$

$$h'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x}(3 + 2e^{\frac{1}{2}x}) - (e^{2x} - 1)(e^{\frac{1}{2}x})}{(3 + 2e^{\frac{1}{2}x})^2} = \frac{6e^{2x} + 4e^{2\frac{1}{2}x} - e^{2\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x}}{(3 + 2e^{\frac{1}{2}x})^2} = \frac{6e^{2x} + 3e^{2\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x}}{(3 + 2e^{\frac{1}{2}x})^2}$$

$$d \quad k(x) = {}^4\log(x^3 - 3x - 3)$$

$$k'(x) = \frac{1}{x^3 - 3x - 3} \cdot (3x^2 - 3) \cdot \frac{1}{\ln(4)} = \frac{3x^2 - 3}{(x^3 - 3x - 3)\ln(4)}$$

$$e \quad p(x) = \sqrt{\log(x^2 + 1)} = (\log(x^2 + 1))^{\frac{1}{2}}$$

$$p'(x) = \frac{1}{2}(\log(x^2 + 1))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\ln(10)} = \frac{x}{(x^2 + 1) \cdot \ln(10) \cdot \sqrt{\log(x^2 + 1)}}$$

$$f \quad q(x) = e^{\frac{2x-1}{\sqrt{x}}}$$

$$q'(x) = e^{\frac{2x-1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x} - (2x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = e^{\frac{2x-1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{2x - \frac{1}{2}(2x-1)}{x\sqrt{x}} = e^{\frac{2x-1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{x + \frac{1}{2}}{x\sqrt{x}}$$

$$16a \quad F(x) = -12 \cdot \ln|4x + 7| \cdot \frac{1}{4} + c$$

$$F(x) = -3 \cdot \ln|4x + 7| + c$$

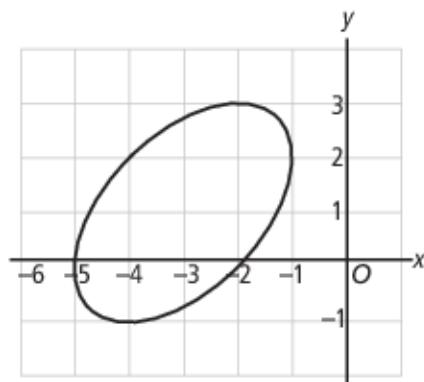
- b  $G(x) = 6e^2 \cdot x - 2e^{8x-19} \cdot \frac{1}{8} + c$   
 $G(x) = 6e^2 \cdot x - \frac{1}{4}e^{8x-19} + c$
- c  $k(x) = 3e^x - 5e^{5x+3} - 12 + 20e^{4x+3}$   
 $K(x) = 3e^x - 5e^{5x+3} \cdot \frac{1}{5} - 12x + 20e^{4x+3} \cdot \frac{1}{4} + c$   
 $K(x) = 3e^x - e^{5x+3} - 12x + 5e^{4x+3} + c$
- d  $H(x) = 6x^2 + 5x - \frac{1}{13}x^{13} + 5 \cdot 12^{5x-12} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\ln(12)} + c$   
 $H(x) = 6x^2 + 5x - \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{\ln(12)} \cdot 12^{5x-12} + c$

## Extra oefening – Basis

Pagina 58:

- B-1a**  $\cos(t - \frac{1}{6}\pi)$  kan waarden van  $-1$  tot en met  $1$  aannemen.  
 $2\cos(t - \frac{1}{6}\pi)$  kan waarden van  $-2$  tot en met  $2$  aannemen.  
 Dus  $x = 2\cos(t - \frac{1}{6}\pi) - 3$  kan waarden van  $-5$  tot en met  $-1$  aannemen.  
 $\sin(t)$  kan waarden van  $-1$  tot en met  $1$  aannemen.  
 $2\sin(t)$  kan waarden van  $-2$  tot  $2$  aannemen.  
 Dus  $y = 2\sin(t) + 1$  kan waarden van  $-1$  tot en met  $3$  aannemen.

b



- c Er moet gelden  $y = 0$ .  
 $2\sin(t) + 1 = 0$   
 $\sin(t) = -\frac{1}{2}$   
 $t = 1\frac{1}{6}\pi$  of  $t = 1\frac{5}{6}\pi$   
 $x = 2\cos(\pi) - 3 = -5$  of  $x = 2\cos(1\frac{2}{3}\pi) - 3 = -2$   
 De snijpunten met de  $x$ -as zijn  $(-5, 0)$  en  $(-2, 0)$ .
- d Er moet gelden  $y = x + 4$ .  
 $2\sin(t) + 1 = 2\cos(t - \frac{1}{6}\pi) - 3 + 4$   
 $\sin(t) = \cos(t - \frac{1}{6}\pi)$   
 $\sin(t) = \sin(\frac{1}{2}\pi - (t - \frac{1}{6}\pi))$   
 $\sin(t) = \sin(\frac{2}{3}\pi - t)$   
 $t = \frac{2}{3}\pi - t + k \cdot 2\pi$  of  $t = \pi - (\frac{2}{3}\pi - t) + k \cdot 2\pi$   
 $2t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $0 = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$  of geen oplossing  
 Op het interval  $[0, 2\pi]$  zijn de oplossingen  $t = \frac{1}{3}\pi$  en  $t = 1\frac{1}{3}\pi$ .  
 Voor  $t = \frac{1}{3}\pi$  is  $x = 2\cos(\frac{1}{6}\pi) - 3 = \sqrt{3} - 3$  en  $y = 2\sin(\frac{1}{3}\pi) + 1 = 1 + \sqrt{3}$ .  
 Voor  $t = 1\frac{1}{3}\pi$  is  $x = 2\cos(1\frac{1}{6}\pi) - 3 = -\sqrt{3} - 3$  en  $y = 2\sin(1\frac{1}{3}\pi) + 1 = 1 - \sqrt{3}$ .  
 Dit geeft de  $(\sqrt{3} - 3, 1 + \sqrt{3})$  en  $(-\sqrt{3} - 3, 1 - \sqrt{3})$ .  
 Afgerond op twee decimalen zijn de snijpunten  $(-1,27; 2,73)$  en  $(-4,73; -0,73)$ .
- e  $\frac{dy}{dt} = 2\cos(t)$  en  $\frac{dx}{dt} = -2\sin(t - \frac{1}{6}\pi)$   
 Een punt van  $K$  heeft een horizontale raaklijn, als  $2\cos(t) = 0$  en  $-2\sin(t - \frac{1}{6}\pi) \neq 0$ .  
 Dit geldt voor  $t = \frac{1}{2}\pi$  en  $t = 1\frac{1}{2}\pi$ .

Voor  $t = \frac{1}{2}\pi$  is  $x = -2$  en  $y = 3$ , dit geeft het punt  $(-2, 3)$ .  
 Voor  $t = 1\frac{1}{2}\pi$  is  $x = -4$  en  $y = -1$ , dit geeft het punt  $(-4, -1)$ .  
 In de punten  $(-2, 3)$  en  $(-4, -1)$  loopt de raaklijn horizontaal.

**B-2a** De periode van  $x = 2 - 5\cos(\pi t)$  is 2.

De periode van  $y = 4\sin(2\pi(t - \frac{1}{3}))$  is 1.

De periode van  $K$  is dan 2.

**b** Er moet gelden  $x = 2$ .

$$2 - 5\cos(\pi t) = 2$$

$$\cos(\pi t) = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ of } t = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{Voor } t = \frac{1}{2} \text{ is } y = 4\sin(2\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})) = 4\sin(\frac{1}{3}\pi) = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Voor } t = 1\frac{1}{2} \text{ is } y = 4\sin(2\pi(1\frac{1}{2} - \frac{1}{3})) = 4\sin(2\frac{1}{3}\pi) = 2\sqrt{3}.$$

Dus de  $y$ -coördinaat is  $2\sqrt{3}$ .

**c** Voor de snijpunten met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .

$$2 - 5\cos(\pi t) = 0$$

$$5\cos(\pi t) = 2$$

$$\cos(\pi t) = 0,4$$

$$\pi t \approx 1,159 \text{ of } \pi t \approx 5,124$$

$$t \approx 0,369 \text{ of } t \approx 1,631$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\cos(2\pi(t - \frac{1}{3})) \cdot 2\pi}{5\sin(\pi t) \cdot \pi} = \frac{8\cos(2\pi(t - \frac{1}{3}))}{5\sin(\pi t)}$$

In het punt met  $t = 0,369$  is de helling ongeveer 1,702.

In het punt met  $t = 1,631$  is de helling ongeveer 0,515.

De helling is dus niet twee keer zo groot.

**B-3a** De waarden van  $x$  lopen van  $-4$  tot en met 4.

De waarden van  $y$  lopen van  $-2$  tot en met 2.

De rechthoek waar alle krommen in passen is 8 breed en 4 hoog.

**b** Er moet gelden  $x = 0$  en  $y = 0$ .

$$x \ 4\cos(t) = 0 \text{ als } t = \frac{1}{2}\pi \text{ of } t = 1\frac{1}{2}\pi$$

$$\text{Invullen geeft } y(\frac{1}{2}\pi) = 2\sin(3(\frac{1}{2}\pi - a)) = 2\sin(1\frac{1}{2}\pi - 3a)$$

$$2\sin(1\frac{1}{2}\pi - 3a) = 0$$

$$1\frac{1}{2}\pi - 3a = k \cdot \pi.$$

$$\text{Voor } k = 0 \text{ geldt } a = \frac{1}{2}\pi.$$

$$\text{Voor } k = 1 \text{ geldt } a = \frac{1}{6}\pi.$$

$$\text{Voor } k = 2 \text{ geldt } a = -\frac{1}{6}\pi.$$

$$\text{Voor } k = 3 \text{ geldt } a = -\frac{1}{2}\pi.$$

$$\text{Voor } k = 4 \text{ geldt } a = -\frac{5}{6}\pi.$$

$$\text{Voor } k = 5 \text{ geldt } a = -1\frac{1}{6}\pi.$$

$t = 1\frac{1}{2}\pi$  geeft dezelfde oplossingen.

Op het interval  $[0, 2\pi]$  zijn de oplossingen

$$a = \frac{1}{6}\pi, a = \frac{1}{2}\pi, a = \frac{5}{6}\pi, a = 1\frac{1}{6}\pi, a = 1\frac{1}{2}\pi \text{ en } a = 1\frac{5}{6}\pi.$$

**B-4a** De periode van de grote wijzer is 1 uur (60 minuten).

De periode van de kleine wijzer is 12 uur (720 minuten).

**b** Voor de grote wijzer geldt:

De amplitude is 8, de periode is 60 minuten, dus  $b = \frac{1}{30}\pi$ .

De wijzer draait in negatieve richting en het startpunt is  $-15$  (minuten).



De parametervoorstelling voor  $G$  is  $\begin{cases} x = 8\cos(\frac{1}{30}\pi(15-t)) \\ y = 8\sin(\frac{1}{30}\pi(15-t)) \end{cases}$ .

Voor de kleine wijzer geldt:

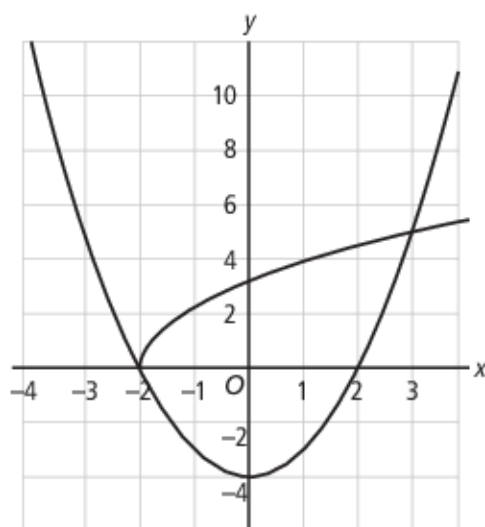
De amplitude is 5, de periode is 720 minuten, dus  $b = \frac{1}{360}\pi$ .

De wijzer draait in negatieve richting en het startpunt is  $-180$  (minuten).

De parametervoorstelling voor  $K$  is  $\begin{cases} x = 5\cos(\frac{1}{360}\pi(180-t)) \\ y = 5\sin(\frac{1}{360}\pi(180-t)) \end{cases}$ .

Pagina 59:

B-5a



b De snijpunten zijn  $(-2, 0)$  en  $(3, 5)$ .

Controle:

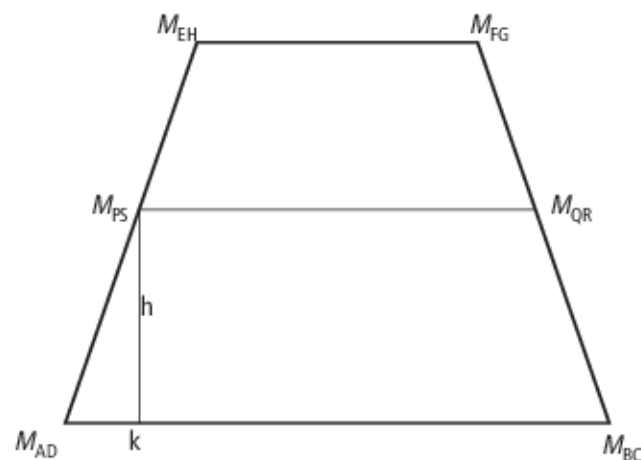
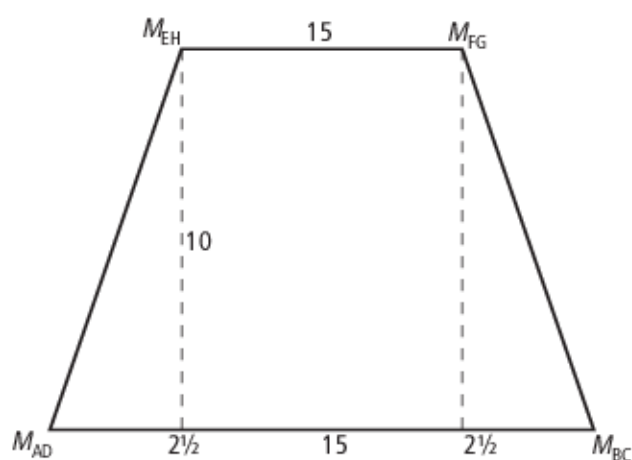
$f(-2) = 2^2 - 4 = 0$  en  $g(-2) = \sqrt{5 \cdot (-2) + 10} = 0$ , dus  $(-2, 0)$  klopt.

$f(3) = 3^2 - 4 = 5$  en  $g(3) = \sqrt{5 \cdot 3 + 10} = 5$ , dus ook  $(3, 5)$  klopt.

c 
$$\int_{-2}^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2}^3 (\sqrt{5x+10} - x^2 + 4) dx = \left[ \frac{2}{15}(5x+10)^{1.5} - \frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^3 = 25$$

De ingesloten oppervlakte is 25.

B-6a Teken de doorsnede door de middens van  $AD$ ,  $BC$ ,  $GF$  en  $EH$ .



De afmetingen van de horizontale lijnstukken van de doorsnede zijn gelijk aan de afmetingen van de horizontale lijnstukken in de tekening.

$M_{AD}$  staat voor het midden van lijnstuk  $AD$ . Op deze manier zijn ook de andere middens gedefinieerd.

Met behulp van gelijkvormigheid van driehoeken volgt  $\frac{10}{2,5} = \frac{h}{M_{AD}K}$ , dus  $M_{AD}K = \frac{1}{4}h$ .

Ook aan de rechterkant zit een stukje  $\frac{1}{4}h$ .

Hieruit volgt  $PQ = M_{PS}M_{QR} = 20 - 2 \cdot \frac{1}{4}h = 20 - \frac{1}{2}h$ .

b  $PQRS$  is een vierkant, dus de oppervlakte is  $O = (20 - \frac{1}{2}h)^2 = \frac{1}{4}h^2 - 20h + 400$ .



- c De inhoud van de afgeknotte piramide is

$$I = \int_0^{10} (\frac{1}{4}h^2 - 20h + 400)dh = [\frac{1}{12}h^3 - 10h^2 + 400h]_0^{10} = 3083\frac{1}{3}$$

**B-7a**  $4\sqrt{x} - x = 0$   
 $\sqrt{x}(4 - \sqrt{x}) = 0$   
 $\sqrt{x} = 0$  of  $\sqrt{x} = 4$   
 $x = 0$  of  $x = 16$

De grafiek snijdt de  $x$ -as in de punten  $(0, 0)$  en  $(16, 0)$ .

De ingesloten oppervlakte is  $O = \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x)dx = [2\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2]_0^{16} = 42\frac{2}{3}$ .

**b**  $I = \int_0^{16} \pi(4\sqrt{x} - x)^2 dx = \int_0^{16} \pi(16x - 8x\sqrt{x} + x^2)dx = [\pi(8x^2 - 3\frac{1}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3)]_0^{16} = 136\frac{8}{15}\pi$

- B-8** De inverse functie van  $f$  is  $g(x) = \ln(5 - x^2)$ .

$$\ln(5 - x^2) = 0$$

$$5 - x^2 = 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ of } x = -2$$

Het snijpunt met de  $x$ -as van  $g(x)$  is  $(2, 0)$ .

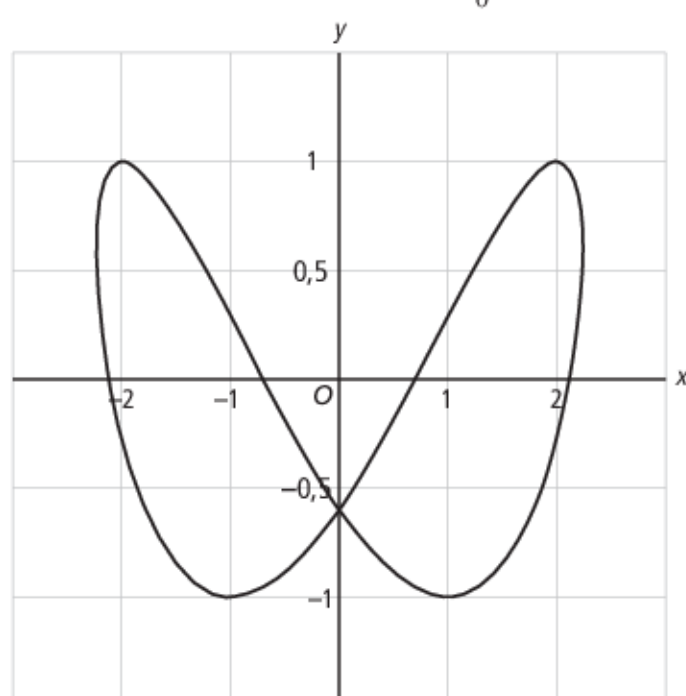
De gevraagde oppervlakte is  $\int_0^2 \pi \cdot (\ln(5 - x^2))^2 dx \approx 10,53$ .

- B-9** De snijpunten met de assen zijn  $(0, 2)$  en  $(\ln 5, 0)$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5 - e^x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -e^x = \frac{-e^x}{2\sqrt{5 - e^x}}$$

De lengte van het lijnstuk is  $\int_0^{\ln 5} \sqrt{1 + \left(\frac{-e^x}{2\sqrt{5 - e^x}}\right)^2} dx = \int_0^{\ln 5} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{2x}}{4(5 - e^x)}\right)} dx \approx 2,80$ .

**B-10a**



**b**  $\frac{dx}{dt} = -2\sin(t) + \cos(t)$

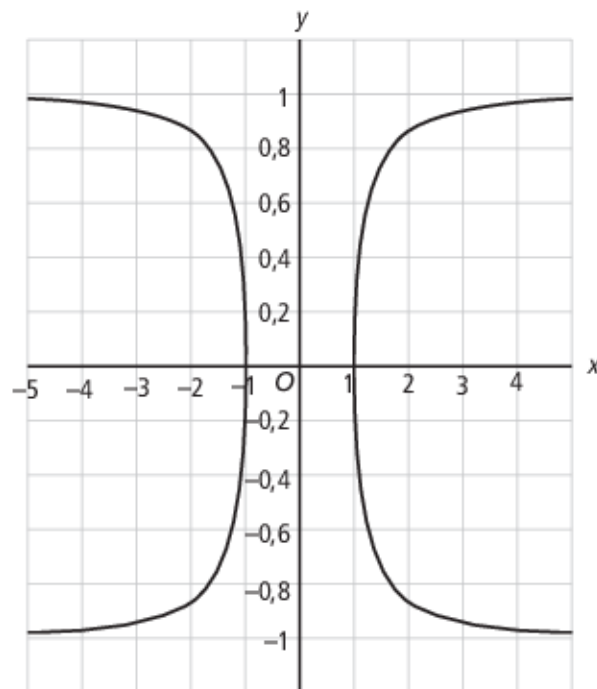
$$\frac{dy}{dt} = -2\sin(2t)$$

$$L = \int_0^{2\pi} ((-2\sin t + \cos t)^2 + (-2\sin(2t))^2) dt = 9\pi \approx 28,27$$

## Extra oefening – Gemengd

Pagina 60:

G-1a



- b Als  $t$  nadert naar  $\frac{1}{2}\pi$ , nadert  $\cos(t)$  naar 0, dus  $x$  wordt heel groot.  
 Dan nadert  $y = \sin(t)$  naar 1, dus er is een horizontale asymptoot  $y = 1$ .  
 Als  $t$  nadert naar  $1\frac{1}{2}\pi$ , nadert  $\cos(t)$  ook naar 0, dus  $x$  wordt heel groot.  
 Dan nadert  $y = \sin(t)$  naar  $-1$ , dus er is een horizontale asymptoot  $y = -1$ .
- c Er moet gelden  $x = 2$ .

$$\frac{1}{\cos(t)} = 2$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{3}\pi \text{ of } t = 1\frac{2}{3}\pi$$

$$y\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } y\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

De coördinaten zijn  $A(2, \frac{1}{2}\sqrt{3})$  en  $B(2, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ .

De lengte van lijnstuk  $AB$  is  $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$ .

- G-2a  $\cos(t) = \cos(2\pi - t)$ , dus voor  $t$  en  $2\pi - t$  zijn de waarden voor  $x$  hetzelfde.  
 $\sin(2\pi - t) = -\sin(t)$ , dus voor  $t$  en  $2\pi - t$  zijn de waarden voor  $y$  tegengesteld.  
 Bij  $t$  en  $2\pi - t$  horen dus gelijke waarden voor  $x$ , maar tegengestelde waarden voor  $y$ , dus de  $x$ -as is de symmetrieas van de parametervoorstelling.

b  $x = \cos(t) \cdot (1 - \cos(t))$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin(t) \cdot (1 - \cos(t)) + \cos(t) \cdot \sin(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin(t) + 2\cos(t) \cdot \sin(t) = \sin(t) \cdot (-1 + 2\cos(t))$$

$$y = \sin(t) \cdot (1 - \cos(t))$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t) \cdot (1 - \cos(t)) + \sin(t) \cdot \sin(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t) - \cos^2(t) + \sin^2(t)$$

De raaklijn is evenwijdig aan de  $y$ -as als  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $\frac{dy}{dt} \neq 0$ .

$$\sin(t) \cdot (-1 + 2\cos(t)) = 0 \text{ en } \cos(t) - \cos^2(t) + \sin^2(t) \neq 0$$

$$\sin(t) = 0 \text{ of } \cos(t) = \frac{1}{2}$$

$$t = 0 \text{ of } t = \pi \text{ of } t = \frac{1}{3}\pi \text{ of } t = 1\frac{2}{3}\pi$$

Bij  $t = 0$  geldt  $\frac{dy}{dt} = 0$ , dus dit geeft geen oplossing.

Bij  $t = \pi$  hoort het punt  $(-2, 0)$ .

Bij  $t = \frac{1}{3}\pi$  hoort het punt  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$ .

Bij  $t = 1\frac{2}{3}\pi$  hoort het punt  $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\sqrt{3})$ .

In de punten  $(-2, 0)$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$  en  $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\sqrt{3})$  loopt de raaklijn evenwijdig aan de y-as.

c Bij het punt  $(0, 0)$  hoort  $t = 0$  (of  $2\pi$ ).

Een benadering naar de bovenkant is  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{y(0,001) - y(0)}{0,001}}{\frac{x(0,001) - x(0)}{0,001}} \approx \frac{0,0000005}{0,0005} = 0,001$ .

Een benadering aan de onderkant is  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{y(2\pi) - y(2\pi - 0,001)}{0,001}}{\frac{x(2\pi) - x(2\pi - 0,001)}{0,001}} \approx \frac{0,0000005}{-0,0005} = -0,001$ .

Beide benaderingen duiden erop dat de helling in  $(0, 0)$  naar 0 nadert.

**G-3a** Voor een punt op de y-as geldt  $x = 0$ .

$$2\cos(t + \frac{1}{3}\pi) = 0$$

$$t + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi \quad \text{of} \quad t + \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{2}\pi.$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \quad \text{of} \quad t = 1\frac{1}{6}\pi$$

Voor  $a = 2$  geldt dan:

$$y(\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{of} \quad y(1\frac{1}{6}\pi) = \sin(2\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

De y-coördinaat van het punt A is  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

b Er moet nog steeds gelden  $x = 0$ , dus  $t = \frac{1}{6}\pi$  of  $t = 1\frac{1}{6}\pi$ .

Er moet ook gelden  $\sin(at) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  ofwel  $\sin(at) = \sin(\frac{1}{3}\pi)$

Voor  $t = \frac{1}{6}\pi$  geldt:

$$\sin(\frac{1}{6}\pi \cdot a) = \sin(\frac{1}{3}\pi)$$

$$a \cdot \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad a \cdot \frac{1}{6}\pi = \pi - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{6}a = \frac{1}{3} + k \cdot 2 \quad \text{of} \quad a \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + k \cdot 2$$

$$a = 2 + k \cdot 12 \quad \text{of} \quad a = 4 + k \cdot 12$$

Voor  $t = 1\frac{1}{6}\pi$  geldt:

$$\sin(1\frac{1}{6}\pi \cdot a) = \sin(\frac{1}{3}\pi)$$

$$a \cdot 1\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad a \cdot 1\frac{1}{6}\pi = \pi - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$1\frac{1}{6}a = \frac{1}{3} + k \cdot 2 \quad \text{of} \quad a \cdot 1\frac{1}{6} = \frac{2}{3} + k \cdot 2$$

$$a = \frac{2}{7} + k \cdot 1\frac{5}{7} \quad \text{of} \quad a = \frac{4}{7} + k \cdot 1\frac{5}{7}$$

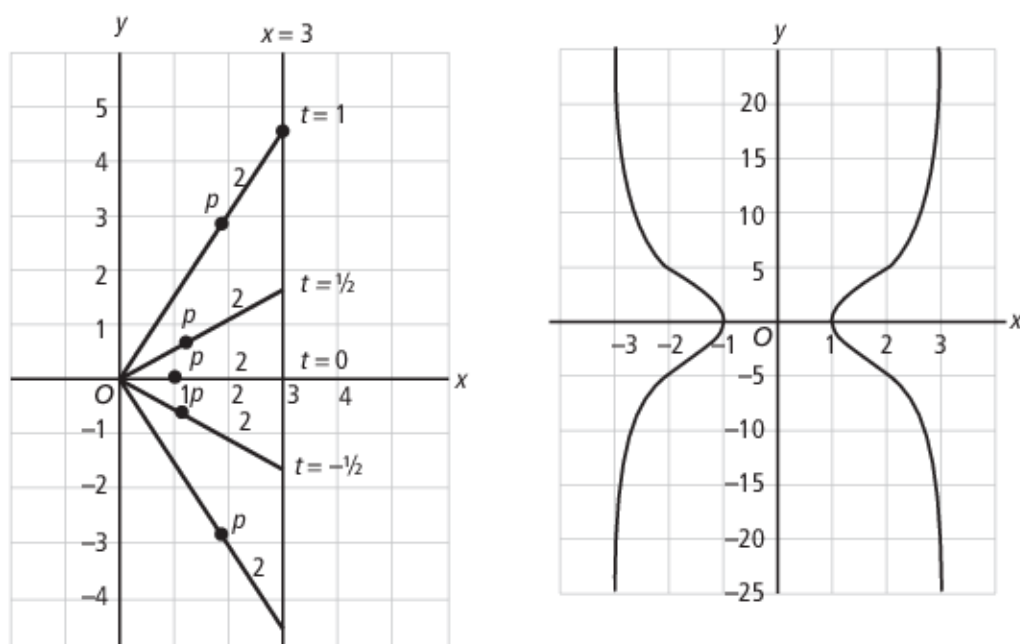
De totale oplossing is  $a = 2 + k \cdot 12$  of  $a = 4 + k \cdot 12$  of  $a = \frac{2}{7} + k \cdot 1\frac{5}{7}$  of  $a = \frac{4}{7} + k \cdot 1\frac{5}{7}$

c  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \cos(at)}{-2 \sin(t + \frac{1}{3}\pi)}$

De helling berekenen voor  $t = \frac{1}{6}\pi$  en  $t = 1\frac{1}{6}\pi$  en de oplossingen van opdracht b geeft het volgende resultaat.

|                                          | $t = \frac{1}{6}\pi$     | $t = 1\frac{1}{6}\pi$    |
|------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $a = 2 + k \cdot 12$                     | $\frac{dy}{dx}$ negatief | $\frac{dy}{dx}$ positief |
| $a = 4 + k \cdot 12$                     | $\frac{dy}{dx}$ positief | $\frac{dy}{dx}$ negatief |
| $a = \frac{2}{7} + k \cdot 1\frac{5}{7}$ | $\frac{dy}{dx}$ negatief | $\frac{dy}{dx}$ positief |
| $a = \frac{4}{7} + k \cdot 1\frac{5}{7}$ | $\frac{dy}{dx}$ negatief | $\frac{dy}{dx}$ negatief |

G-4ab



c  $\tan(t) = \frac{y_A}{3}$ , dus de coördinaten van A zijn  $(3, 3\tan(t))$ .

In  $\triangle APR$  geldt:

$$\cos(t) = \frac{PR}{2}, \text{ dus } PR = 2\cos(t)$$

$$\sin(t) = \frac{AR}{2}, \text{ dus } AR = 2\sin(t)$$

Dus de coördinaten van P zijn  $(3 - 2\cos(t), 3\tan(t) - 2\sin(t))$ .

De parametervoorstelling van K: 
$$\begin{cases} x = 3 - 2\cos(t) \\ y = 3\tan(t) - 2\sin(t) \end{cases}$$

Pagina 61:

G-5a Er moet gelden  $f(x) = \frac{2}{5}x$

$$\frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{2x}{5}$$

$$2x(x^2 + 1) = 10 \cdot 2x$$

$$2x = 0 \text{ of } x^2 + 1 = 10$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 3$$

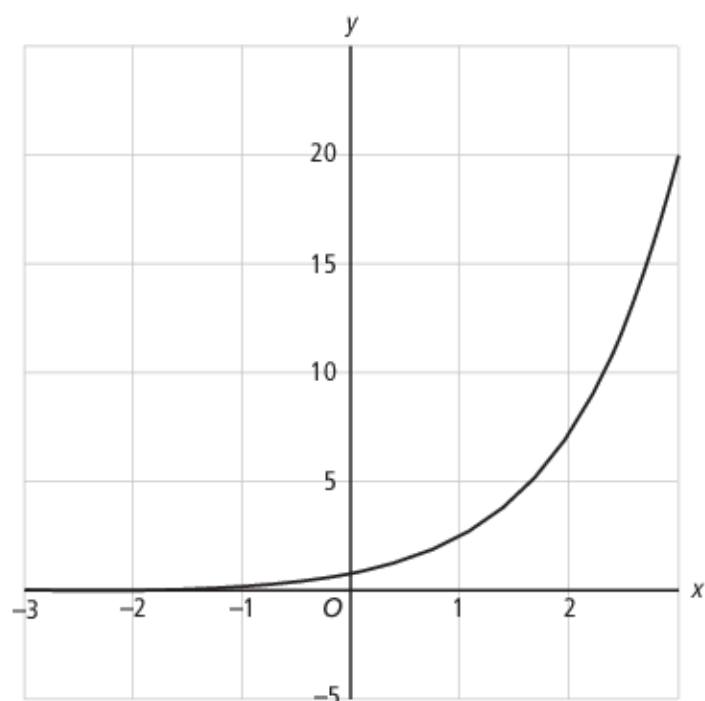
De snijpunten zijn  $(-3, -1\frac{1}{5})$ ,  $(0, 0)$  en  $(3, 1\frac{1}{5})$ .

b 
$$O = 2 \cdot \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx = 2 \cdot \int_0^3 \left( \frac{4x}{x^2 + 1} - \frac{2}{5}x \right) dx$$

c De afgeleide van  $c \cdot \ln(x^2 + 1)$  is  $\frac{c}{x^2 + 1} \cdot 2x$ , dus  $c = 2$ .

d 
$$O = 2 \cdot \int_0^3 \left( \left( \frac{4x}{x^2 + 1} \right) - \frac{2}{5}x \right) dx = 2 \cdot \left[ 2\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{5}x^2 \right]_0^3 = 2 \cdot (2\ln(10) - 1\frac{4}{5}) = 4 \cdot \ln(10) - 3\frac{3}{5}$$

G-6a



- b** De raaklijn gaat door het punt  $(3, e^3)$  en heeft richtingscoëfficiënt  $f'(3) = e^3$ .

De raaklijn  $y = e^3 \cdot x + b$  gaat door  $(3, e^3)$ .

Dit geeft de vergelijking  $e^3 = e^3 \cdot 3 + b$ , dus  $b = -2e^3$ .

De formule voor de raaklijn is  $y = e^3 \cdot x - 2e^3$ .

Voor de  $x$ -coördinaat van  $A$  geldt  $y = 0$ .

$e^3 \cdot x - 2e^3 = 0$ , dus  $x = 2$ .

$$\text{c} \quad O = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 e^x dx + \int_2^3 (e^x - e^3 x + 2e^3) dx =$$

$$[e^x]_0^2 + [e^x - \frac{1}{2}e^3 \cdot x^2 + 2e^3 \cdot x]_2^3 = (e^2 - 1) + (e^3 - 4\frac{1}{2}e^3 + 6e^3 - (e^2 - 2e^3 + 4e^3)) = \frac{1}{2}e^3 - 1$$

- d** Het snijpunt van  $f(x)$  en  $y = e^2$  ligt bij  $x = 2$ .

De inhoud na wentelen om de  $x$ -as is

$$\int_0^2 \pi \cdot (e^2)^2 dx - \int_0^2 \pi \cdot (e^x)^2 dx = \int_0^2 \pi \cdot (e^4) dx - \int_0^2 \pi \cdot (e^{2x}) dx = \pi \cdot [e^4 \cdot x]_0^2 - \pi \cdot [\frac{1}{2}e^{2x}]_0^2 =$$

$$\pi \cdot (2e^4 - \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}) = \pi \cdot (1\frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2})$$

$$\text{e} \quad G'(x) = 1 \cdot (\ln(x))^2 + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - (2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x}) + 2$$

$$G'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 2 \cdot \ln(x) - 2 + 2$$

$$G'(x) = (\ln(x))^2$$

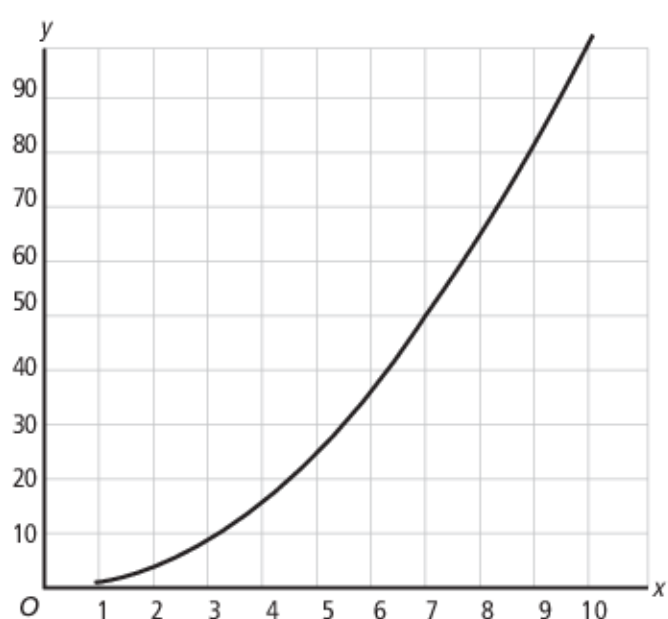
Conclusie:  $G(x)$  is een primitieve van  $g(x)$ .

De inverse van  $f(x) = e^x$  is  $k(x) = \ln(x)$ .

De inhoud na omwentelen om de  $y$ -as van  $H$  is

$$\int_1^{e^2} \pi (\ln(x))^2 dx = \pi \cdot [x \cdot (\ln(x))^2 - 2x \cdot \ln(x) + 2x]_1^{e^2} = \pi \cdot (e^2 \cdot 4 - 2e^2 \cdot 2 + 2e^2) - \pi \cdot 2 = 2\pi e^2 - 2\pi$$

G-7a





$$\text{b} \quad f'(x) = 2x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x} = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} =$$

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{8x} + \left(\frac{1}{8x}\right)^2 = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\text{c} \quad L = \int_1^{e^2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^{e^2} \sqrt{\left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2} dx = \int_1^{e^2} \left(2x + \frac{1}{8x}\right) dx = \left[x^2 + \frac{1}{8} \ln(x)\right]_1^{e^2} = e^4 + \frac{1}{4} - 1 = e^4 - \frac{3}{4}$$

$$\text{G-8a} \quad \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -3\sin(3t)$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(t) + 9\sin^2(3t)} dt \approx 13,07$$

$$\text{b} \quad L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{25\cos^2(t) + 225\sin^2(3t)} dt =$$

$$5 \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(t) + 9\sin^2(3t)} dt \approx 5 \cdot 13,07 = 65,35$$

## Extra oefening – Vaardigheden

Pagina 62:

$$\begin{aligned} \text{V-1a} \quad & -7(2x+5) = 3x-1 \\ & -14x-35 = 3x-1 \\ & -17x = 34 \\ & x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & 2x(2x+1) = 42 \\ & 4x^2 + 2x - 42 = 0 \\ & x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot -42}}{2 \cdot 4} \\ & x = 3 \text{ of } x = -3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V-2a} \quad & (x+1)(x-1) = (x-4)(-2x-2) \\ & x^2 - 1 = -2x^2 + 6x + 8 \\ & 3x^2 - 6x - 9 = 0 \\ & x^2 - 2x - 3 = 0 \\ & (x-3)(x+1) = 0 \\ & x = 3 \text{ of } x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad & 2\frac{1}{2}(x^2-1) = 12x \\ & 2\frac{1}{2}x^2 - 12x - 2\frac{1}{2} = 0 \\ & x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot -2\frac{1}{2}}}{2 \cdot 2\frac{1}{2}} \\ & x = 5 \text{ of } x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad & -4x(5x+1) = (3-3x)(x-6) \\ & -20x^2 - 4x = 3x - 18 - 3x^2 + 18x \\ & -17x^2 - 25x + 18 = 0 \\ & x = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot -17 \cdot 18}}{2 \cdot -17} \\ & x = -2 \text{ of } x = \frac{9}{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & (x-5)(2x+1) = (2x-1)(x-3) \\ & 2x^2 - 9x - 5 = 2x^2 - 7x + 3 \\ & -2x = 8 \\ & x = -4 \end{aligned}$$

**c**  $(2x-3)(3x-7)=25$

$$6x^2-23x+21=25$$

$$6x^2-23x-4=0$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{(-23)^2 - 4 \cdot 6 \cdot -4}}{2 \cdot 6}$$

$$x = 4 \text{ of } x = -\frac{1}{6}$$

**d**  $(1-x)(-3-3x)=(1+x)(x+7)$

$$3x^2-3=x^2+8x+7$$

$$2x^2-8x-10=0$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$(x-5)(x+1)=0$$

$$x=5 \text{ (voorwaarde } x \neq -1)$$

**V-3a**  $\frac{x+3}{x+3} + \frac{x}{x+3} = \frac{x+3}{x+5}$

$$\frac{2x+3}{x+3} = \frac{x+3}{x+5}$$

$$(2x+3)(x+5)=(x+3)^2$$

$$2x^2+13x+15=x^2+6x+9$$

$$x^2+7x+6=0$$

$$(x+6)(x+1)=0$$

$$x=-6 \text{ of } x=-1$$

**c**  $\frac{(x+7)^2}{x+7} + \frac{1}{x+7} = \frac{2}{1}$

$$\frac{x^2+14x+50}{x+7} = \frac{2}{1}$$

$$x^2+14x+50=2x+14$$

$$x^2+12x+36=0$$

$$(x+6)^2=0$$

$$x=-6$$

**b**  $\frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{8+x}{8+5x}$

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{8+x}{8+5x}$$

$$(x^2+x+1)(8+5x)=(x+1)(8+x)$$

$$5x^3+13x^2+13x+8=x^2+9x+8$$

$$5x^3+12x^2+4x=0$$

$$x(5x^2+12x+4)=0$$

$$x=0 \text{ of } 5x^2+12x+4=0$$

$$x=0 \text{ of } x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5}$$

$$x=0 \text{ of } x=-2 \text{ of } x=-\frac{2}{5}$$

**d**  $\frac{2x-1}{(2x+1)(2x-1)} + \frac{2x+1}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{4}{3}$

$$\frac{4x}{4x^2-1} = \frac{4}{3}$$

$$16x^2-4=12x$$

$$16x^2-12x-4=0$$

$$4x^2-3x-1=0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -1}}{2 \cdot 4}$$

$$x=1 \text{ of } x=-\frac{1}{4}$$

**V-4a**  $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin(-\frac{1}{3}\pi)$

$$x = -\frac{1}{3}\pi \text{ of } x = -\frac{2}{3}\pi$$

**b**  $2\cos(x) \cdot (\cos(x) - \frac{1}{2}) = 0$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi$$

**c**  $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$

$$\cos(x) = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1}}{2 \cdot 2}$$

$$\cos(x) = 1 \text{ of } \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x=0 \text{ of } x=\frac{2}{3}\pi \text{ of } x=-\frac{2}{3}\pi$$

**d**  $3x=2x \text{ of } 3x=\pi-2x+k \cdot 2\pi$

$$x=0 \text{ of } 5x=\pi+k \cdot 2\pi$$

$$x=0 \text{ of } x=\frac{1}{5}\pi+k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

Op het interval  $-\pi \leq x \leq \pi$  zijn de oplossingen

$$x = -\pi, x = -\frac{3}{5}\pi, x = -\frac{1}{5}\pi, x = 0, x = \frac{1}{5}\pi, x = \frac{3}{5}\pi, x = \pi.$$

**e**  $\sin(x) = \cos(\pi-x)$

$$\sin(x) = \sin(\frac{1}{2}\pi - (\pi-x)) = \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$$

$$x = x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \pi - (x - \frac{1}{2}\pi) + k \cdot 2\pi$$

geen oplossing of  $2x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$   
 geen oplossing of  $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$   
 geen oplossing of  $x = -\frac{1}{4}\pi$  of  $x = \frac{3}{4}\pi$

- f**  $\sin(x) = \sin(\frac{1}{2}\pi - (x - \frac{1}{3}\pi))$   
 $\sin(x) = \sin(\frac{5}{6}\pi - x)$   
 $x = \frac{5}{6}\pi - x + k \cdot 2\pi$  of  $x = \pi - (\frac{5}{6}\pi - x) + k \cdot 2\pi$   
 $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of geen oplossing  
 $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$  of geen oplossing  
 $x = -\frac{7}{12}\pi$  of  $x = \frac{5}{12}\pi$  of geen oplossing
- g**  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$   
 $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$  of  $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$   
 $x = -\frac{3}{4}\pi$  of  $x = -\frac{1}{4}\pi$  of  $x = \frac{1}{4}\pi$  of  $x = \frac{3}{4}\pi$
- h**  $\sin(6x) = 1 = \sin(\frac{1}{2}\pi)$   
 $6x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$   
 $x = -\frac{11}{12}\pi, x = -\frac{7}{12}\pi, x = -\frac{1}{4}\pi, x = \frac{1}{12}\pi, x = \frac{5}{12}\pi$  of  $x = \frac{3}{4}\pi$

- V-5a**  $\cos^2(x) + \cos(x) = 0$   
 $\cos(x)(\cos(x) + 1) = 0$   
 $\cos(x) = 0$  of  $\cos(x) = -1$   
 $x = \frac{1}{2}\pi$  of  $x = 1\frac{1}{2}\pi$  of  $x = \pi$

- b** Er moet gelden  $f'(x) = 0$   
 De afgeleide:  
 $f'(x) = 2\cos(x) \cdot -\sin(x) - \sin x$   
 $f'(x) = -2\sin(x)(\cos(x) + \frac{1}{2})$   
 De nulpunten:  
 $-2\sin(x)(\cos(x) + \frac{1}{2}) = 0$   
 $\sin(x) = 0$  of  $\cos(x) = -\frac{1}{2}$   
 $x = 0, x = \pi, x = 2\pi, x = \frac{2}{3}\pi$  of  $x = 1\frac{1}{3}\pi$ .  
 De extreme waarden:  
 $f(0) = f(2\pi) = 2$  zijn (rand)maxima.  
 $f(\pi) = 0$  is een maximum.  
 $f(\frac{2}{3}\pi) = f(1\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{4}$  zijn minima.

**Pagina 63:**

- V-6** Er moet gelden  $f''(x) = 0$ .  
 $f'(x) = 3 \cdot \cos(3x) + 9 \cdot \sin(x)$   
 $f''(x) = -9 \cdot \sin(3x) + 9 \cdot \cos(x)$   
 $-9 \cdot \sin(3x) + 9\cos(x) = 0$   
 $\sin(3x) = \cos(x)$   
 $\sin(3x) = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$   
 $3x = \frac{1}{2}\pi - x + k \cdot 2\pi$  of  $3x = \pi - (\frac{1}{2}\pi - x) + k \cdot 2\pi$   
 $4x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$  of  $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$   
 $x = \frac{1}{8}\pi, x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{5}{8}\pi, x = 1\frac{1}{8}\pi, x = 1\frac{1}{4}\pi$  of  $x = 1\frac{5}{8}\pi$

- c**  $f'(x) = -2\sin(x)(\cos(x) + \frac{1}{2})$   
 $f''(x) = -2\cos(x)(\cos(x) + \frac{1}{2}) - 2\sin(x) \cdot -\sin(x)$   
 $f''(x) = -2\cos^2(x) - \cos(x) + 2\sin^2(x)$   
 $f''(x) = -2\cos^2(x) - \cos(x) + 2(1 - \cos^2(x))$   
 $f''(x) = -4\cos^2(x) - \cos(x) + 2$

$$\begin{aligned} \text{V-7} \quad \int_0^a \frac{1}{2} \cos(2x) \, dx &= \left[ \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^a = \frac{1}{4} \sin(2a) \\ \frac{1}{4} \sin(2a) &= \frac{1}{8} \\ \sin(2a) &= \frac{1}{2} \\ 2a &= \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2a = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\ a &= \frac{1}{12}\pi \text{ of } a = \frac{5}{12}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V8a} \quad 3p &= 24 - 8q \\ p &= 8 - 2\frac{2}{3}q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad 3p + 12pq &= 36 - 4q \\ p(3 + 12q) &= 36 - 4q \\ p &= \frac{36 - 4q}{3 + 12q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad 4p + 3 &= q^5 \\ 4p &= q^5 - 3 \\ p &= \frac{1}{4}q^5 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad 3p + 9 &= \frac{27}{q} \\ 3p &= \frac{27}{q} - 9 \\ p &= \frac{9}{q} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad pq - 2p &= 1 - q \\ p(q - 2) &= 1 - q \\ p &= \frac{1 - q}{q - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad e^{2p+3} &= 1 - q \\ 2p + 3 &= \ln(1 - q) \\ 2p &= \ln(1 - q) - 3 \\ p &= \frac{1}{2} \ln(1 - q) - 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g} \quad 3p + q &= (q + 1)^3 \\ 3p &= (q + 1)^3 - q \\ p &= \frac{1}{3}(q + 1)^3 - \frac{1}{3}q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h} \quad p &= (p + 1)(q + 2) \\ p &= pq + 2p + q + 2 \\ pq + p &= -q - 2 \\ p(q + 1) &= -(q + 2) \\ p &= -\frac{q + 2}{q + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V-9a} \quad \text{De pijlenketting is } &\dots \xrightarrow{\times -7} \dots \xrightarrow{+1} \dots \\ \text{De omgekeerde pijlenketting is } &\dots \xleftarrow{: -7} \dots \xleftarrow{-1} \dots \\ \text{De inverse functie is } f^{\text{inv}}(x) &= -\frac{x-1}{7} = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad \text{De pijlenketting is } &\dots \xrightarrow{\times 3} \dots \xrightarrow{-5} \dots \xrightarrow{e^-} \dots \\ \text{De omgekeerde pijlenketting is } &\dots \xleftarrow{:3} \dots \xleftarrow{+5} \dots \xleftarrow{\ln \dots} \dots \\ \text{De inverse functie is } g^{\text{inv}}(x) &= \frac{\ln(x) + 5}{3} = \frac{1}{3} \ln(x) + 1\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \text{De pijlenketting is } &\dots \xrightarrow{\times 5} \dots \xrightarrow{+4} \dots \xrightarrow{2 \log(\dots)} \dots \\ \text{De omgekeerde pijlenketting is } &\dots \xleftarrow{:5} \dots \xleftarrow{-4} \dots \xleftarrow{2^-} \dots \\ \text{De inverse functie is } h^{\text{inv}}(x) &= \frac{2^x - 4}{5} = \frac{1}{5} \cdot 2^x - \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad \text{De pijlenketting is } &\dots \xrightarrow{\dots^3} \dots \xrightarrow{-1} \dots \xrightarrow{\frac{1}{-}} \dots \xrightarrow{\times 15} \dots \\ \text{De omgekeerde pijlenketting is } &\dots \xleftarrow{\sqrt[3]{\dots}} \dots \xleftarrow{+1} \dots \xleftarrow{\frac{1}{-}} \dots \xleftarrow{:15} \dots \\ \text{De inverse functie is } k^{\text{inv}}(x) &= \sqrt[3]{\frac{15}{x}} + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad \text{De pijlenketting is } &\dots \xrightarrow{\times -2} \dots \xrightarrow{+10} \dots \xrightarrow{\ln \dots} \dots \xrightarrow{\times 5} \dots \\ \text{De omgekeerde pijlenketting is } &\dots \xleftarrow{: -2} \dots \xleftarrow{-10} \dots \xleftarrow{e^-} \dots \xleftarrow{:5} \dots \\ \text{De inverse functie is } f^{\text{inv}}(x) &= -\frac{1}{2}(e^x - 10) = -\frac{1}{2}e^x + 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad \text{De pijlenketting is } &\dots \xrightarrow{\times 5} \dots \xrightarrow{-2} \dots \xrightarrow{\sqrt[3]{\dots}} \dots \\ \text{De omgekeerde pijlenketting is } &\dots \xleftarrow{:5} \dots \xleftarrow{+2} \dots \xleftarrow{\dots^3} \dots \\ \text{De inverse functie is } g^{\text{inv}}(x) &= (x^3 + 2):5 = \frac{1}{5}x^3 + \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

- g** De pijlenketting is  $\dots \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{-1} \dots \xrightarrow{-3} \dots$   
 De omgekeerde pijlenketting is  $\dots \xrightarrow{:2} \dots \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{{}^3\log \dots} \dots$   
 De inverse functie is  $h^{inv}(x) = \frac{{}^3\log(x) + 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(x) + \frac{1}{2} = {}^3\log(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{2}$ .
- h** De pijlenketting is  $\dots \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{-1} \dots \xrightarrow{\dots^5} \dots$   
 De omgekeerde pijlenketting is  $\dots \xleftarrow{:2} \dots \xleftarrow{+1} \dots \xleftarrow{\sqrt[5]{\dots}} \dots$   
 De inverse functie is  $k^{inv}(x) = \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[5]{x} + \frac{1}{2}$ .

**V-10a**  $f(x) = \frac{5x-1}{x+2} = \frac{5x+10-11}{x+2} = \frac{5(x+2)}{x+2} - \frac{11}{x+2} = 5 - \frac{11}{x+2}$

Dus  $a = 5$  en  $b = -11$ .

- b** De pijlenketting is  $\dots \xrightarrow{+2} \dots \xrightarrow{\frac{1}{5}} \dots \xrightarrow{\times -11} \dots \xrightarrow{+5} \dots$   
 De omgekeerde pijlenketting is  $\dots \xleftarrow{-2} \dots \xleftarrow{\frac{1}{5}} \dots \xleftarrow{: -11} \dots \xleftarrow{-5} \dots$   
 De inverse functie is  $f^{inv}(x) = \frac{-11}{x-5} - 2$ .

- c**  $g(x) = \frac{5-3x}{x+1} = \frac{-3x-3+8}{x+1} = \frac{-3(x+1)}{x+1} + \frac{8}{x+1} = -3 + \frac{8}{x+1}$   
 De pijlenketting is  $\dots \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{\frac{1}{5}} \dots \xrightarrow{\times 8} \dots \xrightarrow{-3} \dots$   
 De omgekeerde pijlenketting is  $\dots \xleftarrow{-1} \dots \xleftarrow{\frac{1}{5}} \dots \xleftarrow{: 8} \dots \xleftarrow{+3} \dots$

De inverse functie is  $g^{inv}(x) = \frac{8}{x+3} - 1$ .

- d**  $g^{inv}(x) = \frac{8}{x+3} - 1 = \frac{8}{x+3} - \frac{x+3}{x+3} = \frac{-x+5}{x+3}$

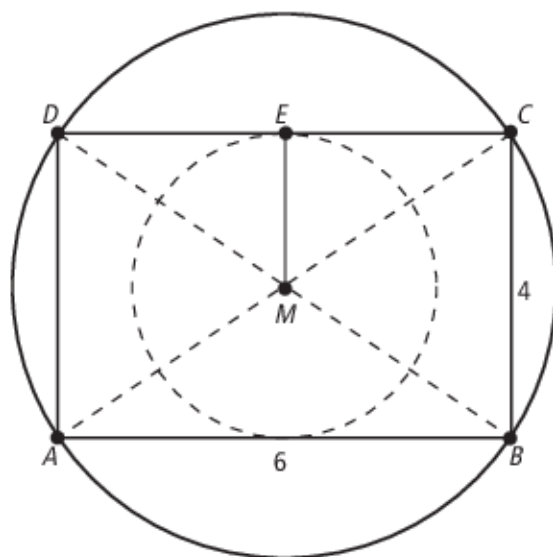


# Hoofdstuk 3 – Cirkels en hoeken

## Voorkennis: Cirkels

Pagina 66:

V-1ab



- c Stelling van Pythagoras:  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ .  
Invullen geeft  $AC^2 = 6^2 + 4^2 = 52 \Rightarrow AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ .
- d De grootste cirkel binnen  $ABCD$  heeft een straal van 2.

- V-2a  $A$  en  $D$  liggen op een cirkel met middelpunt  $F \Rightarrow FA = FD$ .  
 $\angle A = 60^\circ$  ( $\triangle ABC$  gelijkbenig)  $\Rightarrow \angle D = 60^\circ$  ( $\triangle ADF$  gelijkbenig)  $\Rightarrow \angle F = 60^\circ$ .  
De drie hoeken zijn hetzelfde, dus  $\triangle AFD$  is gelijkzijdig.  
Op dezelfde manier kun je bewijzen dat  $\triangle BFE$  gelijkzijdig is.
- b De driehoeken  $AFD$  en  $ABC$  zijn gelijkzijdig, dus  $DA = DF = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC$ .  
Dus  $D$  is het midden van  $AC$ .  
Op dezelfde manier is te bewijzen dat  $BE = \frac{1}{2} BC$ , ofwel  $E$  is het midden van  $BC$ .
- c De lijn  $AE$  is de hoogtelijn, dus  $\angle AEB = 90^\circ$ .  
 $\angle BAE = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

- V-3a In  $\triangle AMD$  geldt:  $MA = MD$  dus  $\angle A = \angle D = \alpha$ . Dus  $\angle M = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle BMD = 2\alpha$ .  
Ook geldt  $\angle BMC = \angle A = \alpha$  (F-hoeken).  
Dus  $MC$  is de bissectrice van  $\angle BMD$ .
- b  $\left. \begin{array}{l} MA = MB \text{ (straal)} \\ \angle AMD = \angle BME \text{ (overst hoeken)} \\ MD = ME \text{ (straal)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMD \cong \triangle BME \text{ (ZHZ)} \Rightarrow \angle ADM = \angle BEM$ .
- c  $\left. \begin{array}{l} \angle MDA = \frac{1}{2} \angle BMD \text{ (zie vraag a)} \\ \angle MDA = \angle BED \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \angle BED = \frac{1}{2} \angle BMD$

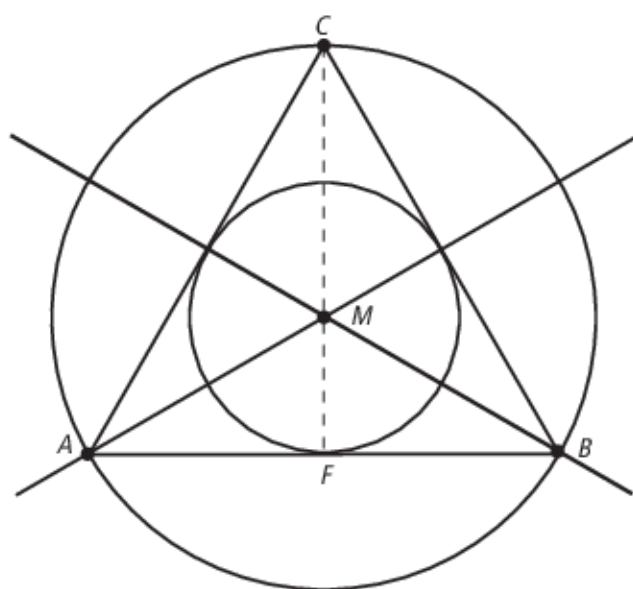
- V-4a De som van de hoeken van een (willekeurige) vijfhoek is  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ .  
In een regelmatige vijfhoek zijn alle hoeken even groot, dus  
 $\angle EAB = \frac{1}{5} \cdot 540^\circ = 108^\circ$ .

- b  $AE = DE$ , dus  $\triangle ADE$  is gelijkbenig.  
 $\angle EAD = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$
- c  $\angle BAD = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$  en  $\angle ABE = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$  (zie opdracht b)  
 $F$  is het snijpunt van de diagonalen  $AD$  en  $BE$ .  
 Dus in  $\triangle ABF$  geldt voor de hoek tussen  $AD$  en  $BE$ :  $\angle AFB = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ .
- d  $\angle CED = \angle BEA = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$  (vergelijk met opdracht b).  
 Voor  $\angle BEC$  blijft over  $\angle BEC = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ$ .  
 De drie delen zijn alledrie  $36^\circ$ .

**Pagina 67:**

- V-5a** De hoekensom van een achthoek is  $6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ$ .  
 In een regelmatige achthoek zijn alle hoeken even groot, dus  
 $\angle BAH = \frac{1}{8} \cdot 1080^\circ = 135^\circ$ .
- b  $\triangle MAG$  is gelijkbenig en  $\angle M = 90^\circ$ , dus  $\angle MAG = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$ .  
 $\triangle HAG$  is gelijkbenig en  $\angle H = 135^\circ$ , dus  $\angle GAH = \frac{1}{2}(180^\circ - 135^\circ) = 22,5^\circ$ .
- c  $\triangle MAD$  is gelijkbenig en  $\angle AMD = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$   
 $\angle MAD = \frac{1}{2}(180^\circ - 135^\circ) = 22,5^\circ$
- d  $\triangle MDE$  is gelijkbenig en  $\angle EMD = 45^\circ$ , dus  $\angle EDM = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67,5^\circ$ .  
 $\angle ADM = \angle MAD = 22,5^\circ$  (zie opdracht c)  
 Dus  $\angle ADE = \angle ADM + \angle EDM = 22,5^\circ + 67,5^\circ = 90^\circ$   
 of  
 $\angle EAD = \angle MAD = 22,5^\circ$   
 In  $\triangle ADE$  is  $\angle ADE = 180^\circ - \angle EAD - \angle AED = 180^\circ - 22,5^\circ - \frac{1}{2} \cdot 35^\circ = 90^\circ$

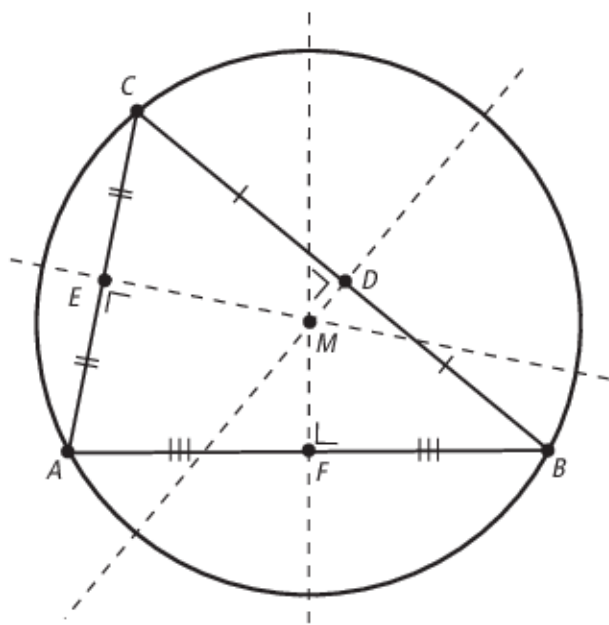
**V-6abc**



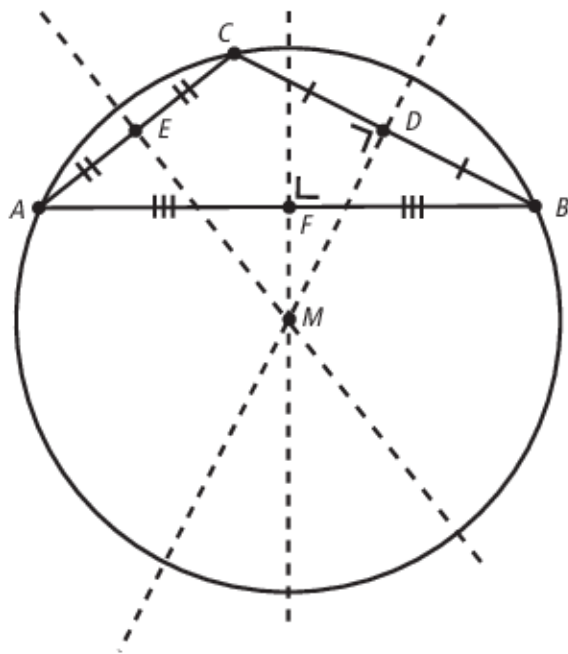
- d Stelling van Pythagoras:  $AF^2 + CF^2 = AC^2$   
 $F$  is het midden van  $AB$ , dus  $AF = 3$ .  
 Invullen geeft:  $3^2 + CF^2 = 6^2 \Rightarrow CF^2 = 27 \Rightarrow CF = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ .  
 De getekende lijnen zijn zwaartelijnen.  
 Punt  $M$  verdeelt zwaartelijn  $CF$  in delen die zich verhouden als 1:2.  
 Dus  $CM = 2\sqrt{3}$  is de straal van de cirkel door de hoekpunten.  
 En  $FM = \sqrt{3}$  is de straal van de cirkel die de zijden van de driehoek raakt.

- V-7a** Een vierkant en een rechthoek.  
 b Een vierkant en een ruit.

V-8ab



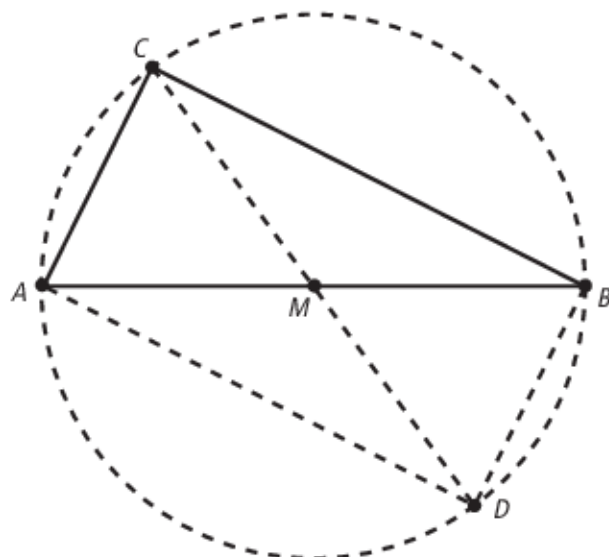
- c Als het middelpunt van de omgeschreven cirkel buiten de driehoek ligt, dan heeft de driehoek een stompe hoek.



### 3-1 Stelling van Thales

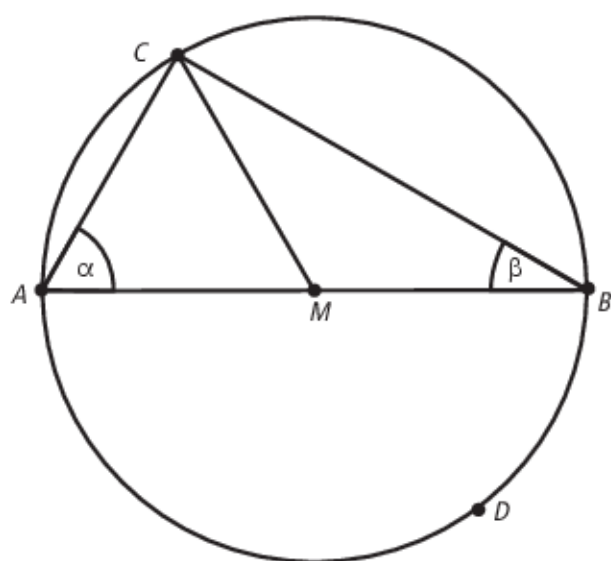
Pagina 68:

1ab



- c Als  $ACBD$  een rechthoek is, dan zijn de diagonalen even lang en delen elkaar middendoor.
- d  $MA = MB = MC$  met  $M$  is het midden van  $AB$ . Dus gaat er een cirkel door  $C$  met middellijn  $AB$ .
- e Als in driehoek  $ABC$  geldt  $\angle C = 90^\circ$ , dan ligt punt  $C$  op een cirkel met middellijn  $AB$ .

2a

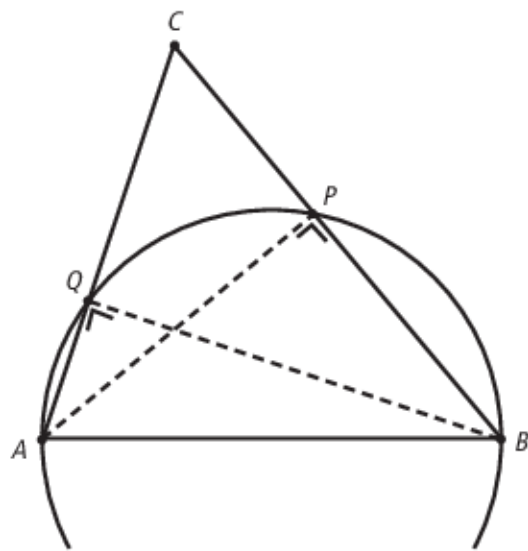


- b  $AM = CM = r$ , dus  $\triangle AMC$  is een gelijkbenige driehoek met basishoeken  $\angle MAC$  en  $\angle MCA$ .  
Dus  $\angle MAC = \angle MCA$ .
- c  $\angle MCB = \angle MBC$
- d De hoeken van een driehoek zijn samen  $180^\circ$  ofwel  $\angle MAC + \angle MCA + \angle MCB + \angle MBC = 180^\circ$ .  
Met het resultaat van opdracht b en c geeft dit  $2 \cdot \angle MCA + 2 \cdot \angle MCB = 180^\circ \Rightarrow$   
 $\angle MCA + \angle MCB = 90^\circ$ .  
 $\angle ACB = \angle MCA + \angle MCB = 90^\circ$ .
- 3  $AB$  is middellijn, dus  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ .  
 $AC = BC \Rightarrow \angle BAC = \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$   
 $\angle ABD = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$   
Hieruit volgt  $\angle CAD = 45^\circ + 40^\circ = 85^\circ$  en  $\angle CBD = 45^\circ + 50^\circ = 95^\circ$ .

Pagina 69:

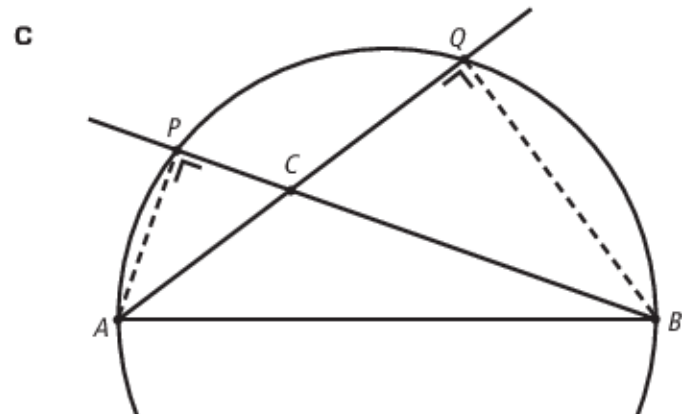
- 4a Punt  $D$  ligt op een cirkel met middellijn  $AB$ , dan geldt  $\angle ADB = 90^\circ$  (*Stelling van Thales*).
- b De som van de hoeken van een vierhoek is  $360^\circ$ .  
 $\angle DAC + \angle ACB + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$   
 $\angle DAC + 90^\circ + \angle CBD + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \angle DAC + \angle CBD = 180^\circ$
- 5 Punt  $M$  is het midden van  $PQ$  en  $MR = \frac{1}{2}PQ$  is gegeven.  
Dus er geldt:  $MP = MR = MQ$ , dit is de straal van de cirkel door  $P$ ,  $Q$  en  $R$ .  
 $PQ$  is de middellijn van deze cirkel, dus  $\triangle PQR$  is rechthoekig (*Stelling van Thales*).

6a

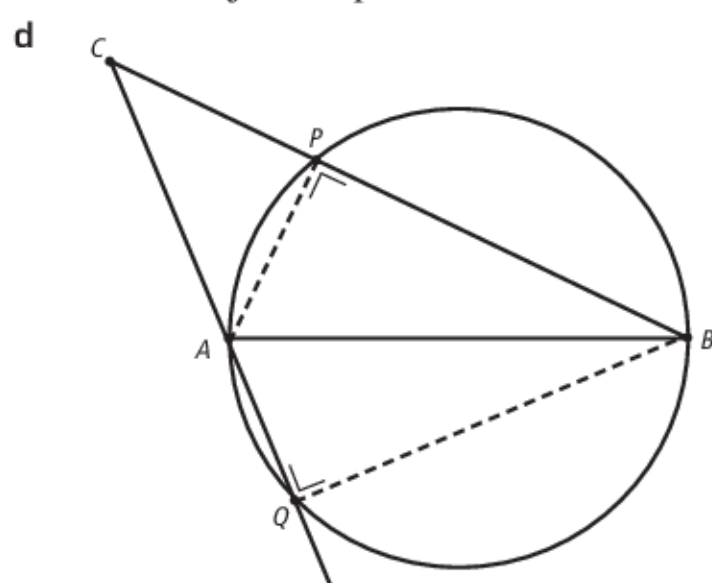




- b**  $\angle APB = 90^\circ$ , dan ligt punt  $P$  op een cirkel met middellijn  $AB$  (*Omgekeerde stelling van Thales*).  
 $\angle AQB = 90^\circ$ , dan ligt punt  $Q$  op een cirkel met middellijn  $AB$  (*Omgekeerde stelling van Thales*).  
 Er is maar één cirkel mogelijk met middellijn  $AB$ , dus liggen  $A$ ,  $B$ ,  $P$  en  $Q$  op één cirkel.



Het bewijs kan op dezelfde manier worden uitgeschreven.



Ook dit bewijs kan op dezelfde manier worden uitgeschreven.

- 7a** Omdat  $DE$  een middenparallel is.  
**b** Vierhoek  $ADEF$  is een rechthoek, want  $DE = AF$  (gevolg middenparallel) en  $DE \parallel AF$  met verder nog  $\angle A = 90^\circ$  (gegeven).  
 Dus vierhoek  $ADEF$  is een parallellogram met een rechte hoek, dus een rechthoek.  
**c** In een rechthoek zijn de diagonalen even lang, dus  $AE = DF = 2r$ .  
 $S$  is het snijpunt van  $AE$  en  $DF$ .  
 $A$ ,  $E$ ,  $D$  en  $F$  liggen op de cirkel met middelpunt  $S$  en straal  $r$ .  
 $G$  ligt ook op die cirkel wegens de *Omgekeerde stelling van Thales*.  
**d** Het middelpunt ligt op het midden van  $AE$ .
- 8a**  $HFB$  is een rechthoekige driehoek, dus  $H$ ,  $F$  en  $B$  liggen op een cirkel met middellijn  $HB$  (*Omgekeerde stelling van Thales*).  
 $HBD$  is een rechthoekige driehoek, dus  $H$ ,  $F$  en  $D$  liggen op een cirkel met middellijn  $HB$  (*Omgekeerde stelling van Thales*).  
 Er is maar één cirkel mogelijk met middellijn  $HB$ , dus liggen  $H$ ,  $F$ ,  $B$  en  $D$  op één cirkel.  
**b**  $AFHE$ ,  $ABDE$  en  $CDHE$ .



## 3-2 Omtrekshoeken

Pagina 70

- 9a Gegeven: Cirkel met middelpunt  $M$ ,  
 $A, B, C, D$  op cirkel, met  $\angle AMB = \angle CMD$

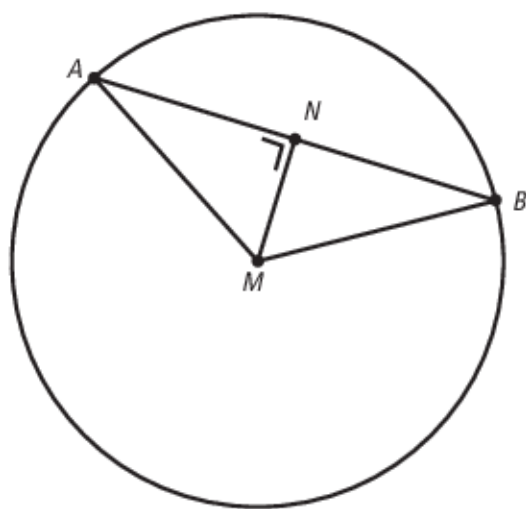
Te bewijzen:  $AB = CD$ 

Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} AM = CM \text{ (straal)} \\ \angle AMB = \angle CMD \text{ (gegeven)} \\ BM = DM \text{ (straal)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle CDM \text{ (ZHZ)} \Rightarrow AB = CD$$

- b  $\frac{\angle AMB}{360^\circ}$  geeft aan welk deel van de cirkel bij de boog  $AB$  hoort.
- c  $\text{lengte boog } AB = \text{lengte boog } CD$ , omdat de bijbehorende hoeken gelijk zijn.

10ab



- c Gegeven: Cirkel  $(M, r)$  met punten  $A$  en  $B$  op de cirkel  
 $MN \perp AB$

Te bewijzen:  $N$  is het midden van  $AB$ 

Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} AM = BM \text{ (straal)} \\ MN = MN \\ \angle ANM = \angle BNM (= 90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ANM \cong \triangle BNM \text{ (ZZR)} \Rightarrow AN = BN$$

Dus  $N$  is het midden van  $AB$ .

- 11 Gegeven: Cirkel  $(M, r)$  met punten  $A$  en  $B$  op de cirkel  
 $S$  is het midden van  $AB$

Te bewijzen:  $MS \perp AB$ 

Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} AM = BM \text{ (straal)} \\ MS = MS \\ AS = BS \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ASM \cong \triangle BSM \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle ASM = \angle BSM.$$

Er geldt  $\angle ASM + \angle BSM = 180^\circ$  (gestrekte hoek), dus  $\angle ASM = \angle BSM = 90^\circ$ .

- 12a  $\angle BMC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$  (gestrekte hoek)

- b  $\triangle BMC$  is gelijkbenig, omdat  $BM = CM = r$

- c  $\angle ABC = \angle BCM = \frac{1}{2} (180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$

d  $\angle AMC = 2 \cdot \angle ABC$

e  $\angle BAC = \angle ACM = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$

Bij vraag a berekende je  $\angle BMC = 100^\circ$ , dus geldt  $\angle BMC = 2 \cdot \angle BAC$ .

13 Gegeven:  $\angle BAC = \alpha$

Te bewijzen:  $\angle BMC = 2\alpha$

Bewijs:

In de gelijkbenige driehoek  $ACM$  geldt:  $\angle MAC = \angle MCA = \alpha$ .

Dan is  $\angle AMC = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle BMC = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$ .

Pagina 71:

14a Noem het snijpunt van  $CM$  met de cirkel  $D$ .

$$\angle AMD = 2 \angle ACD \text{ (opgave 13)}$$

$$\angle BMD = 2 \angle BCD \text{ (opgave 13)}$$

Links en rechts van boven naar beneden optellen geeft:

$$\angle AMB = 2 \angle ACB$$

b Teken lijn  $CM$ , noem het snijpunt van  $CM$  met de cirkel  $E$ .

$$\angle BME = 2 \angle BCE \text{ (opgave 13)}$$

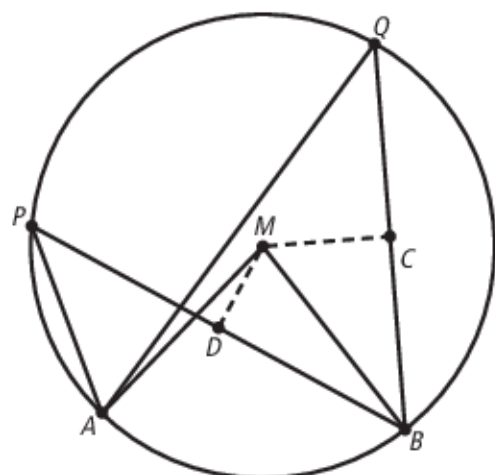
$$\angle AME = 2 \angle ACE \text{ (opgave 13)}$$

Links en rechts van boven naar beneden aftrekken geeft:

$$\angle AMB = 2 \angle ACB$$

15a Je moet aantonen dat bij die twee omtrekshoeken dezelfde middelpuntshoek hoort.

b Construeer eerst het middelpunt van de cirkel met twee middelloodlijnen.



$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AMB \text{ (Stelling van de omtrekshoek)}$$

$$\angle AQB = \frac{1}{2} \angle AMB \text{ (Stelling van de omtrekshoek)}$$

Hieruit volgt dat  $\angle APB = \angle AQB$ , dus twee omtrekshoeken op dezelfde boog zijn even groot.

16 Gegeven:  $\triangle ABC$  met  $C$  op cirkel met middellijn  $AB$ .

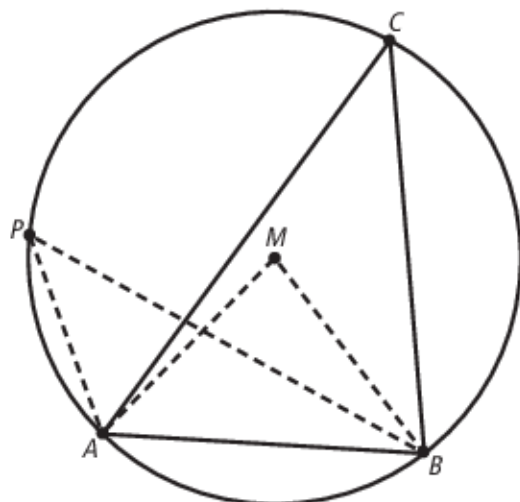
Te bewijzen:  $\angle ACB = 90^\circ$

Bewijs:  $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$  (Stelling van de omtrekshoek).

## 3-3 Constante hoek

Pagina 72:

17a



b  $\angle APB = \angle ACB$

Volgens de stelling van opdracht 15 geldt:

In een cirkel zijn twee omtrekshoeken op dezelfde boog even groot.

- c Omdat  $\angle APC$  en  $\angle ACB$  omtrekshoeken op dezelfde boog moeten zijn, dat kan alleen als  $P$  en  $C$  aan dezelfde kant van  $AB$  liggen.

18a  $\angle AEB = \angle ACB$  (zelfde cirkelboog)

- b Als  $\angle AQ_1B = \angle ACB$ , dan is  $\angle AQ_1B = \angle AEB$ . Dan zou moeten gelden  $BQ_1 \parallel BE$  (F-hoeken).

- c Het is niet mogelijk dat  $BQ_1 \parallel BE$ , want  $BQ_1E$  is een driehoek.

d  $\angle AEB = \angle ACB$  (zelfde cirkelboog)

Als  $\angle AQ_2B = \angle ACB$ , dan is  $\angle AQ_2B = \angle AEB$ . Dan zou moeten gelden  $BQ_2 \parallel BE$  (F-hoeken).

Het is niet mogelijk dat  $BQ_2 \parallel BE$ , want  $BQ_2E$  is een driehoek.

- e Als  $Q$  niet binnen of buiten de cirkel kan liggen, dan ligt  $Q$  op de cirkel.

- 19 Maak eerst een verhoudingstabel om te zien of  $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ .

|                 |          |          |           |
|-----------------|----------|----------|-----------|
| $\triangle ABC$ | $AB = 6$ | $BC = 9$ | $AC = 12$ |
| $\triangle DBE$ | $DB = 4$ | $BE = 6$ | $DE = 8$  |

De driehoeken zijn gelijkvormig met factor  $\frac{2}{3}$ .

Dan zijn de overeenkomstige hoeken gelijk, dus in het bijzonder is

$$\angle ACB = \angle DEB.$$

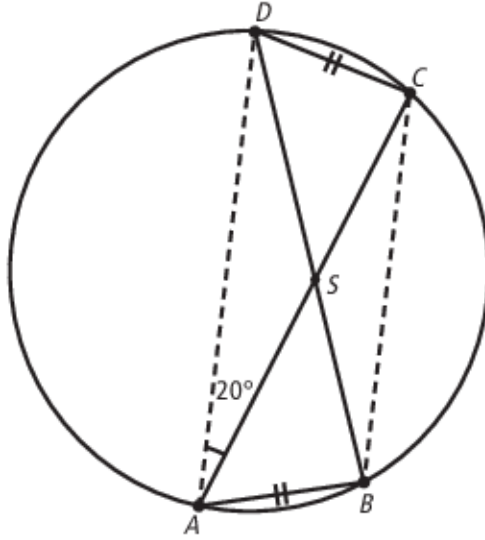
Omdat  $D$  een punt is op het been van  $\angle ACB$  geldt ook  $\angle ACB = \angle DCB$ .

Hieruit volgt  $\angle DEB = \angle DCB$ , dus met de omgekeerde stelling van de constante hoek geldt dat punt  $C$  ook op de omgeschreven cirkel ligt van driehoek  $BDE$ .

Pagina 73:

**20a** Je vindt het antwoord met de *Stelling van de constante hoek*.

$$\angle DBC = \angle DAC = 20^\circ$$



**b** De stelling *Boog en koorde* zegt:

In een cirkel behoren gelijke bogen bij gelijke koorden.

Dan zijn de bijbehorende omtrekshoeken ook gelijk, dus  $\angle ACB = 20^\circ$ .

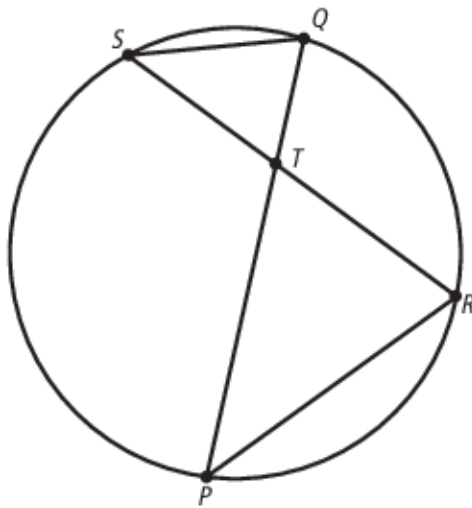
**c** Volgens de stelling van de constante hoek is  $\angle ADB = \angle ACB = 20^\circ$ .

Hoekensom in  $\triangle ADS$  geeft  $\angle DAS + \angle ADS + \angle ASD = 180^\circ$ .

Hieruit volgt dat  $\angle ASD = 180^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 140^\circ \Rightarrow \angle ASB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ .

(Dat laatste had je ook kunnen vinden met de stelling van de buitenhoek.)

**21a** Je bewijst dat de overeenkomstige hoeken even groot zijn.

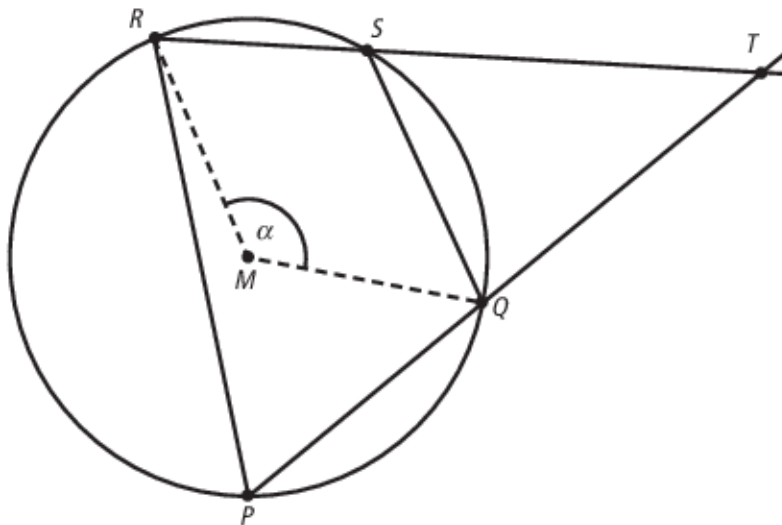


$$\left. \begin{array}{l} \angle P = \angle S \text{ (omtrekshoek boog } RQ) \\ \angle R = \angle Q \text{ (omtrekshoek boog } PS) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PTR \sim \triangle STQ \text{ (hh)}$$

**b** Stel een verhoudingstabel op:

|                 |      |      |      |
|-----------------|------|------|------|
| $\triangle PTR$ | $PT$ | $TR$ | $PR$ |
| $\triangle STQ$ | $ST$ | $TQ$ | $SQ$ |

$$\text{Hieruit volgt: } \frac{PT}{ST} = \frac{TR}{TQ} \Rightarrow PT \cdot TQ = ST \cdot TR.$$

**22** Eerst een analysefiguur:

Je bewijst dat de overeenkomstige hoeken even groot zijn.

$$\begin{aligned}
 \angle QPR &= \frac{1}{2} \angle QMR = \frac{1}{2} \alpha \\
 \angle QSR &= \frac{1}{2} \angle QMR^* = \frac{1}{2} (360^\circ - \alpha) = 180^\circ - \frac{1}{2} \alpha \Rightarrow \\
 \angle QST &= 180^\circ - (180^\circ - \frac{1}{2} \alpha) = \frac{1}{2} \alpha \text{ (gestrekte hoek)} \\
 \left. \begin{aligned} \angle QPR &= \angle QST (= \frac{1}{2} \alpha) \\ \angle T &= \angle T \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \triangle PTR \sim \triangle STQ \text{ (hh)}
 \end{aligned}$$

Stel een verhoudingstabel op:

|                 |      |      |      |
|-----------------|------|------|------|
| $\triangle PTR$ | $PT$ | $TR$ | $PR$ |
| $\triangle STQ$ | $ST$ | $TQ$ | $SQ$ |

Hieruit volgt:  $\frac{PT}{ST} = \frac{TR}{TQ} \Rightarrow PT \cdot TQ = ST \cdot TR.$

- 23** Driehoek  $PQR$  is gelijkbenig als geldt  $PQ = PR$ .  
 Noem  $\angle PQR = \alpha$ , dan is  $\angle PAR = \alpha$  (zelfde boog  $PR$ ).  
 $\angle PAR = \angle CAD$  (overstaande hoeken), dus  $\angle CAD = \alpha$ .  
 Hieruit volgt  $\angle CBD = \alpha$  (zelfde boog  $CD$ ).  
 $\angle CBD = \angle PBQ$  (overstaande hoeken), dus  $\angle PBQ = \alpha$ .  
 Tenstotte is  $\angle PRQ = \alpha$  (zelfde boog  $PQ$ ).  
 Er geldt  $\angle PQR = \angle PRQ$ , dus boog  $PR =$  boog  $PQ$ .  
 Hieruit volgt dat  $PR = PQ$  (opdracht 9).

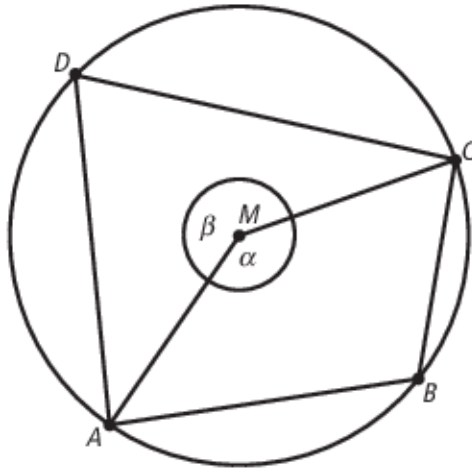
**3-4 Koordenvierhoeken**

Pagina 74:

- 24a** Als  $AC$  de middellijn is, dan weten we met de stelling van Thales dat  $\angle ABC = 90^\circ$  en  $\angle ADC = 90^\circ$ .  
 Dan is  $\angle ABC + \angle ADC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ .  
 Voor de andere twee hoeken geldt (met de hoekensom van een vierhoek):  
 $\angle DAB + \angle BCD = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$



b



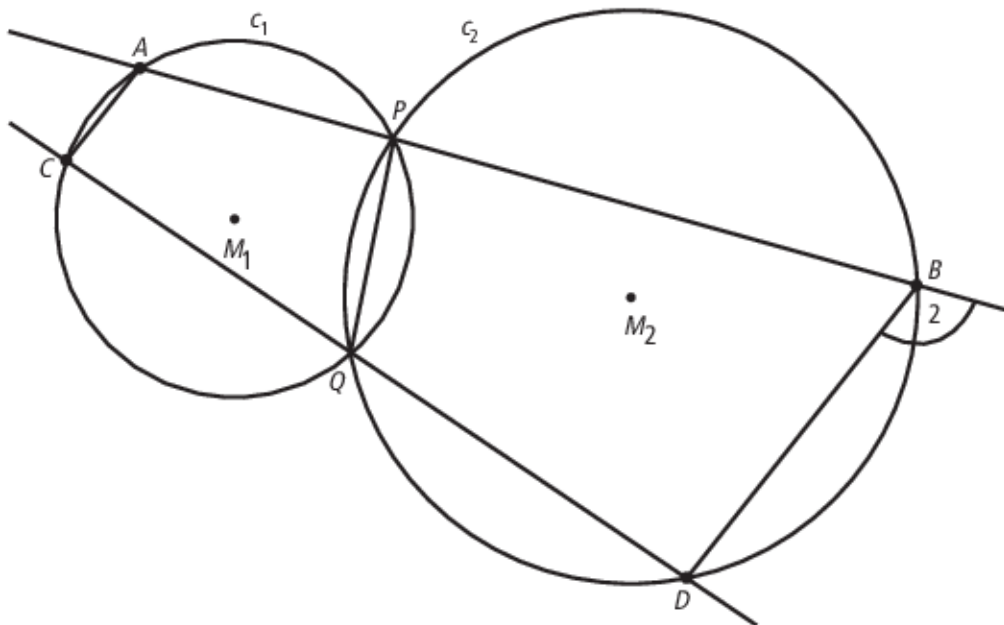
Hoek  $AMC$  kleiner dan  $180^\circ$  is  $\alpha$ .

Hoek  $AMC$  groter dan  $180^\circ$  is  $\beta$ .

Het verband tussen deze twee hoeken is  $\alpha + \beta = 360^\circ$ .

- c  $\angle ABC = \frac{1}{2}\beta$ , want de omtrekshoek op boog  $AC$  is de helft van de middelpuntshoek bij dezelfde boog.
- d  $\angle ADC = \frac{1}{2}\alpha$ , want de omtrekshoek op boog  $AC$  is de helft van de middelpuntshoek bij dezelfde boog.
- e  $\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \alpha) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$

**25** Eerst een analysefiguur tekenen.



Noem  $\angle CAP = \alpha$  (1).

Volgens de koordenvierhoekstelling is  $\angle CQP = 180^\circ - \angle CAP = 180^\circ - \alpha$ .

Een gestrekte hoek is  $180^\circ$ , dus  $\angle PQD = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$ .

Volgens de koordenvierhoekstelling is  $\angle PBD = 180^\circ - \angle PQD = 180^\circ - \alpha$ .

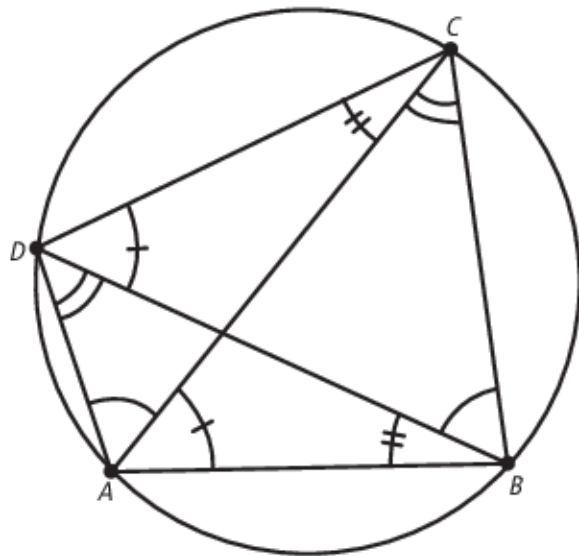
Een gestrekte hoek is  $180^\circ$ , dus  $\angle B_2 = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$  (2).

Uit (1) en (2) volgt:  $AC \parallel BD$  (F-hoeken).

**26a** Zie de tekening bij opdracht c.

- b  $\angle ACB = \angle ADB$ , want het zijn omtrekshoeken op dezelfde boog.

- c Gelijke tekens, gelijke hoeken.



Pagina 75:

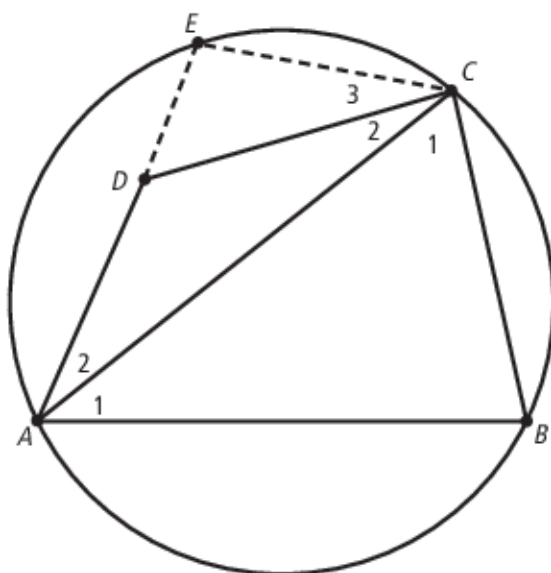
- 27 Gegeven: Vierhoek  $ABCD$  met  $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Te bewijzen:  $ABCD$  is een koordenvierhoek

Bewijs:

- a Teken de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$ .

We moeten nu bewijzen dat  $D$  ook op deze cirkel ligt.



- b Eerst kiezen we  $D$  binnen de cirkel. Verleng  $AD$  zodat deze de cirkel snijdt in punt  $E$ .

Teken  $DE$  en  $EC$ .

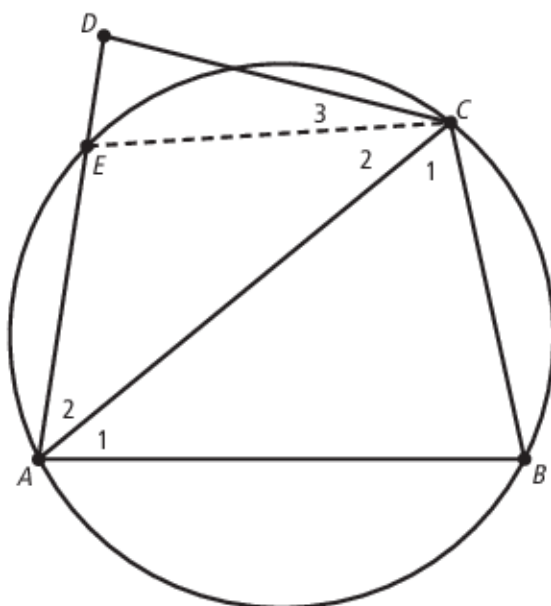
$ABCE$  is een koordenvierhoek  $\Rightarrow \angle A_{12} + \angle C_{123} = 180^\circ \Rightarrow \angle A_{12} + \angle C_{12} < 180^\circ$   
( $\angle C_3$  eraf) (1)

Hoekensom in  $ABCD$  geeft  $\angle A_{12} + \angle C_{12} + \angle B + \angle D = 360^\circ$  (2)

Uit (1) en (2) volgt:  $\angle B + \angle D > 180^\circ$ .

Dit is in tegenspraak met het gegeven  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ , dus  $D$  ligt niet binnen de cirkel.

- c Nu kiezen we  $D$  buiten de cirkel.  $AD$  snijdt de cirkel snijdt in punt  $E$ . Teken  $EC$ .



$ABCE$  is een koordenvierhoek  $\Rightarrow \angle A_{12} + \angle C_{12} = 180^\circ \Rightarrow \angle A_{12} + \angle C_{123} > 180^\circ$

( $\angle C_3$  erbij) (1)

Hoekensom in  $ABCD$  geeft  $\angle A_{12} + \angle C_{123} + \angle B + \angle D = 360^\circ$  (2)

Uit (1) en (2) volgt:  $\angle B + \angle D < 180$

Dit is in tegenspraak met het gegeven  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ , dus  $D$  ligt niet buiten de cirkel.

d Conclusie:  $D$  ligt op de cirkel.

28 Gegeven:  $\angle APB = \angle AQB$

Te bewijzen:  $ABPQ$  is een koordenvierhoek

Bewijs:

Door de punten  $A$ ,  $P$  en  $B$  is één cirkel te tekenen.

Punt  $Q$  ligt aan dezelfde kant van  $AB$  als  $P$ .

$\angle APB = \angle AQB$ , dus  $Q$  ligt op de cirkel door  $A$ ,  $P$  en  $B$  (*Omgekeerde stelling constante hoek*).

Als  $A$ ,  $B$ ,  $P$  en  $Q$  op één cirkel liggen is  $ABPQ$  is een koordenvierhoek.

29  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $AB$ ,  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $BC$  en  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $AC$ . Dus  $M$  is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABC$  met  $MA = MB = MC = r$  als straal.

Op dezelfde manier vind je:

$M$  ligt op de middelloodlijn van  $AB$ ,  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $BD$  en  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $AD$ . Dus  $M$  is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABD$  met  $MA = MB = MD = r$  als straal.

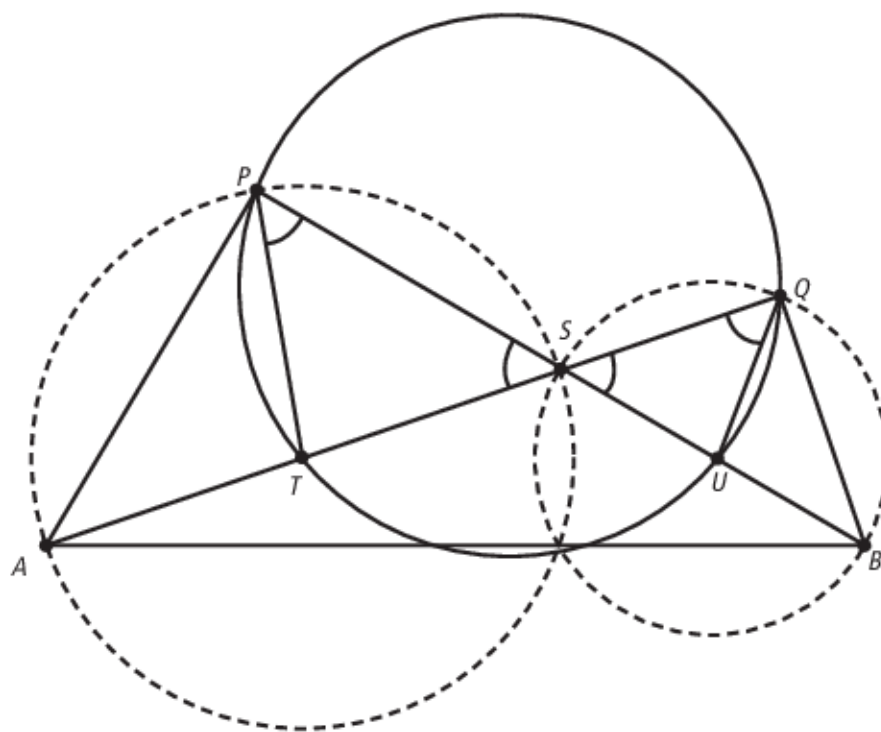
Deze twee cirkels vallen samen, dus gaat de cirkel door  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , en  $D$ .

Dus is  $ABCD$  een koordenvierhoek.

30 Gegeven:  $\angle P = 90^\circ$  en  $\angle Q = 90^\circ$

$T$  is het midden van  $AS$  en  $U$  is het midden van  $BS$

a Te bewijzen:  $\angle TPS = \angle TSP$



Bewijs:

$ASP$  is een rechthoekige driehoek, dus liggen  $A$ ,  $B$  en  $D$  op een cirkel met middellijn  $AS$  (*Stelling van Thales*) en middelpunt  $T$ .

Daaruit volgt dat  $\triangle STP$  gelijkbenig is, want  $PT = ST$  (straal), dus  $\angle TPS = \angle TSP$  (basishoeken).

- b Te bewijzen:  $TUPQ$  is een koordenvierhoek

Bewijs:

Teken  $PT$ ,  $QU$  en  $TU$ .

$\angle P = 90^\circ \Rightarrow \triangle ASP$  is rechthoekig en  $T$  is het midden van  $AS \Rightarrow A$ ,  $S$  en  $P$  liggen op een cirkel met middelpunt  $T \Rightarrow PT = ST \Rightarrow \angle TPS = \angle TSP$  (1)

$\angle Q = 90^\circ \Rightarrow \triangle BSQ$  is rechthoekig en  $U$  is het midden van  $BS \Rightarrow B$ ,  $S$  en  $Q$  liggen op een cirkel met middelpunt  $U \Rightarrow QU = SU \Rightarrow \angle UQS = \angle USQ$  (2)

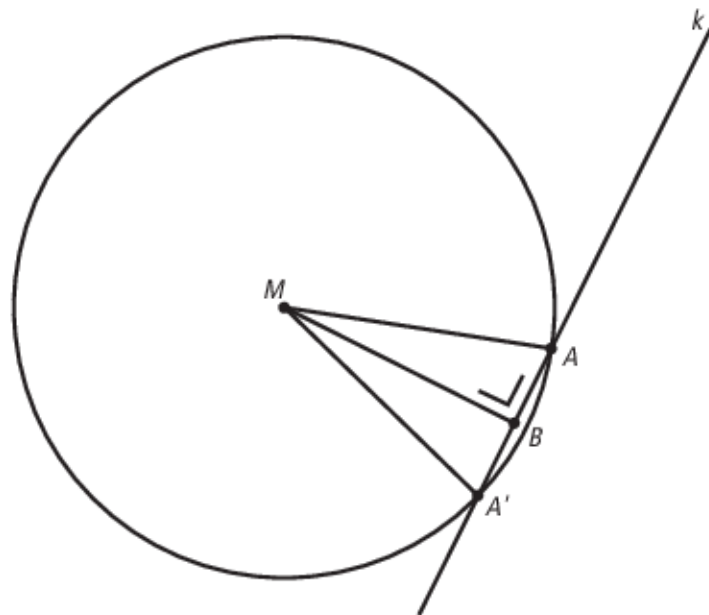
$\angle TSP = \angle USQ$  (overstaande hoeken), dus uit (1) en (2) volgt:  $\angle TPS = \angle UQS$ .

Driehoek  $PTS$  en driehoek  $QUS$  zijn gelijkvormig, dus met het resultaat van opgave 19 volgt dat  $T$ ,  $U$ ,  $Q$  en  $P$  op de omgeschreven cirkel liggen. Dus  $TUPQ$  is een koordenvierhoek.

### 3-5 Raaklijnen en hoeken

Pagina 76:

31a



In de rechthoekige driehoek  $ABM$  is  $MA$  de schuine zijde, dus geldt  $MB < MA$ .

- b Punt  $B$  ligt binnen de cirkel.

- c Kies op  $k$  punt  $A'$  met  $AB = A'B$ .

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B \\ MB = MB \\ \angle B_1 = \angle B_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle A'BM \text{ (ZHZ)}$$

Hieruit volgt  $MA = MA'$ , dus  $A'$  ligt ook op de cirkel.

Dit is in tegenspraak met het gegeven dat  $k$  een raaklijn is. (Een raaklijn heeft maar één gemeenschappelijk punt met de cirkel.)

Dus de aanname  $\angle A \neq 90^\circ$  is niet waar, hieruit volgt  $MA \perp k$ .

- 32 De omgekeerde stelling luidt:

Als een lijn door een punt van een cirkel loodrecht staat op de verbindingslijn van dat punt met het middelpunt, dan is de lijn een raaklijn aan de cirkel.



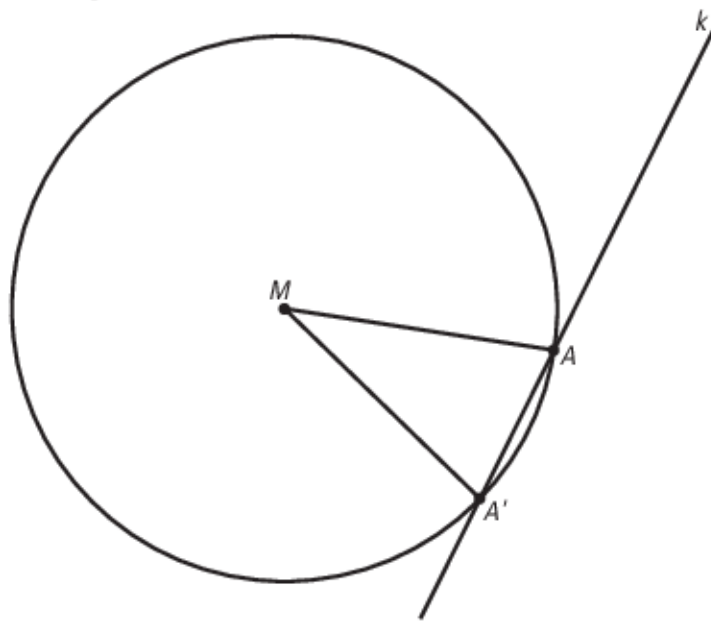
Gegeven: een cirkel met middelpunt  $M$ .

een punt  $A$  op de cirkel

lijn  $k$  door  $A$  en  $MA \perp k$

Te bewijzen:  $k$  is een raaklijn.

Bewijs:



Stel  $k$  is geen raaklijn, dan is er nog een ander punt  $A'$  waar  $k$  de cirkel snijdt.

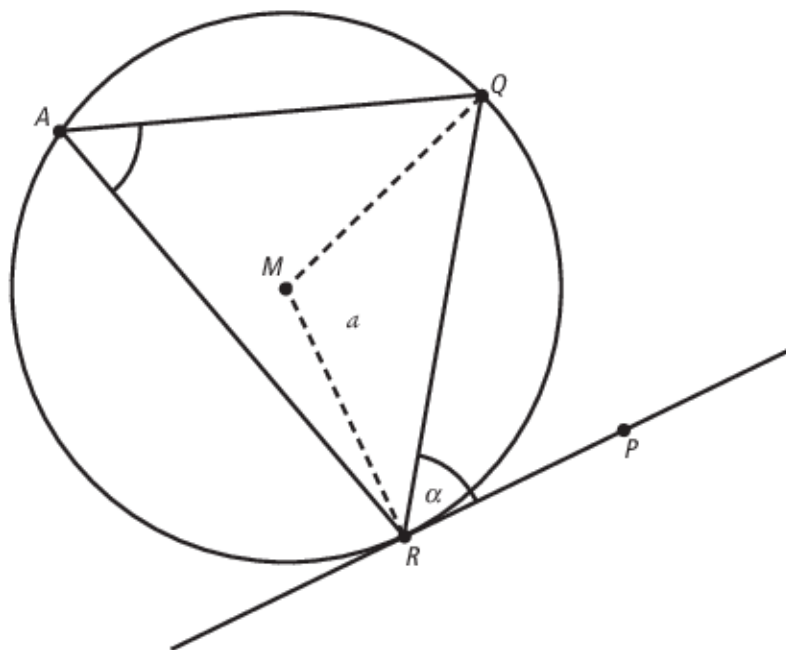
$\triangle AMA'$  is gelijkbenig, dus  $\angle MA'A = \angle MAA'$ .

Uit het gegeven  $MA \perp k$  volgt dan dat  $\triangle AMA'$  een driehoek is met twee rechte hoeken, dat is onmogelijk.

Dus de veronderstelling dat  $k$  geen raaklijn is, is onjuist.

Hiermee is bewezen dat  $k$  een raaklijn is.

- 33a**  $\angle MRP = 90^\circ$  (stelling *Raaklijn aan cirkel*)
- b** Als  $\angle PRQ$  gelijk is aan de omtrekshoek bij de koorde  $QR$  en als  $\angle QMR$  gelijk is aan de middelpuntshoek bij koorde  $QR$ , dan moet gelden  $\angle PRQ = \frac{1}{2} \angle QMR$ .
- c** Teken de stralen naar  $R$  en  $Q$ .



Bewijs:

Noem  $\angle PRQ = \alpha$ . (1)

$\angle MRP = 90^\circ \Rightarrow \angle MRQ = 90^\circ - \alpha$ .

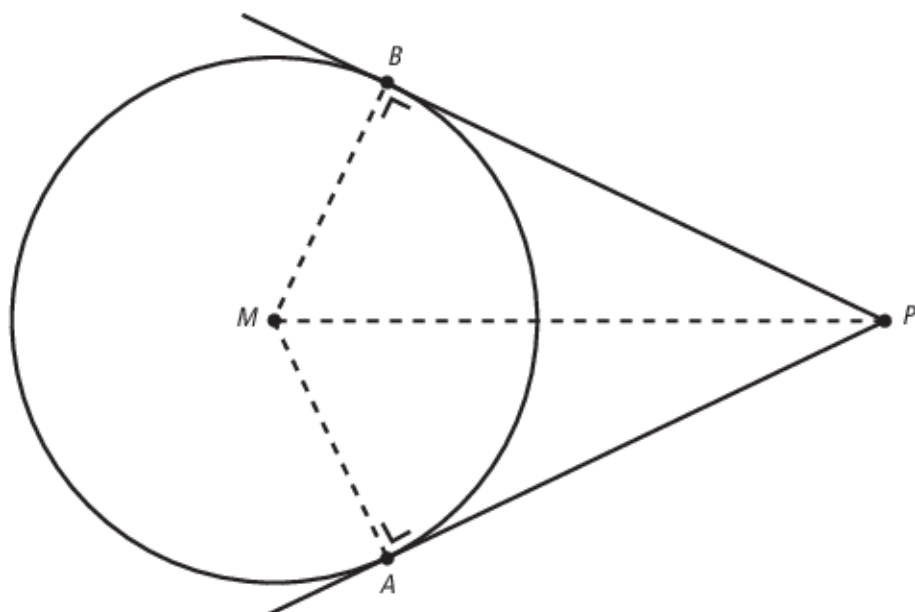
$MR = MQ$  (straal) dus  $\angle MQR = \angle MRQ = 90^\circ - \alpha$ .

Hoekensom in  $\triangle MRQ$  geeft  $\angle QMR = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 2\alpha$ . (2)

Uit (1) en (2) volgt  $\angle PRQ = \frac{1}{2} \angle QMR$ .



34a Teken hulplijnstukken  $PM$ ,  $MA$  en  $MB$ .

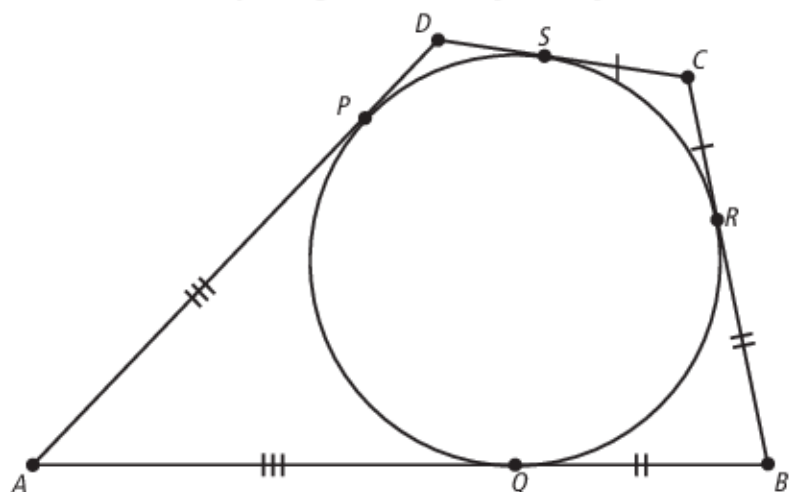


$$\left. \begin{array}{l} PM = PM \\ \angle A = \angle B = 90^\circ \\ MA = MB \text{ (straal)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PMA \cong \triangle PMB \text{ (ZZR)}$$

Hieruit volgt  $PA = PB$ .

Pagina 77:

35 Eerst een analysefiguur, raaklijnstukjes markeren.



Gelijke raaklijnstukjes hebben gelijke markering.

Met het resultaat van opdracht 34 volgt:

$$AQ = AP$$

$$BQ = BR$$

$$CS = CR$$

$$DS = DP$$

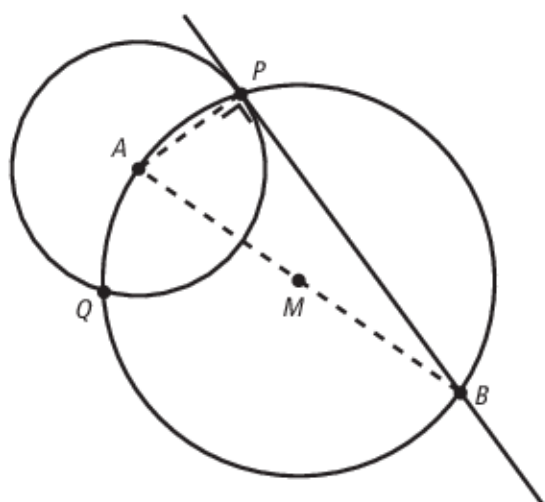
Links en rechts optellen geeft:

$$AQ + BQ + CS + DS = AP + BR + CR + DP$$

Slim bij elkaar nemen geeft:

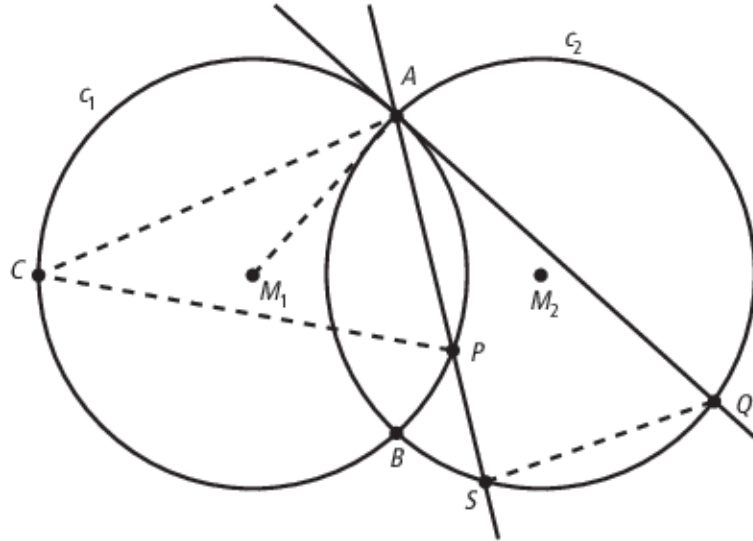
$$AB + CD = BC + AD$$

36



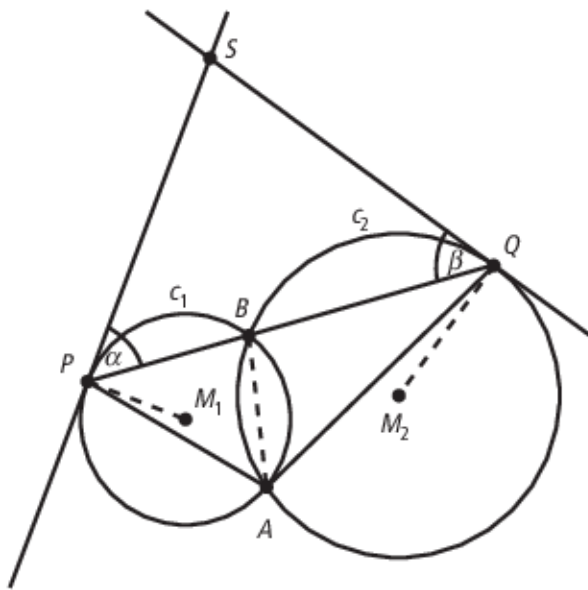
Lijn  $BP$  is raaklijn, hieruit volgt  $AP \perp BP$  (stelling *Raaklijn aan cirkel*).  
 In driehoek  $ABP$  geldt  $\angle P = 90^\circ$ , dus  $A$ ,  $B$  en  $P$  liggen op een cirkel met middellijn  $AB$  (*Omgekeerde stelling van Thales*). Punt  $M$  ligt ook op die middellijn.  
 Conclusie:  $A$ ,  $M$  en  $B$  liggen op één lijn.

- 37** Eerst een analysefiguur maken. Teken een omtrekshoek op boog  $AP$  in cirkel  $c_1$ .



Volgens de stelling *Hoek tussen raaklijn en koorde* is  $\angle PAQ = \angle ACP$ .  
 In cirkel  $c_2$  is  $\angle PAQ = \angle SAQ$ .  
 Samen geeft dit  $\angle ACP = \angle SAQ$ .  
 Omdat de cirkels even groot zijn, geldt nu boog  $AP =$  boog  $SQ$ .  
 Hieruit volgt met de stelling *Boog en koorde* dat de bijbehorende koorden ook even lang zijn:  $AP = QS$ .

- 38a** Teken een analysefiguur. Teken daarin hulplijn  $AB$ . Noem  $\angle SPQ = \alpha$  en  $\angle SQP = \beta$ .

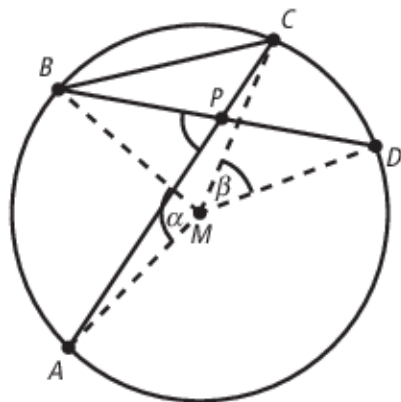


In driehoek  $PQS$  is  $\angle PSQ = 180^\circ - \alpha - \beta$ .  
 Volgens de stelling *Hoek tussen raaklijn en koorde* is  $\angle BAP = \angle BPS = \alpha$  en  $\angle BAQ = \angle BQS = \beta$ .  
 Dan is  $\angle PAQ = \angle BAP + \angle BAQ = \alpha + \beta$ .  
 Hieruit volgt dat  $\angle PSQ + \angle PAQ = 180^\circ - \alpha - \beta + \alpha + \beta = 180^\circ$ .  
 Volgens de *Omgekeerde koordenvierhoekstelling* is  $AQSP$  een koordenvierhoek.

## 3-6 Gemengde opdrachten

Pagina 78:

39a

b Noem  $\angle AMB = \alpha$  en  $\angle CMD = \beta$ .

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2}\alpha \text{ en } \angle CBD = \frac{1}{2}\angle CMD = \frac{1}{2}\beta.$$

c In  $\triangle BCP$  is de hoekensom:  $\angle BPC + \angle PCB + \angle CBP = 180^\circ$ .

Invullen geeft:

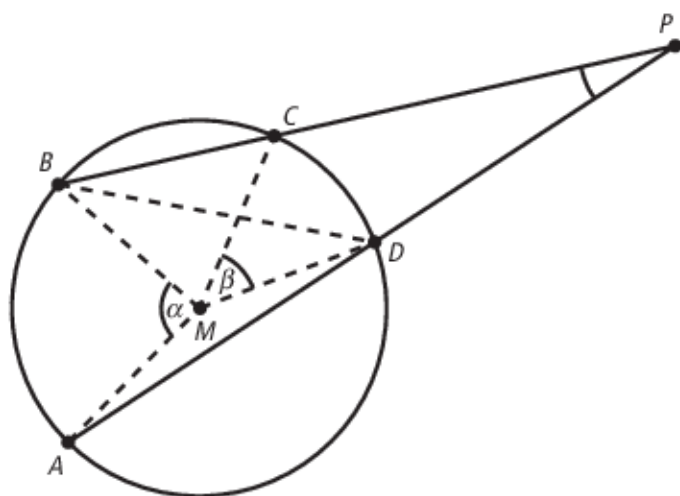
$$\angle BPC + \angle ACB + \angle CBD = \angle BPC + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 180^\circ \Rightarrow \angle BPC = 180^\circ - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta).$$

Een gestrekte hoek is  $180^\circ$ , dus

$$\angle APB = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - (180^\circ - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta.$$

Hieruit volgt  $\angle APB = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD)$ .

d

e Noem  $\angle AMB = \alpha$  en  $\angle CMD = \beta$ .

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2}\alpha \text{ en } \angle CBD = \frac{1}{2}\angle CMD = \frac{1}{2}\beta.$$

f  $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2}\alpha$ , dus is  $\angle PDB = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$  (gestrekte hoek).In  $\triangle BDP$  is de hoekensom:  $\angle BPD + \angle PDB + \angle DBP = 180^\circ$ .

Invullen geeft:

$$\angle BPD + (180^\circ - \frac{1}{2}\alpha) + \frac{1}{2}\beta = 180^\circ \Rightarrow \angle BPD = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta.$$

Hieruit volgt  $\angle APB = \frac{1}{2}(\angle AMB - \angle CMD)$ .

40a Zie de tekening in het boek.

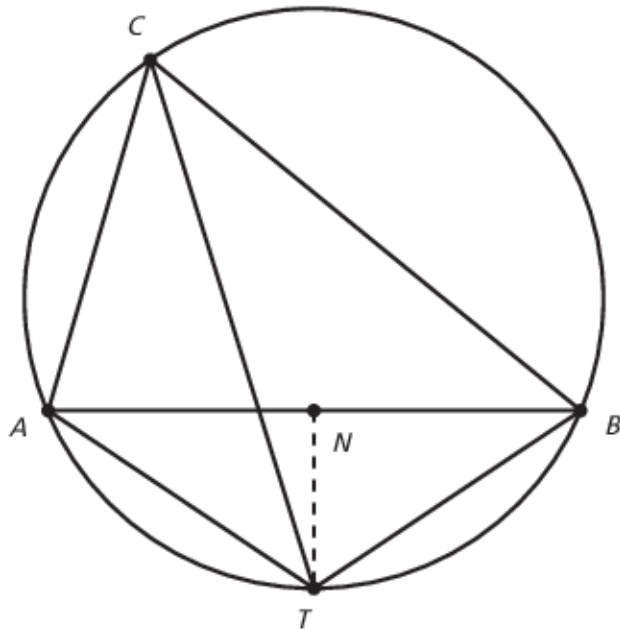
b De driehoeken  $ABR$  en  $ACR$  zijn rechthoekige driehoeken (*Stelling van Thales*).

c In een parallellogram zijn overstaande zijden even lang en evenwijdig en de diagonalen delen elkaar middendoor.

Gebruik voor het bewijs de definitie van een parallellogram: twee paren evenwijdige zijden.

d  $CQ \perp AB$  (hoogtelijn) en  $RB \perp AB$  (*Thales*), dus  $CH \parallel RB$ . $BP \perp AC$  (hoogtelijn) en  $RC \perp AC$  (*Thales*), dus  $BH \parallel RC$ .Conclusie:  $CHBR$  is een parallellogram.

- 41a**  $S$  is het snijpunt van de deellijn uit hoek  $C$  en de middelloodlijn van  $AB$ .  
 $T$  is het snijpunt van de deellijn uit hoek  $C$  en de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABC$ .  
 Als  $S$  en  $T$  samenvallen dan ligt  $S$  op de omgeschreven cirkel.
- b**  $T$  ligt op de deellijn van  $\angle C$ , dus  $\angle ACT = \angle BCT$ . Hieruit volgt dat boog  $AT$  gelijk is aan boog  $BT$ .
- c** Bij gelijke bogen horen gelijke koorden, dus  $AT = BT$ .  
 Teken een loodlijn vanuit  $T$  op  $AB$ .  $N$  is het snijpunt van de loodlijn en  $AB$ .



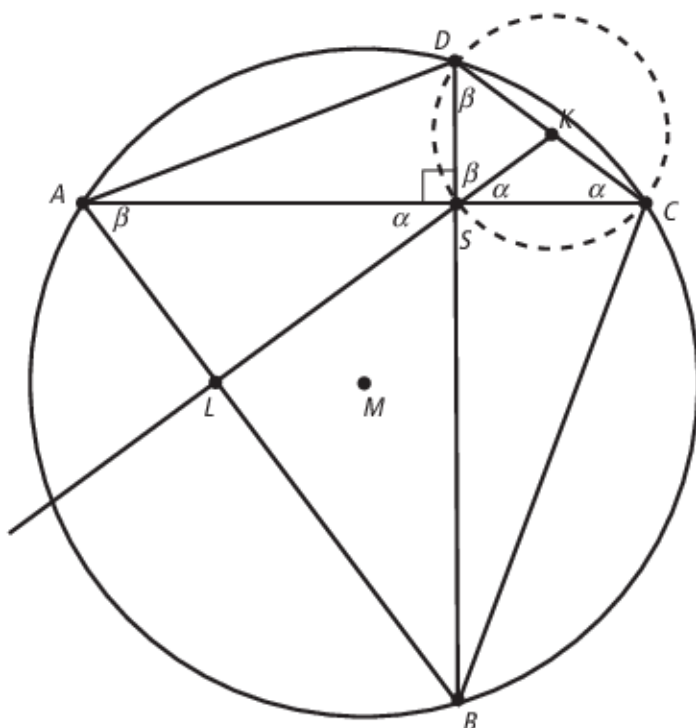
$TN = TN$   
 $AT = BT$  (gelijke bogen, gelijke koorden)  
 $\angle ANT = \angle BNT$  (loodlijn)

$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ATN \cong \triangle BTN \text{ (ZZH)}$

$\Rightarrow AN = BN$  en  $\angle ANT = \angle BNT = 90^\circ \Rightarrow T$  ligt op de middelloodlijn van  $AB$ .

- d**  $T$  ligt op de middelloodlijn van  $AB$ , dus  $T$  is het snijpunt van de middelloodlijn van  $AB$  en de bissectrice van  $\angle C$ .  $S$  is het snijpunt van de bissectrice van  $\angle C$  en de middelloodlijn van  $AB$ .  
 Twee lijnen kunnen slechts één snijpunt hebben, dus  $S = T$ .  
 Punt  $T$  was het snijpunt van de bissectrice met de cirkel, dus ligt  $S$  op de cirkel.

- 42** Gegeven:  
 Koordenvierhoek  $ABCD$  met  $AC \perp BD$   
 $K$  is het midden van  $CD$   
 Te bewijzen:  $\angle ASL = \angle KCS$   
 Bewijs:





$\angle S = 90^\circ$ , hieruit volgt dat  $K$  het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van  $\triangle CSD$  (*Omgekeerde stelling van Thales*).

$$\left. \begin{array}{l} KC = KS \text{ (straal)} \Rightarrow \angle KCS = \angle KSC \\ \angle KSC = \angle ASL \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle KCS = \angle ASL$$

**b** Te bewijzen:  $KL \perp AB$

Bewijs:

Noem  $\angle KSC = \alpha$ , dus  $\angle ASL = \angle KCS = \alpha$  (zie a).

Noem  $\angle KSD = \beta$ .

$KS = KD$ , hieruit volgt  $\angle KDS = \angle KSD = \beta$ .

Er geldt:  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

Er geldt ook  $\angle SAL = \angle CAB = \angle CDB = \angle KDS = \beta$  (omtrekshoek op  $BC$ ).

Dan is  $\angle ALS = 180 - \alpha - \beta = 90^\circ$  en dus  $AB \perp KL$ .

## Test jezelf

Pagina 82:

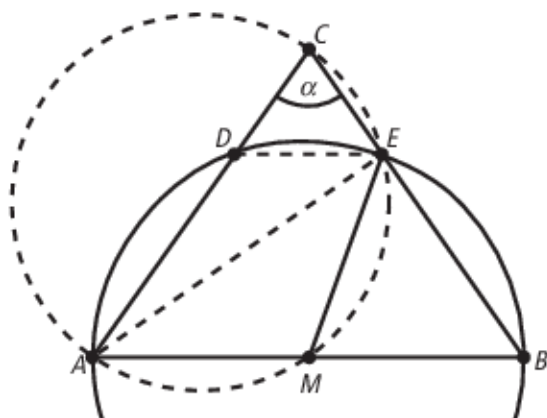
**T-1a**  $\angle ABC = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$

**b**  $\angle AEB = 90^\circ$  (*Thales*), dus  $\angle AEC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$  (*gestrekte hoek*).

Hieruit volgt dat  $\angle CAE = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ .

**c**  $\alpha < 90^\circ$

**d**



$$\angle ACE = \alpha$$

$$\angle MAC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha \text{ (basishoek in gelijkbenige driehoek } ABC)$$

$$\angle MEB = \angle MBE = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha \text{ (gelijkbenige driehoek } MBE)$$

$$\text{Dus } \angle MEC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha \text{ (gestrekte hoek)}$$

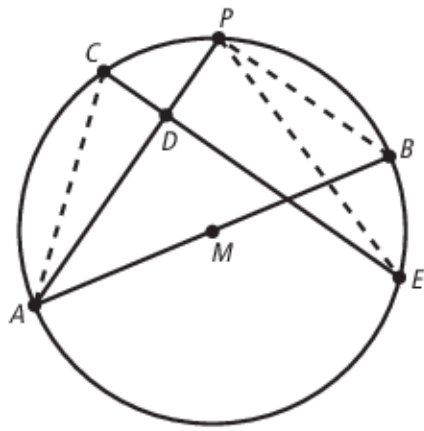
$$\angle BME = 180^\circ - 2(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = \alpha \text{ (tophoek in gelijkbenige driehoek } MBE)$$

$$\text{Dus } \angle AME = 180^\circ - \alpha \text{ (gestrekte hoek)}.$$

**e** In vierhoek  $AMEC$  geldt  $\angle MAC + \angle MEC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha = 180^\circ$ , dus vierhoek  $AMEC$  is een koordenvierhoek (*Omgekeerde koordenvierhoekstelling*). Elk punt van de koordenvierhoek ligt op de omgeschreven cirkel van de driehoek die gevormd wordt door de overige punten van de koordenvierhoek. Dus ook  $M$ .



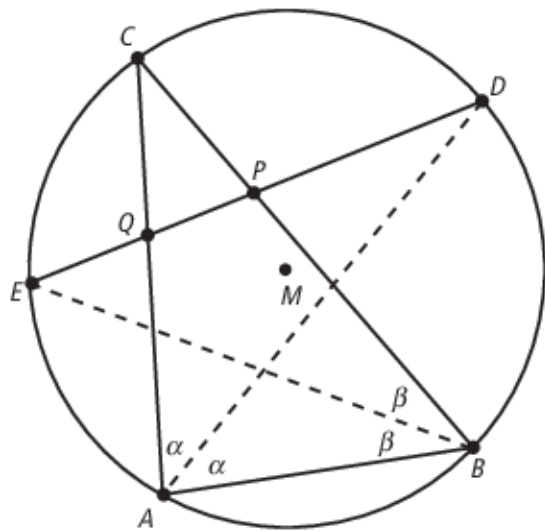
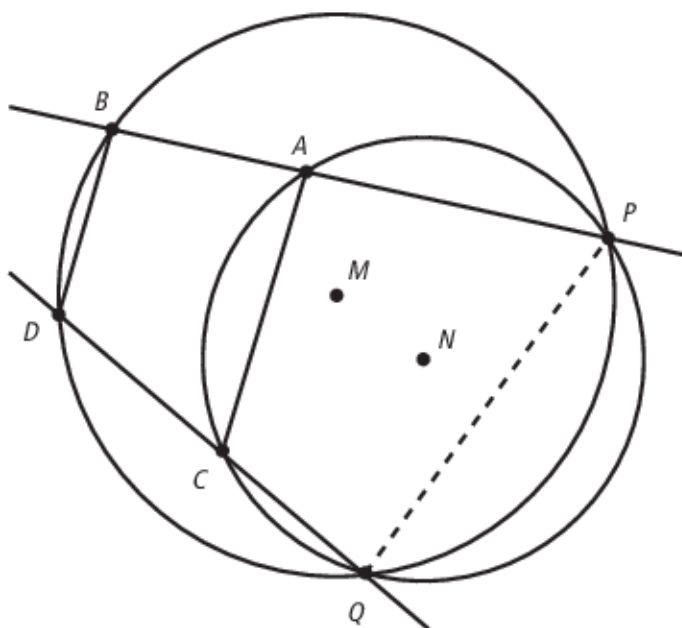
T-2a



Bewijs:

 $AP \perp PB$  (Thales) en  $AP \perp CE$  (gegeven)Daaruit volgt:  $PB \parallel CE$ 

- b** Hulplijn  $PE$  levert twee gelijke Z-hoeken:  $\angle PEC = \angle BPE$ .  
**c**  $\angle BAE = \angle BPE$  (omtrekshoeken op dezelfde boog)  
 $\angle PAC = \angle PEC$  (omtrekshoeken op dezelfde boog)  
 De resultaten van b en c geven  $\angle BAE = \angle PAC$ .

T-3a Noem  $\angle CAB = 2\alpha$  en  $\angle ABC = 2\beta$ . $\angle ADE = \angle ABE = \beta$  (omtrekshoek op  $AE$ ) $\angle BED = \angle BAD = \alpha$  (omtrekshoek op  $BD$ )
 $\angle AQD = 180^\circ - \alpha - \beta$  (hoekensom in driehoek  $AQD$ )  $\Rightarrow \angle CQP = \alpha + \beta$   
 (gestrekte hoek)
Net zo is  $\angle EPB = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \angle QPC = \alpha + \beta$ Dus in  $\triangle CPQ$  zijn de hoeken bij  $P$  en  $Q$  gelijk, dus geldt  $CP = CQ$ .T-4a  $PACQ$  en  $PBDQ$  zijn koordenvierhoeken.

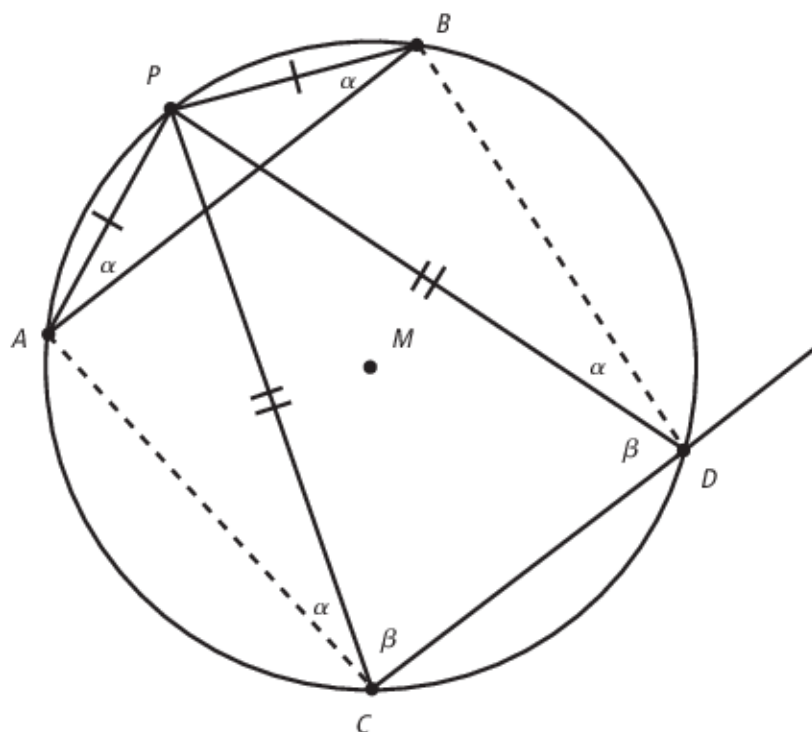
- b**  $\angle P + \angle ACQ = 180^\circ$  (Koordenvierhoekstelling)  
 $\angle P + \angle D = 180^\circ$  (Koordenvierhoekstelling)  
 Dus  $\angle D = \angle ACQ \Rightarrow AC \parallel BD$  (F-hoeken).

Pagina 83:

**T-5a**  $\angle PQR$

- b**  $\angle TRB = \angle BAR$  (hoek tussen raaklijn en koorde)  
**c**  $ABQP$  een koordenvierhoek, dus  $\angle BAP + \angle Q = 180^\circ$  (Koordenvierhoekstelling)  
 $\angle BAR + \angle BAP = 180^\circ$  (gestrekte hoek)  $\Rightarrow \angle BAR = \angle Q$  (1)  
 Uit (1) en b volgt dat  $\angle Q = \angle TRB$ .  
 Omdat deze hoeken een Z-figuur vormen, geldt:  $t \parallel PQ$ .

**T-6** Noem  $\angle PAB = \angle PBA = \alpha$ .



Hieruit volgt  $\angle ACP = \angle BDP = \alpha$  (omtrekshoeken op  $PA, PB$ ).

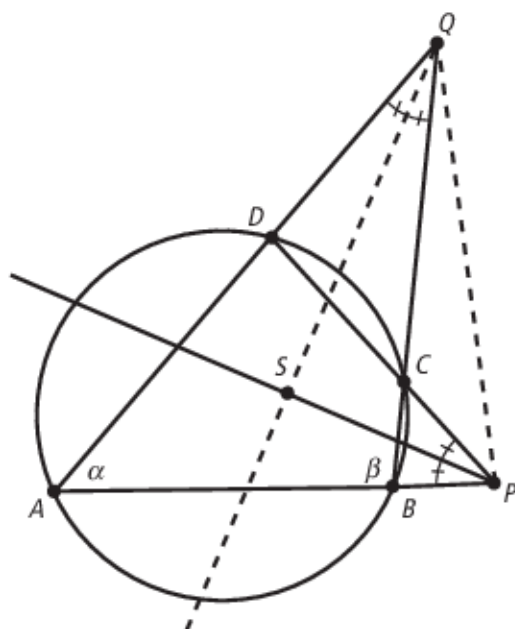
Noem  $\angle PCD = \angle PDC = \beta$ .

$ABDC$  is een koordenvierhoek, dus  $\angle ABD = 180 - \alpha - \beta$ .

Ook is  $\angle CDB = \alpha + \beta$ , dus de hoek tussen  $BD$  en het verlengde van  $CD$  is  $180^\circ - \alpha - \beta$ .

Hieruit volgt  $AB \parallel CD$  (Z-hoeken).

**T-7** Noem  $\angle BAD = \alpha$  en  $\angle ABC = \beta$ .



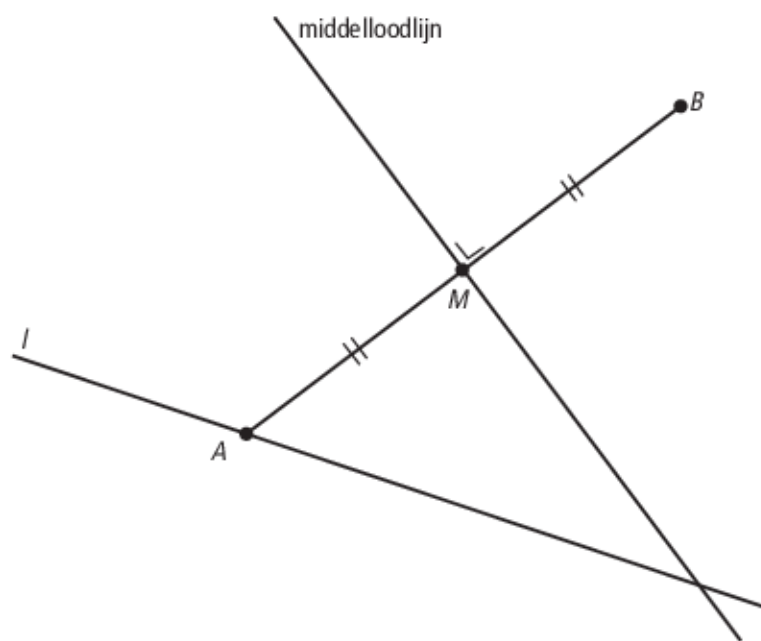
- a**  $ABCD$  is een koordenvierhoek, dus  $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow \angle BCD = 180^\circ - \alpha$ .  
 $\angle PCQ = \angle BCD$  (overstaande hoeken).  
 $\angle PCQ + \angle CQP + \angle CPQ = 180^\circ$  (hoekensom  $\triangle CPQ$ )  
 Invullen geeft  $(180^\circ - \alpha) + \angle CQP + \angle CPQ = 180^\circ$ .  
 Hieruit volgt  $\angle CQP + \angle CPQ = \alpha = \angle BAD$ .
- b**  $ABCD$  is een koordenvierhoek, dus  $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - \beta$   
 $\angle DAP + \angle APD + \angle ADP = 180^\circ$  (hoekensom  $\triangle APD$ ).  
 Invullen geeft  $\alpha + \angle APD + 180^\circ - \beta = 180^\circ$ .  
 Hieruit volgt  $\angle APD = \beta - \alpha \Rightarrow \angle BPS = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha$ .  
 Verder geldt  $90^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ADC) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + 180^\circ - \beta) = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha$ .  
 Dus  $\angle BPS = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ADC)$ .
- c**  $\angle BAD + \angle ABQ + \angle AQB = 180^\circ$  (hoekensom  $\triangle ABQ$ )  
 Invullen geeft  $\alpha + \beta + \angle AQB = 180^\circ \Rightarrow \angle AQB = 180^\circ - \alpha - \beta$ .  
 Hieruit volgt  
 $\angle CQS = \frac{1}{2}\angle AQB = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAD - \frac{1}{2}\angle ABC$ .
- d**  $\angle PSQ + \angle SQP + \angle SPQ = 180^\circ$  (hoekensom  $\triangle SPQ$ )  
 Invullen van c en b geeft  
 $\angle PSQ + (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \angle CQP) + (\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha + \angle CPQ) = 180^\circ$ .  
 Hieruit volgt  $\angle PSQ - \alpha + \angle CQP + \angle CPQ = 90^\circ$ .  
 Bij a is bewezen  $\angle CQP + \angle CPQ = \alpha$ , dus  $\angle PSQ - \underbrace{\alpha + \angle CQP + \angle CPQ}_{= \alpha} = 90^\circ \Rightarrow \angle PSQ = 90^\circ$ .  
 Dus  $PS \perp QS$ .

# Hoofdstuk 4 – Teken en bewijs

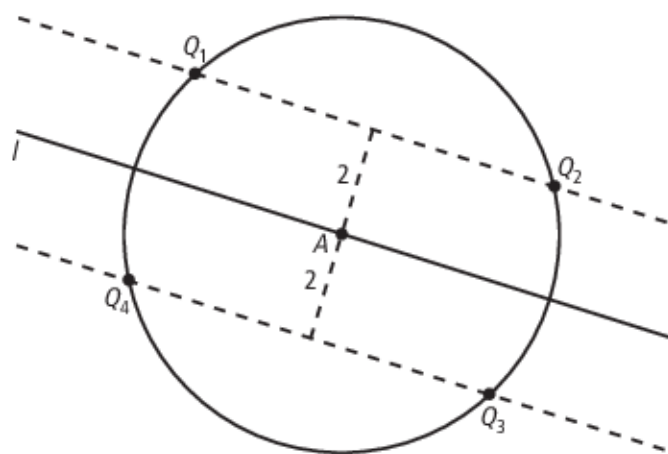
## Voorkennis: Meetkundige plaatsen

Pagina 86:

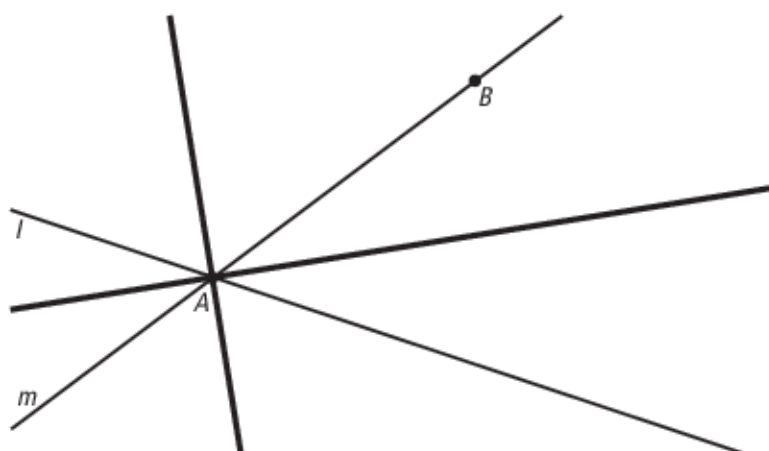
- V-1ab** De meetkundige plaats van de punten die gelijke afstand hebben tot  $A$  en  $B$  is de middelloodlijn van  $AB$ .



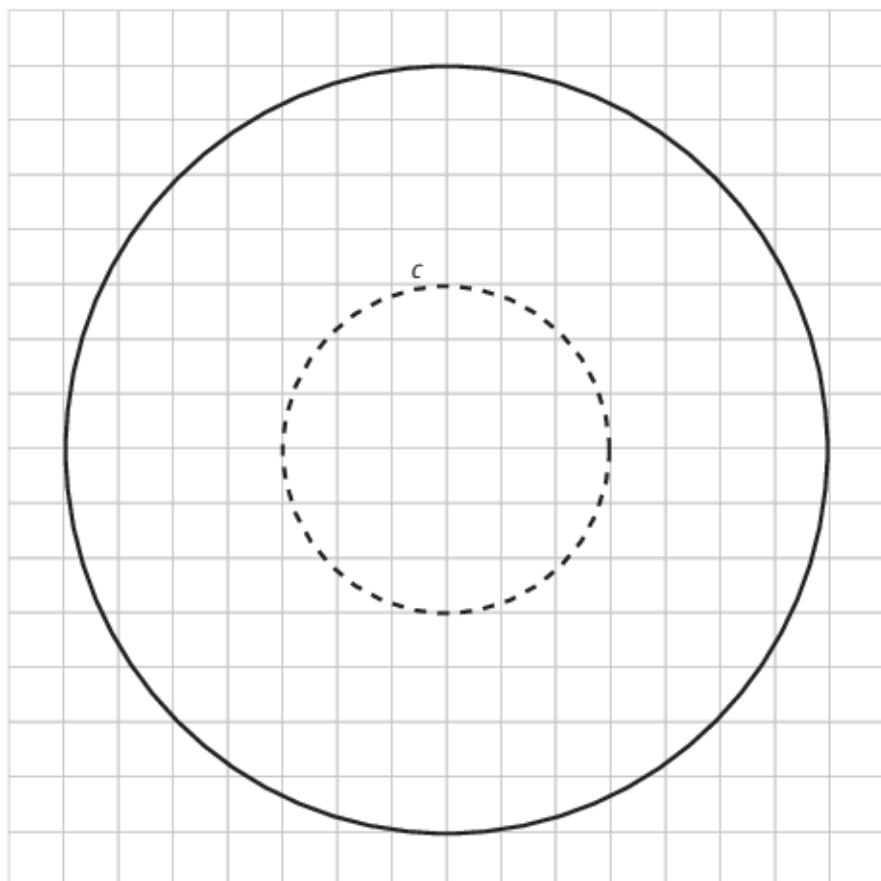
- c** De punten  $Q$  waarvoor geldt dat  $d(Q, A) = 4$  cm liggen op een cirkel met middelpunt  $A$  en straal 4 cm.  
De punten  $Q$  waarvoor geldt dat  $d(Q, l) = 2$  cm liggen op twee lijnen evenwijdig aan  $l$  en op afstand 2 cm van  $l$ .



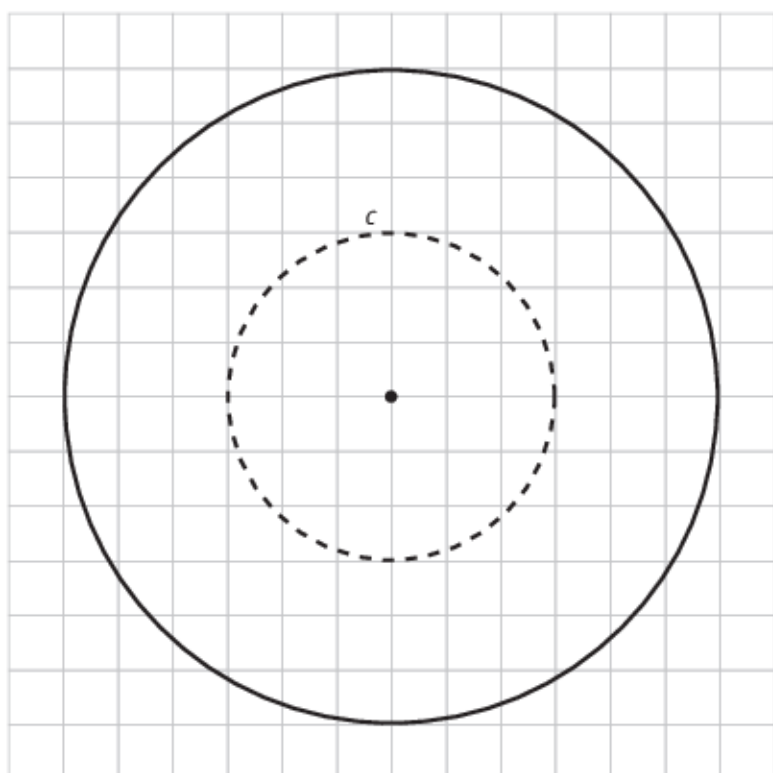
- d** De punten die gelijke afstand hebben tot  $l$  en  $m$  liggen op het tweetal bissectrices van de hoeken tussen  $l$  en  $m$ .



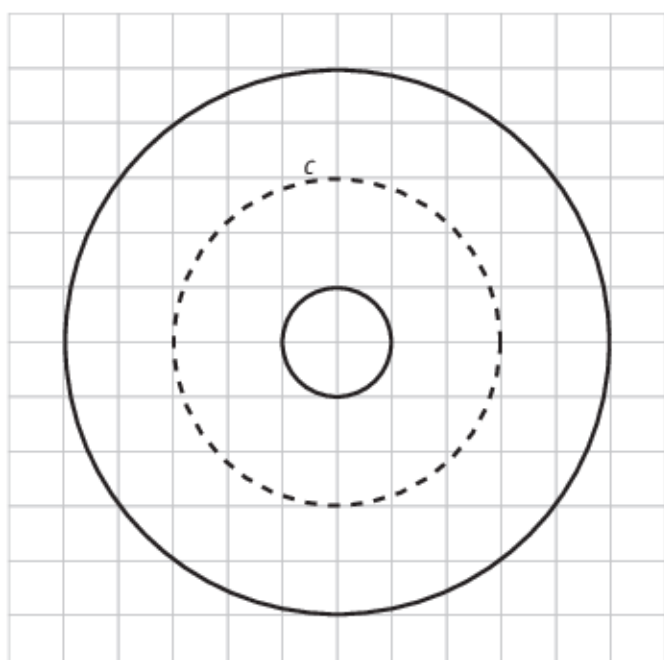
- V-2a** De meetkundige plaats bestaat uit een cirkel met straal 7 en hetzelfde middelpunt als  $c$ .



- b** De meetkundige plaats bestaat uit een cirkel met straal 6 en hetzelfde middelpunt als  $c$ , samen met het middelpunt van  $c$  zelf.



- c** De gevraagde meetkundige plaats bestaat uit twee cirkels met hetzelfde middelpunt als  $c$ , één met straal 1 en één met straal 5.

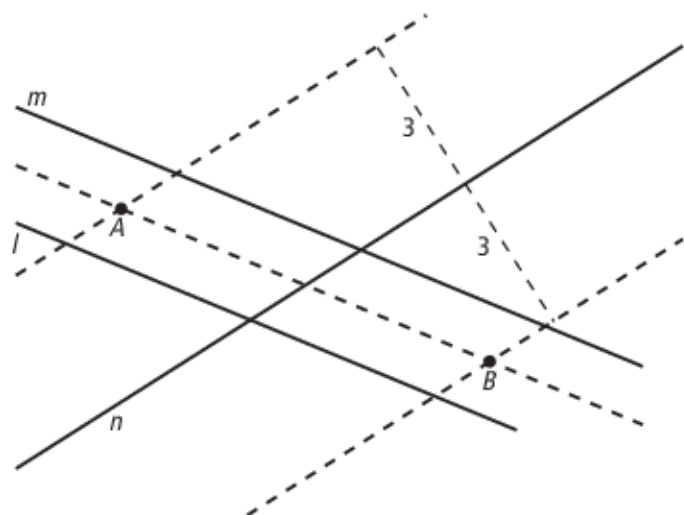




**V3-abc** De meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van  $l$  en  $m$  liggen is de middenparallel van  $l$  en  $m$ .

De meetkundige plaats van de punten die op afstand 3 cm van  $n$  liggen zijn de punten op twee lijnen evenwijdig aan  $n$  op afstand 3 cm van  $n$ .

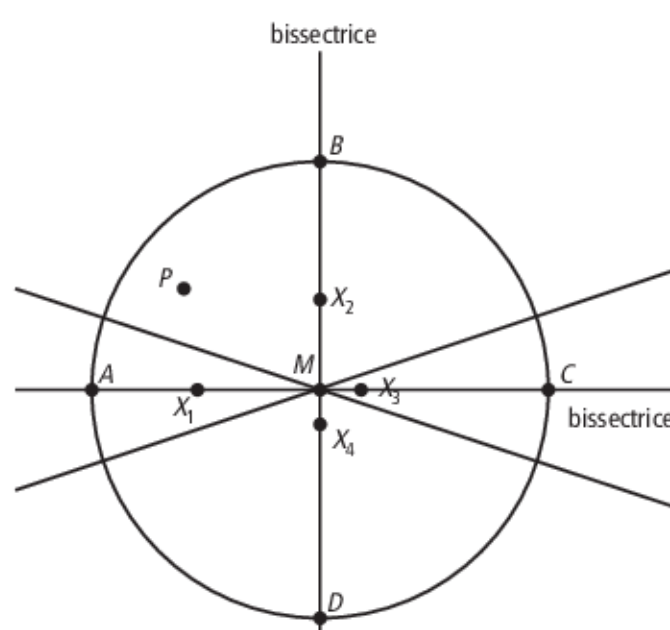
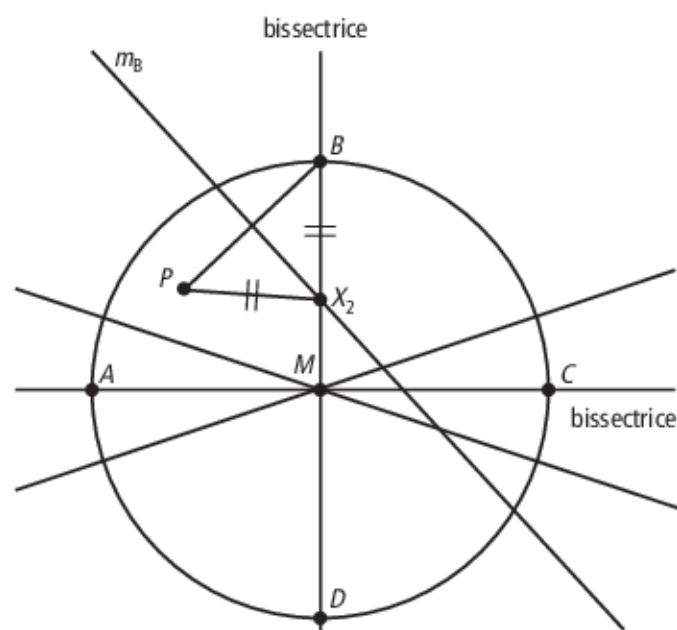
De snijpunten van de gestippelde lijnen zijn de gezochte punten  $A$  en  $B$ .



**V-4** De meetkundige plaats van de punten  $X$  die gelijke afstand hebben tot de beide lijnen is het bissectricepaar van snijdende lijnen.

De meetkundige plaats van de punten  $X$  waarvoor geldt dat  $d(X, P) = d(X, c)$  liggen op de middelloodlijn van punt  $P$  en de snijpunten  $A, B, C$  en  $D$  van de cirkel en de bissectrices.

In het linkerplaatje zie je de constructie van één van de gevraagde punten en in het rechterplaatje de vier gevraagde punten.



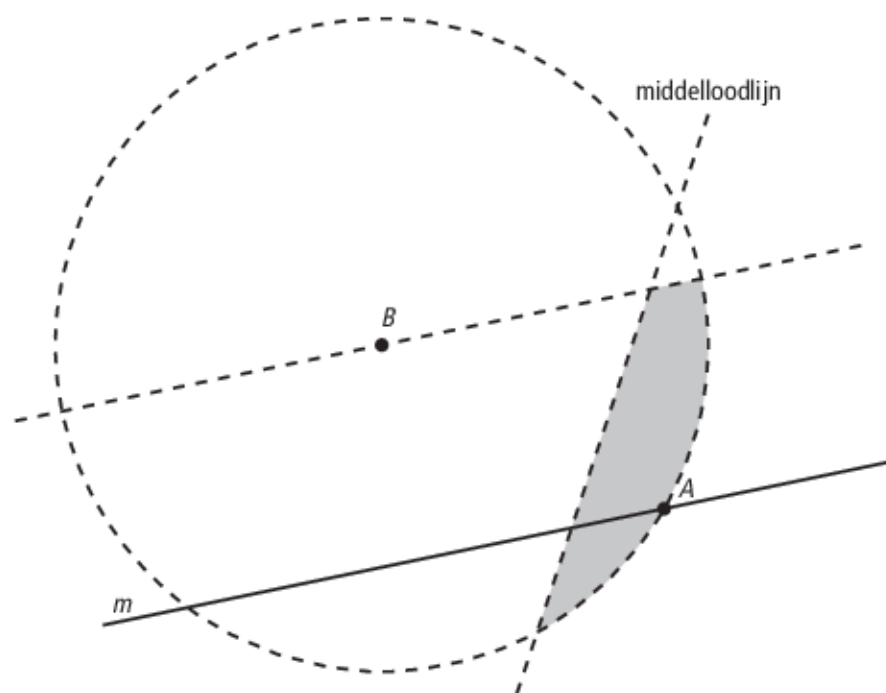
**Pagina 87:**

**V-5** De meetkundige plaats van de punten  $X$  waarvoor geldt dat  $d(X, B) < 3$  cm liggen binnen een cirkel met middelpunt  $B$  en een straal van 3 cm.

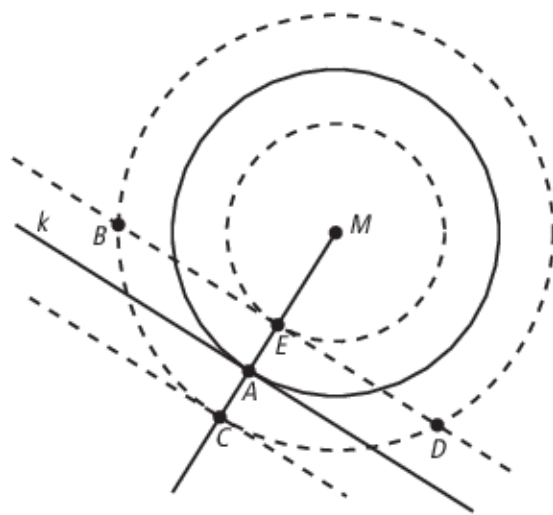
De meetkundige plaats van de punten  $X$  waarvoor geldt dat  $XA < XB$  liggen in het vlakdeel begrensd door de middelloodlijn van  $AB$  aan de kant van  $A$ .

De meetkundige plaats van de punten  $X$  waarvoor geldt dat  $d(X, m) < 2$  cm is het gebied tussen twee lijnen evenwijdig aan  $m$  op afstand 2 cm van  $m$ .

De drie voorwaarden samen geven het gearceerde gebied.



**V-6a** De doorsnede van de gestippelde cirkels en de twee gestippelde lijnen is de verzameling van de gezochte vier punten  $B$ ,  $C$ ,  $D$  en  $E$ .



| $a$               | $a = 0$  | $0 < a < 3$ | $a = 3$                  | $a > 3$                             |
|-------------------|----------|-------------|--------------------------|-------------------------------------|
| aantal snijpunten | 1        | 4           | 4                        | 3                                   |
| bijzonderheden    | raakpunt | -           | $E$ valt samen met $M$ . | Er is geen cirkel binnen de cirkel. |

**V-7a** De meetkundige plaats van de punten  $N$  is de verzameling punten van lijn  $l$ , met uitzondering van punt  $M$ .

**b** De meetkundige plaats van de punten  $A$  is de verzameling punten op cirkel  $c_1$ .

## 4-1 Bewijzen bij meetkundige plaatsen

Pagina 88:

- 1a**  $M$  is het middelpunt van de cirkel. Voor de punten op de cirkel geldt:  
 $MA = MB = r$ , dus  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $AB$ .  
 $MB = MC = r$ , dus  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $BC$ .  
 $MC = MD = r$ , dus  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $CD$ .  
 $MD = MA = r$ , dus  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $DA$ .  
 De middelloodlijnen van  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  en  $DA$  gaan door één punt namelijk  $M$ .

- b**  $M$  ligt op de middelloodlijn van  $PQ$ , dus  $MP = MQ$ .  
 $M$  ligt op de middelloodlijn van  $QR$ , dus  $MQ = MR$ .  
 $M$  ligt op de middelloodlijn van  $RS$ , dus  $MR = MS$ .  
 $M$  ligt op de middelloodlijn van  $SP$ , dus  $MS = MP$ .  
 Er geldt dus:  $MP = MQ = MR = MS$ , noem deze lengte  $r$ .  
 Dus de punten  $P, Q, R$  en  $S$  liggen op een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $r$ .
- c** Vier punten  $A, B, C$  en  $D$  liggen op een cirkel  $\Leftrightarrow$  de middelloodlijnen van  $AB, BC, CD$  en  $DA$  gaan door één punt.

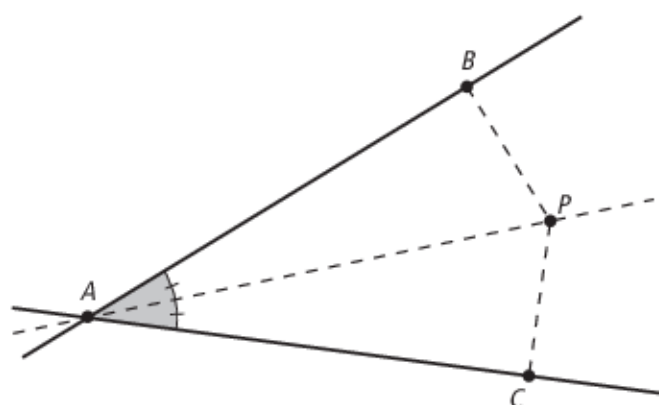
**2** Te bewijzen:  $P$  ligt op de bissectrice van  $\angle BAC \Leftrightarrow d(P, AB) = d(P, AC)$

**a** Gegeven:  $P$  ligt op de bissectrice van  $\angle BAC$

Te bewijzen:  $d(P, AB) = d(P, AC)$

Bewijs:

$B$  en  $C$  zijn de voetpunten van de loodlijnen uit punt  $P$ . De analysefiguur ziet er als volgt uit:



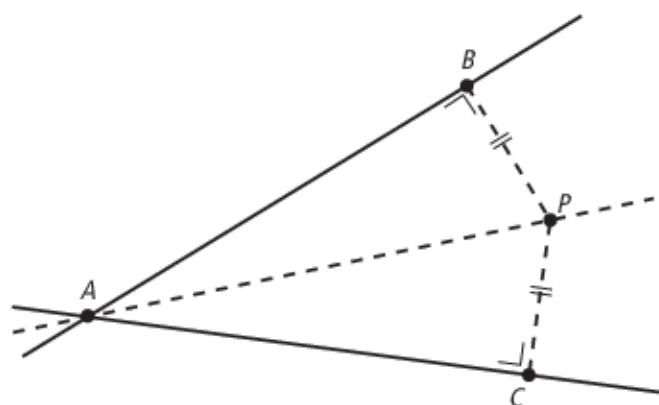
$$\left. \begin{array}{l} \angle BAP = \angle CAP \text{ (bissectrice)} \\ AP = AP \\ \angle ABP = \angle ACP = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABP \cong \triangle ACP \text{ (ZHH)}$$

Hieruit volgt  $BP = CP$ , dus  $d(P, AB) = d(P, AC)$ .

**b** Gegeven:  $d(P, AB) = d(P, AC)$ , dus  $BP = CP$  en  $\angle ABP = \angle ACP = 90^\circ$ .

Te bewijzen:  $P$  ligt op de bissectrice van  $\angle BAC$ .

Bewijs:



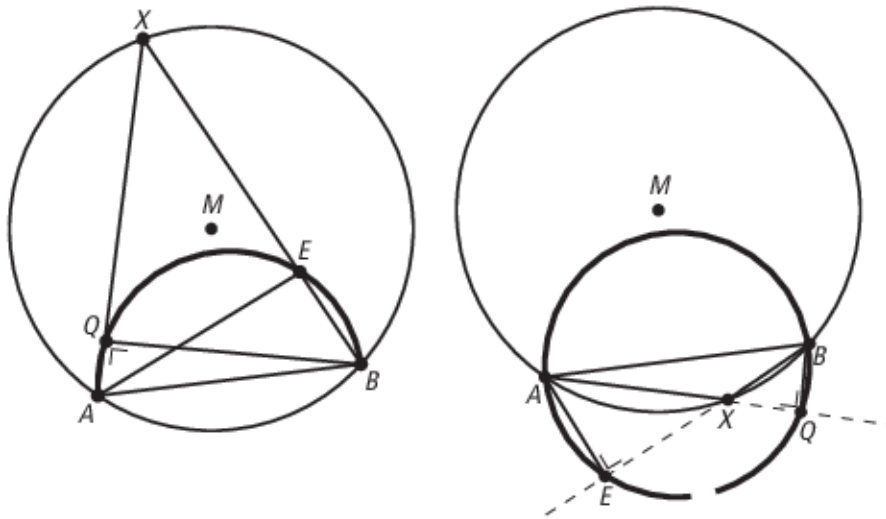
$$\left. \begin{array}{l} BP = CP \text{ (gegeven)} \\ AP = AP \\ \angle ABP = \angle ACP = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABP \cong \triangle ACP \text{ (ZZR)}$$

Hieruit volgt  $\angle BAP = \angle CAP$ , dus  $P$  ligt op de bissectrice van  $\angle BAC$ .

Pagina 89:

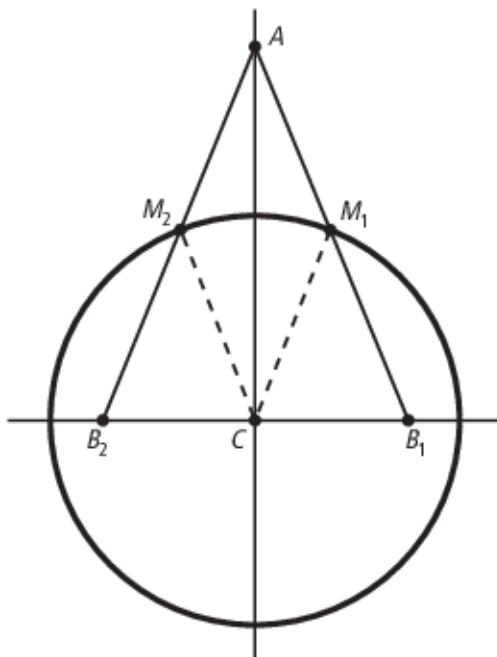
- 3a  $\triangle ABE$  is rechthoekig met  $\angle AEB = 90^\circ$ , dan ligt punt  $E$  op een cirkel met middellijn  $AB$  (Omgekeerde stelling van Thales) met uitzondering van de punten  $A$  en  $B$ .

b



$\triangle ABQ$  is rechthoekig met  $\angle AQB = 90^\circ$ , dan ligt punt  $Q$  op een cirkel met middellijn  $AB$  (Omgekeerde stelling van Thales) met uitzondering van de punten  $A$  en  $B$ .  
Er is maar één cirkel met gegeven middellijn  $AB$ , dus de punten  $E$  en de punten  $Q$  liggen op dezelfde cirkel.

4



In een rechthoekige driehoek is de lengte van de zwaartelijn uit de rechte hoek de helft van de schuine zijde. Dus  $CM = \frac{1}{2}AB$  en gegeven is dat  $AB$  constant is. Hieruit volgt dat de meetkundige plaats van de punten  $M$  een cirkel is met middelpunt  $C$  en straal  $CM = \frac{1}{2}AB$ .

## 4-2 Meetkundige plaatsen met de constante hoek

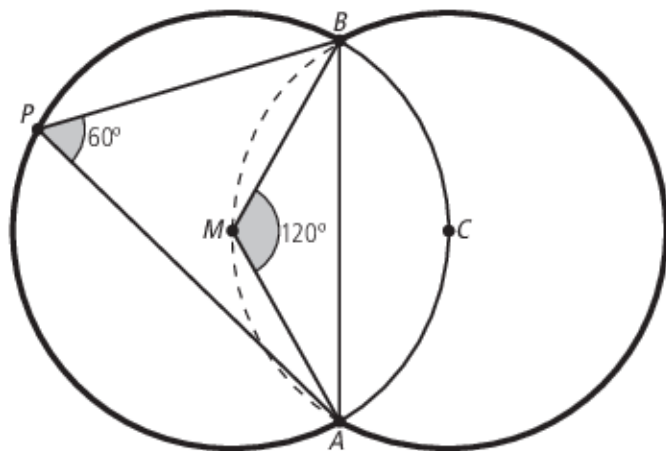
Pagina 90:

- 5 Uit stelling 1 volgt dat voor elk willekeurig punt  $P$  op de cirkel door  $A$ ,  $B$  en  $C$  en aan dezelfde kant van  $AB$  als  $C$ , geldt  $\angle APB = \angle ACB$ .  
Dus elk punt op de cirkel tussen  $A$  en  $B$  aan dezelfde kant van  $AB$  als  $C$  voldoet hieraan. Uit stelling 2 volgt dat elk willekeurig punt  $P$  dat aan dezelfde kant van  $AB$  als  $C$  ligt en waarvoor geldt  $\angle APB = \angle ACB$ , op de cirkel door  $A$ ,  $B$  en  $C$  ligt.  
Hieruit volgt dat de meetkundige plaats van de punten  $P$  gelijk is aan de cirkelboog  $AB$  die door  $C$  gaat.

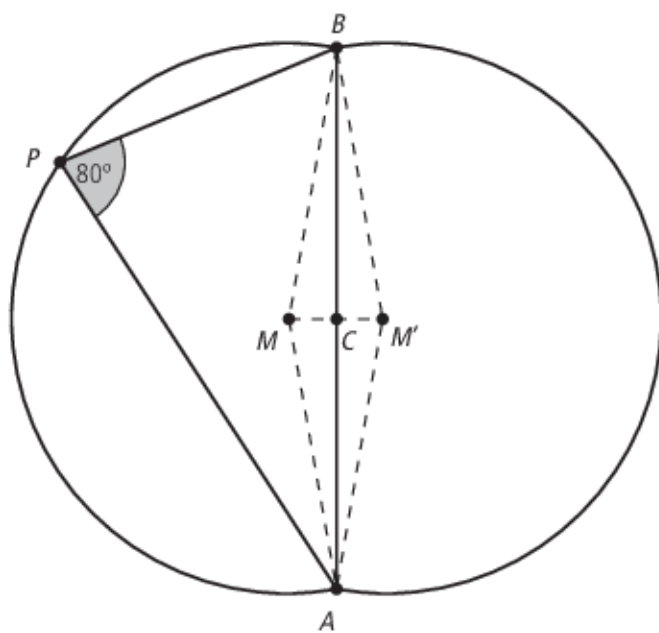


## Pagina 91:

- 6a** Zie de tekening bij opdracht b. Een hoek van  $120^\circ$  hoort bij een derde deel van een cirkel.  
De hoek kun je construeren door een tweede cirkel te tekenen met als middelpunt een punt van de eerste cirkel en dezelfde straal.
- b** De meetkundige plaats van de punten  $P$  met  $\angle APB = 60^\circ$  is de cirkelboog waarvan de omstrekhoeck  $60^\circ$  is en de cirkelboog die ontstaat door de eerste boog te spiegelen in de lijn  $AB$ .



- 7a**  $\angle APB = 80^\circ$ , dan ligt punt  $P$  op een cirkelboog met middelpunt  $M$  met middelpuntshoek  $\angle AMB = 160^\circ$ .  
Teken dan een gelijkbenige driehoek  $AMB$  met  $AB = 5$  cm en een tophoek van  $160^\circ$ , en dus basishoeken van  $10^\circ$ . De straal van de cirkelboog is  $MB$ . Teken de cirkelboog en zijn spiegelbeeld.

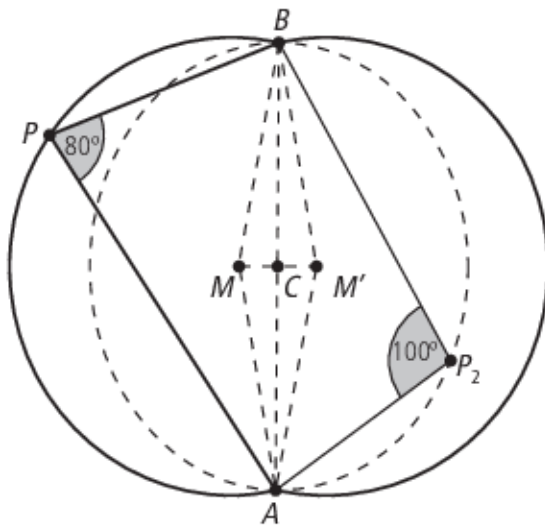


- b**  $\triangle MCA$  heeft een rechte hoek bij punt  $C$ . Verder geldt  $AC = \frac{1}{2} AB = 2\frac{1}{2}$ .

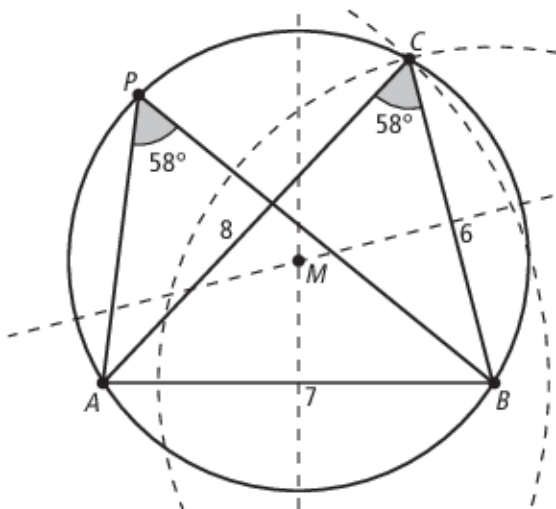
$$\cos \angle MAC = \frac{AC}{AM} \Rightarrow AM = \frac{AC}{\cos \angle MAC} = \frac{2\frac{1}{2}}{\cos 10^\circ} \approx 2,54$$



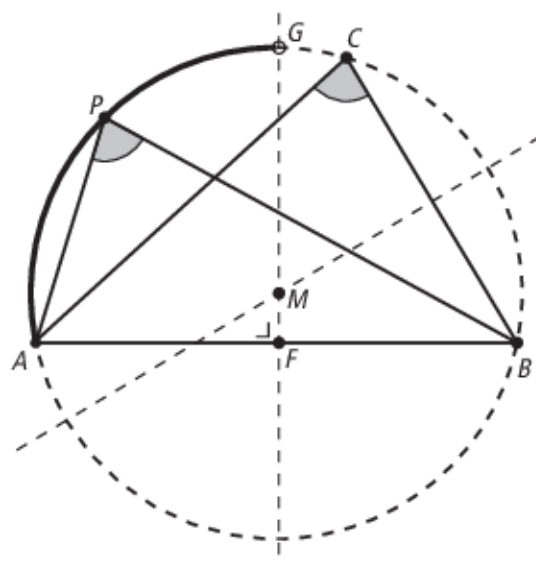
- 8 Het zijn precies de andere cirkelbogen, de gestippelde bogen.



- 9a Om  $\triangle ABC$  te tekenen, teken je bijvoorbeeld eerst lijnstuk  $AB = 7$ .  
 Dan teken je een cirkelboog met middelpunt  $A$  en straal  $AC = 8$  en daarna een cirkelboog met middelpunt  $B$  en straal  $BC = 6$ . Het snijpunt van de cirkelbogen is het gezochte punt  $C$ .  
 Zie tekening bij b.
- b De meetkundige plaats van de punten  $P$  waarvoor geldt dat  $\angle APB = \angle ACB$  is een cirkelboog met koorde  $AB$ . Het is een deel van de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$ .  
 Het middelpunt  $M$  is het snijpunt van de middelloodlijnen van  $AB$  en  $BC$ .



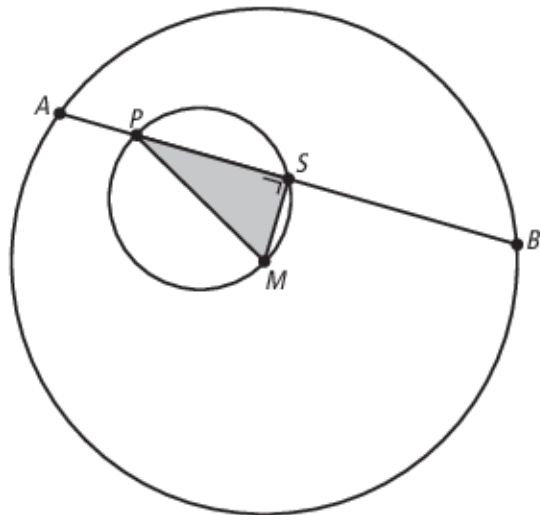
- 10ab Het begin van deze opdracht is hetzelfde als de vorige opdracht.  
 De middelloodlijn van  $AB$  verdeelt het vlak in twee delen, de extra voorwaarde  $d(P, A) < d(P, B)$  beperkt de meetkundige plaats tot het deel van de cirkelboog dat zich in het vlakdeel van  $A$  bevindt.



### 4-3 Cirkelbogen

**Pagina 92:**

11a



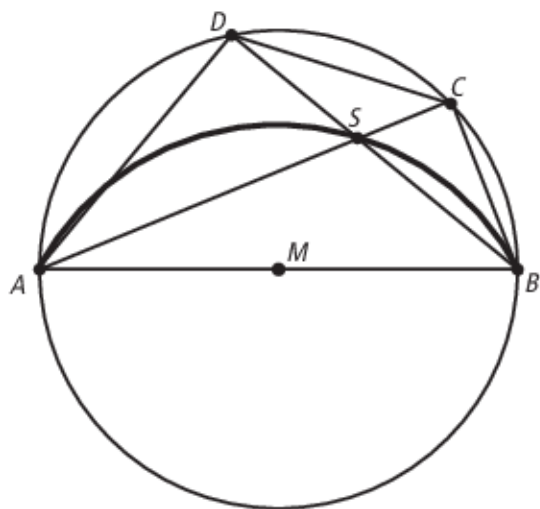
De meetkundige plaats van punten  $S$  is een cirkel met middellijn  $MP$ .

- b** Punt  $S$  is het midden van  $AB$ . Volgens de omgekeerde stelling van *Loodlijn op koorde* is  $MS \perp AB$ .

$\triangle MPS$  heeft een rechte hoek bij  $S$ , dan ligt  $S$  op een cirkel met middellijn  $MP$   
(Omgekeerde stelling van Thales)

- 12a**  $AB$  is een middellijn. Hieruit volgt  $\angle ADB = 90^\circ$  (*Stelling van Thales*).  
Als  $\angle CAD = \alpha$  dan is  $\angle ASD = 90^\circ - \alpha$  (*hoekensom in  $\triangle ADS$* ).

**b**

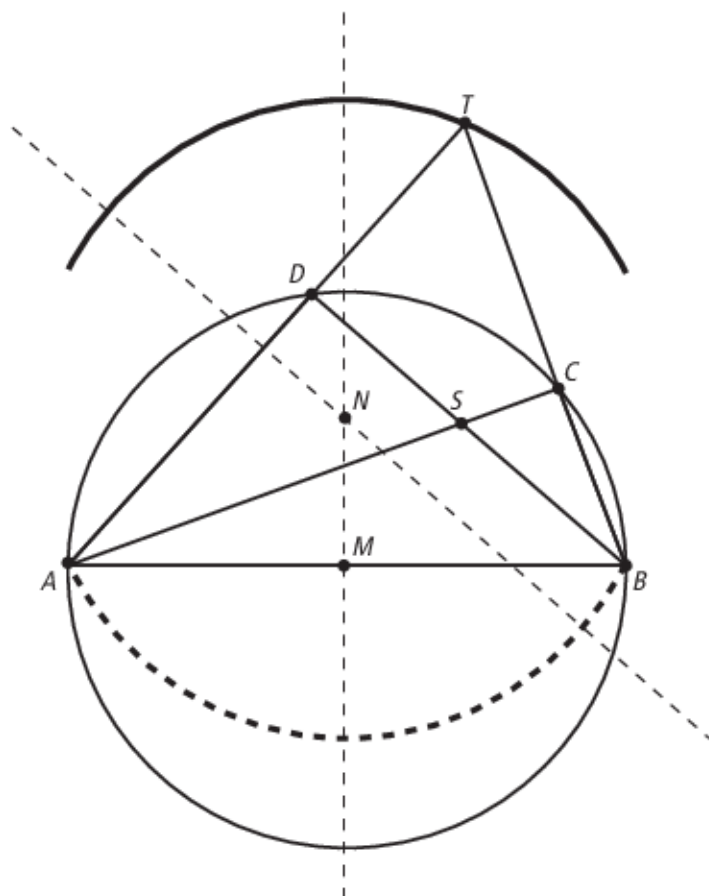

$$\angle ASB = 180^\circ - \angle ASD = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha \text{ (gestrekte hoek)}.$$

$\angle CAD = \alpha$  is een constante hoek, omdat lijnstuk  $CD$  een vaste lengte heeft.

Hieruit volgt dat de meetkundige plaats van de verzameling van punten  $S$  met  $\angle ASB = 90^\circ + \alpha$  een cirkelboog is (*Omgekeerde stelling van de constante hoek*).

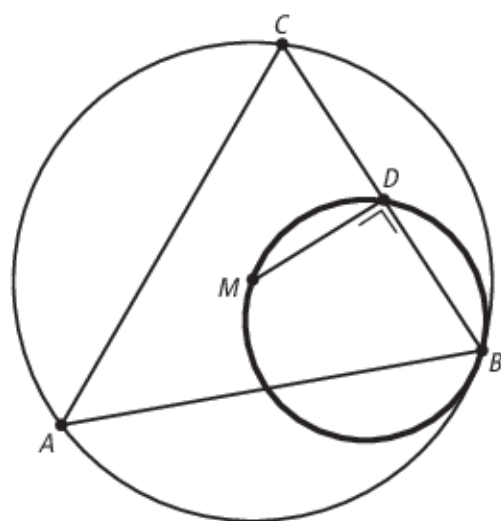
**Pagina 93:**

13a



- b** In  $\triangle ACB$  is  $\angle ACB = 90^\circ$  (*Stelling van Thales*).  
Hieruit volgt dat in  $\triangle ACT$  geldt  $\angle ATC = 90^\circ - \alpha$ .  
 $\angle CAD = \alpha$  is een constante hoek, omdat lijnstuk  $CD$  een vaste lengte heeft.  
Hieruit volgt dat de meetkundige plaats van de verzameling van punten  $T$  met  $\angle ATB = 90^\circ - \alpha$  een cirkelboog is (*Omgekeerde stelling van de constante hoek*).
- c** De cirkel van vraag b is de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABT$ .  
Teken de middelloodlijnen van  $AB$  en  $AT$ , het snijpunt  $N$  is het gezochte middelpunt van de cirkel.

14ab Zie tekening.



De meetkundige plaats is een cirkel, met middellijn  $BM$ .

Toelichting: Volgens de omkering van de stelling *Loodlijn op koorde* is  $MD$  een loodlijn op koorde  $BC$ .

Driehoek  $BMD$  is rechthoekig in  $D$ , dus beschrijft punt  $D$  een cirkel met middellijn  $BM$  (*Omgekeerde stelling van Thales*).

**15a** Gegeven:  $\triangle ABP$  op cirkel en  $XP = AP$

Te bewijzen:  $\angle AXP = \frac{1}{2} \angle APB$

Bewijs:

Stel  $\angle AXP = \alpha$ .

$XP = AP \Rightarrow \angle AXP = \angle XAP = \alpha$  (1)

Hoekensom in  $\triangle APX$  geeft  $\angle APX = 180^\circ - \angle AXP - \angle XAP = 180^\circ - 2\alpha$ .

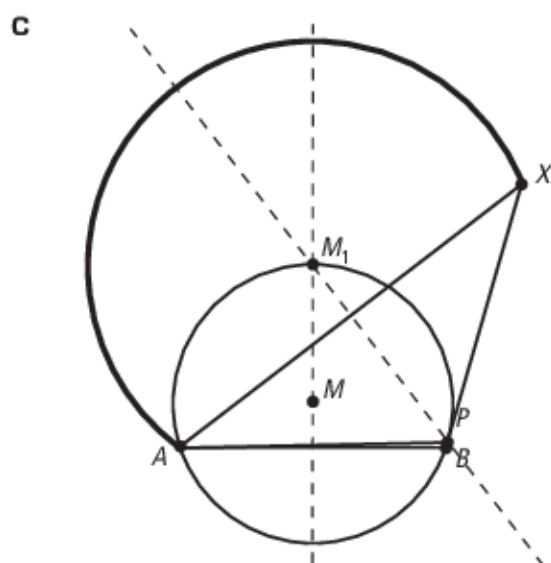
Hieruit volgt  $\angle APB = 2\alpha$  (gestrekte hoek) (2)

Uit (1) en (2) volgt  $\angle AXP = \frac{1}{2} \angle APB$ .

**b**  $\angle APB$  is een constante hoek (*omtrekshoek op boog AB*)

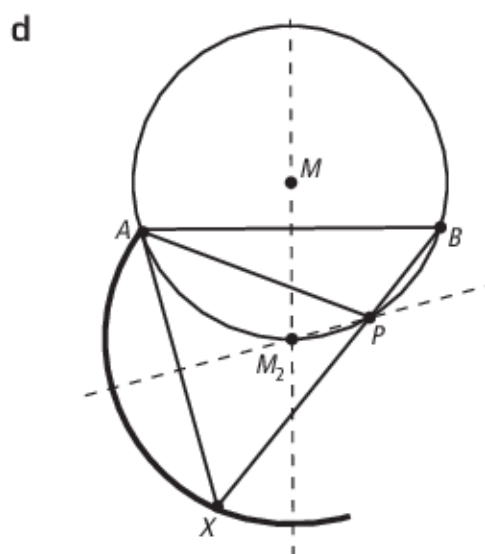
$\angle AXP$  is de helft van deze hoek en is dus ook een constante hoek.

De meetkundige plaats van de punten  $X$  doorloopt dus een deel van een cirkel die ook door  $A$  en  $B$  gaat.



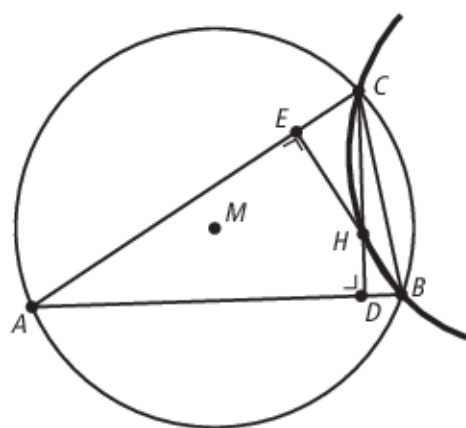
De cirkelboog ligt op de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABX$ , dan is het middelpunt  $M_1$  het snijpunt van de middelloodlijnen van  $AB$  en  $AX$ .

Het linkereindpunt van de boog vind je als  $P$  in  $A$  ligt en het rechteindpunt vind je als  $P$  in  $B$  ligt.



De cirkelboog ligt op de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABX$ , dan is het middelpunt  $M_2$  het snijpunt van de middelloodlijnen van  $AB$  en  $AX$ .

16



Noem  $\angle BAC = \alpha$  (omtrekshoek op boog  $BC$ ). Deze hoek  $\alpha$  heeft een constante waarde.

$BE$  en  $CD$  zijn hoogtelijnen, dus  $\angle D = \angle E = 90^\circ$ .

Hoekensom in vierhoek  $ADHE$  levert  $\angle DHE = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$ .

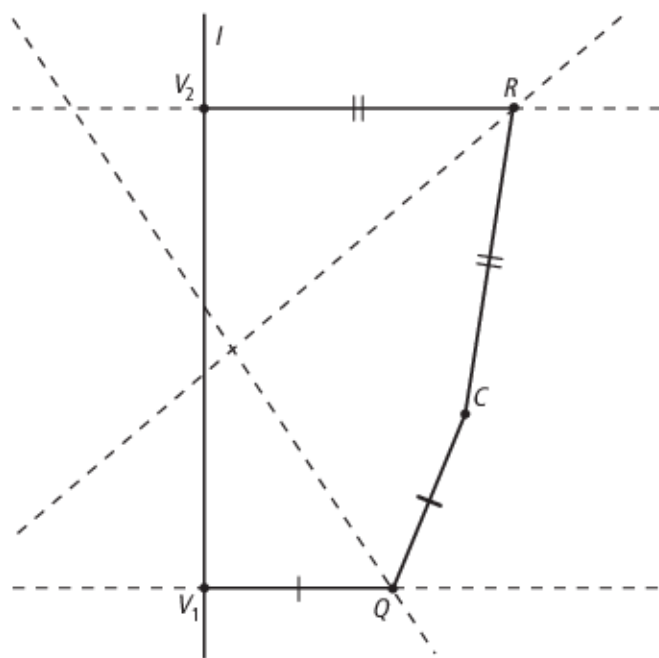
Hieruit volgt  $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$  (overstaande hoeken).

Als  $\angle BHC$  constant is, is de meetkundige plaats van de punten  $H$  een cirkelboog op koorde  $BC$ .

## 4-4 Parabool

Pagina 94:

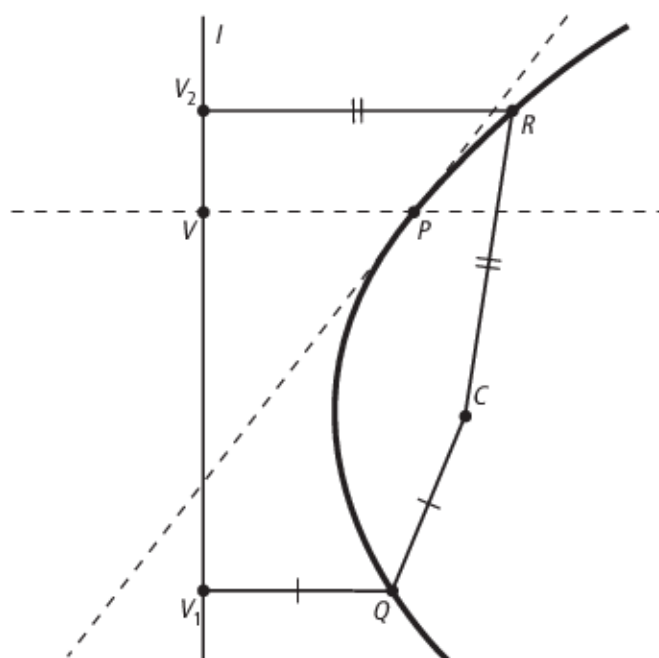
17a



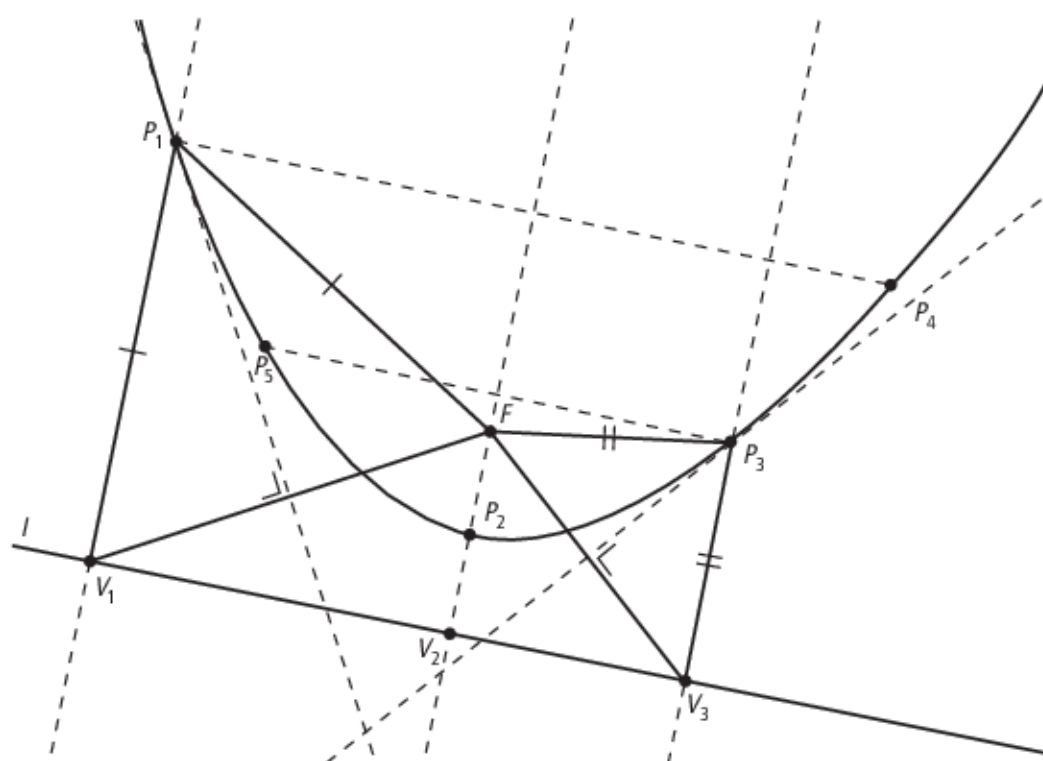
- b** Voor punten op de middelloodlijn van  $CV_1$  geldt:  $QC = QV_1$ .  
Omdat  $QV_1 \perp l$  is  $QV_1 = d(Q, l)$ , dus  $d(Q, C) = d(Q, l)$ .
- c** Zie tekening bij a.



- d De meetkundige plaats van de punten  $P$  is een parabool.



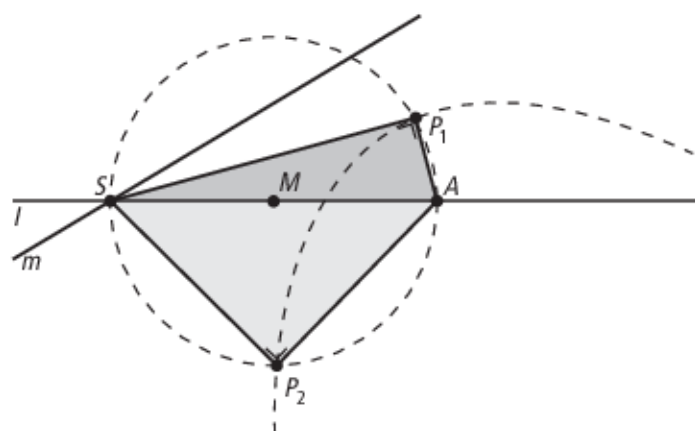
18



- 19ab De meetkundige plaats van de punten  $P$  waarvoor geldt  $d(P, A) = d(P, m)$  is een parabool met brandpunt  $A$  en richtlijn  $m$  (*definitie parabool*).

De meetkundige plaats van de punten  $P$  met  $\angle APS = 90^\circ$  is een cirkel met middellijn  $AS$  (*Omgekeerde stelling van Thales*).

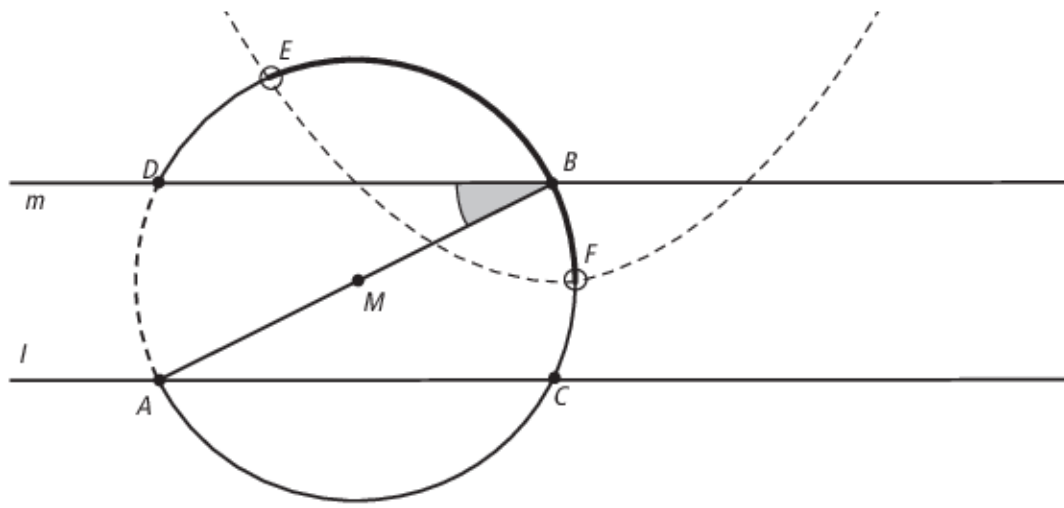
De snijpunten  $P_1$  en  $P_2$  zijn de gezochte punten.



- 20** De meetkundige plaats van de punten  $P$  met  $d(P, l) = d(P, B)$  is een parabool met brandpunt  $B$  en richtlijn  $l$  (*definitie parabool*). De punten waarvoor geldt  $d(P, l) > d(P, B)$  liggen binnen de parabool.

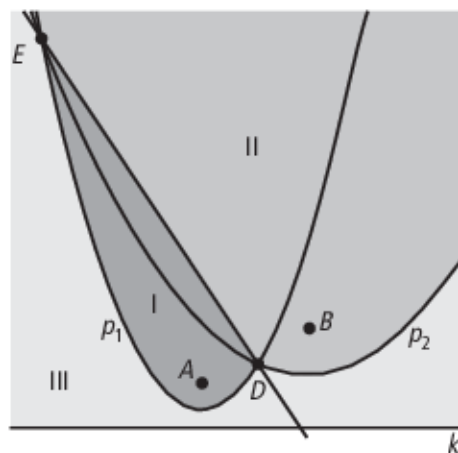
De meetkundige plaats van de punten  $P$  met  $\angle DPA = \angle DBA$  liggen op dezelfde cirkelboog als waarop de punten  $A$ ,  $B$  en  $D$  liggen (*Omgekeerde stelling van de constante hoek*).

De gevraagde meetkundige plaats is een deel van de cirkelboog tussen de snijpunten  $E$  en  $F$  van cirkel en parabool.

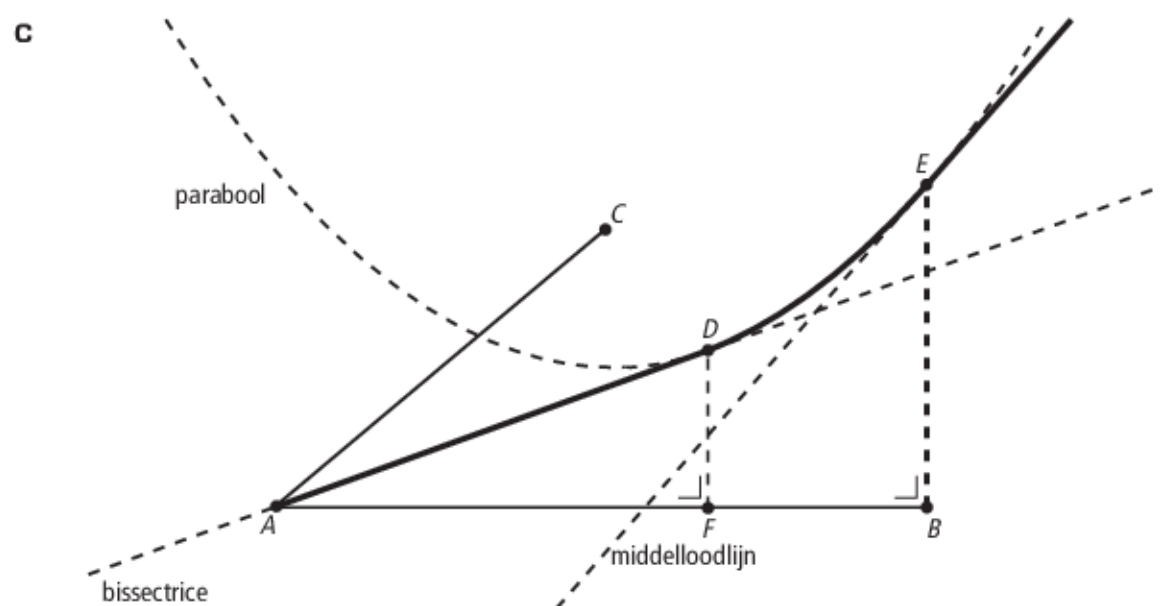


**Pagina 95:**

- 21a** Er geldt  $DA = d(D, k)$  (*parabool*).  
 Ook geldt  $DB = d(D, k)$  (*parabool*).  
 Hieruit volgt  $DA = DB$ , dus ligt  $D$  op de middelloodlijn van  $AB$ .  
 Er geldt  $EA = d(E, k)$  (*parabool*).  
 Ook geldt  $EB = d(E, k)$  (*parabool*).  
 Hieruit volgt  $EA = EB$ , dus ligt  $E$  op de middelloodlijn van  $AB$ .
- b** Het donkerste gebied is I, dat is de meetkundige plaats van alle punten die dichterbij  $A$  dan bij  $B$  en  $k$  liggen.  
 Het middelgrijze gebied is II, dat is de meetkundige plaats van alle punten die dichterbij  $B$  dan bij  $A$  en  $k$  liggen.  
 Het lichtgrijze gebied is III, dat is de meetkundige plaats van alle punten die dichterbij  $k$  dan bij  $A$  en  $B$  liggen.



- 22a** Zie de tekening bij opdracht c.
- b** De meetkundige plaats van de punten  $P$  met de eigenschap dat  $P$  gelijke afstanden heeft tot de lijnstukken  $AB$  en  $AC$ , bestaat uit drie delen:
- een deel van de bissectrice van  $\angle BAC$  (dat is  $AD$ , waarbij  $D$  het snijpunt is van de loodlijn in  $C$  en de bissectrice)
  - een deel van een parabool met brandpunt  $C$  en richtlijn  $AB$  (dat is  $DE$ , waarbij  $E$  het snijpunt is van de loodlijn in  $B$  en de parabool)
  - een deel van de middelloodlijn van  $BC$

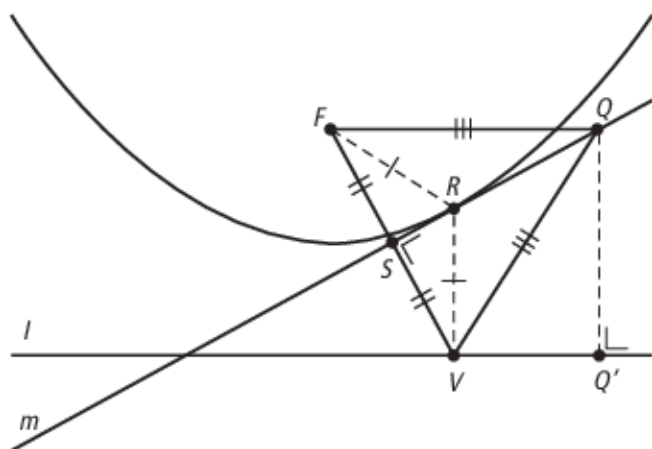


- 23a** De parabool is de meetkundige plaats van de punten met gelijke afstand tot een gegeven brandpunt en richtlijn.

Omdat  $V$  op de richtlijn ligt, ligt  $R$  even ver van brandpunt  $F$  als van  $V$ .

$R$  ligt dus op de middelloodlijn van  $FV$ .

- b**  $d(QV) = d(QF)$ , want  $Q$  ligt op de middelloodlijn van  $FV$ .



- c De kortste route vanuit  $Q$  naar lijn  $l$  is een loodlijn vanuit  $Q$  op  $l$ . Noem het voetpunt  $Q'$ .

Er geldt  $d(QQ') < d(QV)$  (rechthoekige driehoek).

- d Er geldt ook  $d(QQ') < d(QF)$  (zie opdracht b en c).

Dus  $Q$  ligt niet op de parabool.

Nu nog beredeneren waarom  $m$  een raaklijn is.

Voor elk punt  $Q$  op  $m$  dat niet in  $R$  ligt, geldt voor het voetpunt  $W$  op  $l$  dat

$$d(QW) < d(QF).$$

Dus  $Q$  ligt in het buitengebied (namelijk dichterbij  $l$ ) van de parabool.

$R$  is dus het enige punt van  $m$  dat op de parabool ligt. Daarom is  $m$  de raaklijn.

- e Gegeven:

Parabool met brandpunt  $F$  en lijn  $l$ . Punt  $R$  op de parabool met als voetpunt  $V$ .

De middelloodlijn  $m$  van  $FV$ .

Te bewijzen:  $\angle FRS = \angle VRS$

Bewijs:

$$FS = VS \text{ (middelloodlijn)}$$

$$RS = RS$$

$$\angle FSR = \angle VSR = 90^\circ \text{ (middelloodlijn)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \angle FRS = \angle VRS \\ \Rightarrow \angle FSR = \angle VSR \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle FSR \cong \triangle VSR \text{ (ZHZ)} \Rightarrow \angle FRS = \angle VRS$$

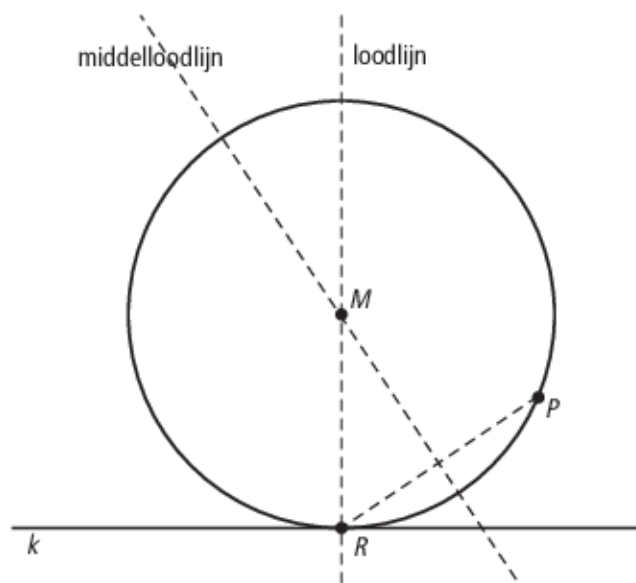
## 4-5 Bewijzen

Pagina 96:

- 24a** Noem  $\angle MED = \alpha$ .  
 Dan is ook  $\angle EMD = \alpha$  (gelijkbenige driehoek).  
 Hieruit volgt  $\angle BMC = \alpha$  (overstaande hoeken).
- b**  $\angle MDE = 180^\circ - 2\alpha$  (hoekensom driehoek).  
 Dan is  $\angle MDF = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$  (gestrekte hoek).
- c**  $\angle CMF = 2 \cdot \angle CDF = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha$  (omtrekshoek op boog CF).
- d**  $\angle BMF = \angle CMF - \angle BMC = 4\alpha - \alpha = 3\alpha$ .  
 Dus  $\angle BMF = 3 \cdot \angle MED$ .

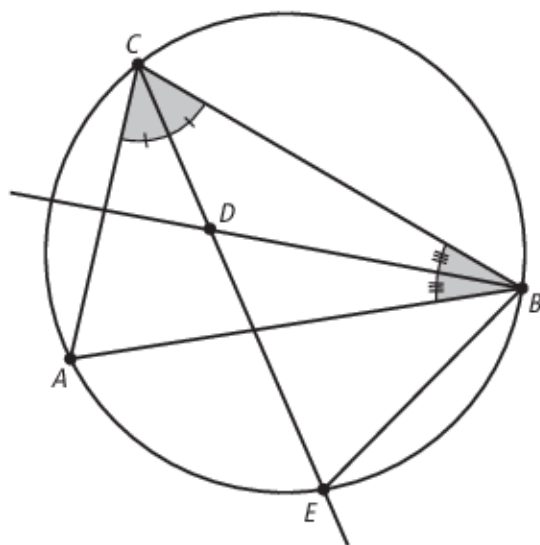
Pagina 97:

25a



- b** Bewijs:  
 De gevraagde cirkel moet in punt  $R$  raken, dus teken  $MR \perp k$  (raaklijn aan cirkel).  
 Als middelpunt  $M$  op de middelloodlijn van  $PR$  ligt, dan geldt  $MP = MR$  (definitie cirkel).  
 Het snijpunt van de loodlijn en de middelloodlijn is het gezochte middelpunt  $M$ .  
 Teken de cirkel met straal  $MP$  of  $MR$ .

26a

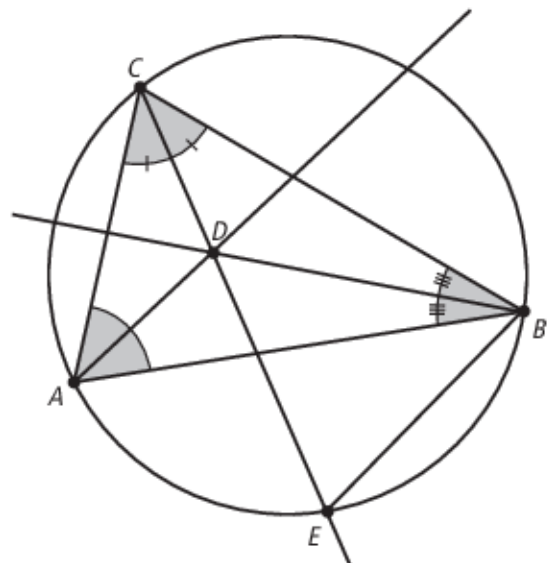


- b** Noem  $\angle ABC = \beta$  en  $\angle ACB = \gamma$ .  
 $\angle ABE = \angle ACE = \frac{1}{2}\gamma$  (Stelling van constante hoek op boog AE)  
 Hieruit volgt  $\angle DBE = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$ .  
 $\angle CDB = 180 - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$  (hoekensom driehoek)  
 Hieruit volgt  $\angle BDE = 180^\circ - (180^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$  (gestrekte hoek).



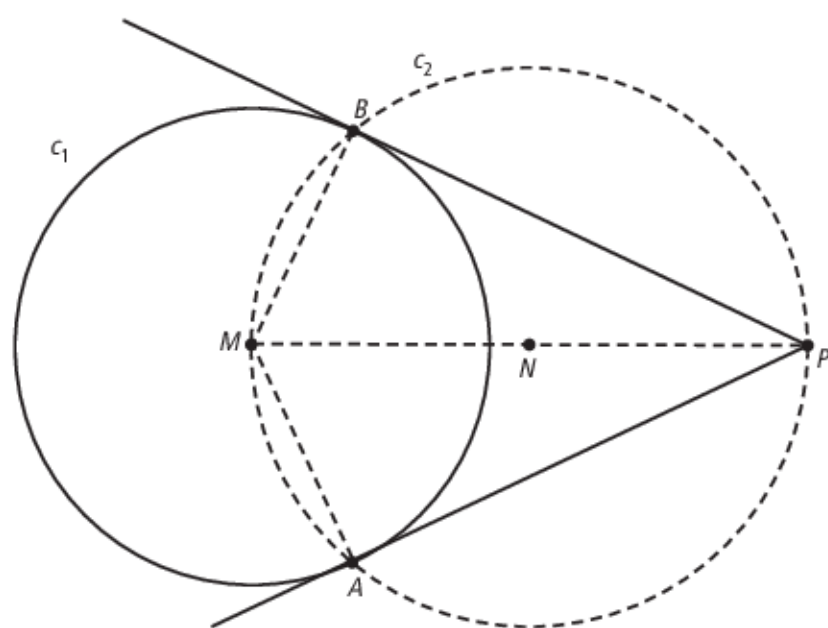
In  $\triangle BDE$  geldt  $\angle BDE = \angle DBE$ , dus de driehoek is gelijkbenig.  
 Hieruit volgt  $ED = EB$ .

c



- d Noem  $\angle ACD = \alpha$ ,  $\angle CAD = \beta$  en  $\angle CBD = \gamma$ .  
 In  $\triangle ABC$  geldt  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$ , dus  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$  (bissectrices en hoekensom driehoek).  
 Dit geeft  $\beta + \gamma = 90^\circ - \alpha$ .  
 In  $\triangle ABD$  geldt  $\angle ADB = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - (\beta + \gamma)$  (hoekensom driehoek).  
 Hieruit volgt  $\angle ADB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$ .

27abc



- d Bewijs:  
 $\angle MAP = 90^\circ$  (Thales) ofwel  $PA \perp AM$ .  
 Dan is  $PA$  een raaklijn aan cirkel  $c_1$  (Omgekeerde stelling Raaklijn aan cirkel).  
 Evenzo is  $\angle MBP = 90^\circ$  (Thales) ofwel  $PB \perp BM$ .  
 Dan is  $PB$  een raaklijn aan cirkel  $c_1$  (Omgekeerde stelling Raaklijn aan cirkel).

28a Teken ook de hoogtelijn uit  $B$ .

Noem  $\angle BAC = \alpha$ . Merk op dat  $\alpha$  een constante waarde heeft.

$\angle D = \angle E = \angle F = 90^\circ$  (hoogtelijnen)

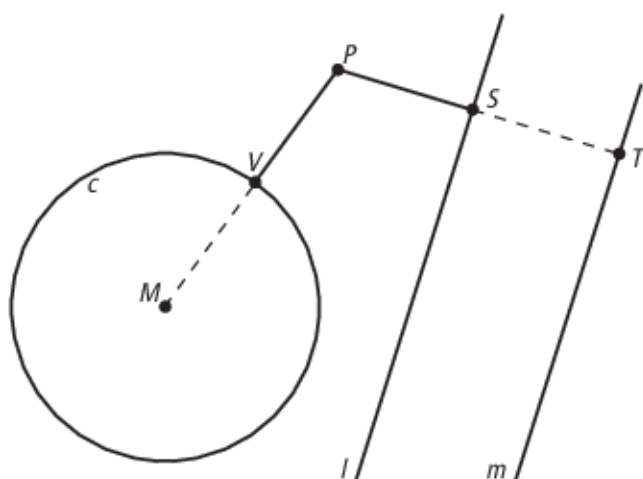
Hieruit volgt  $\angle ESF = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$  (hoekensom vierhoek).

Dan is ook  $\angle BSC = 180^\circ - \alpha$  (overstaande hoeken).

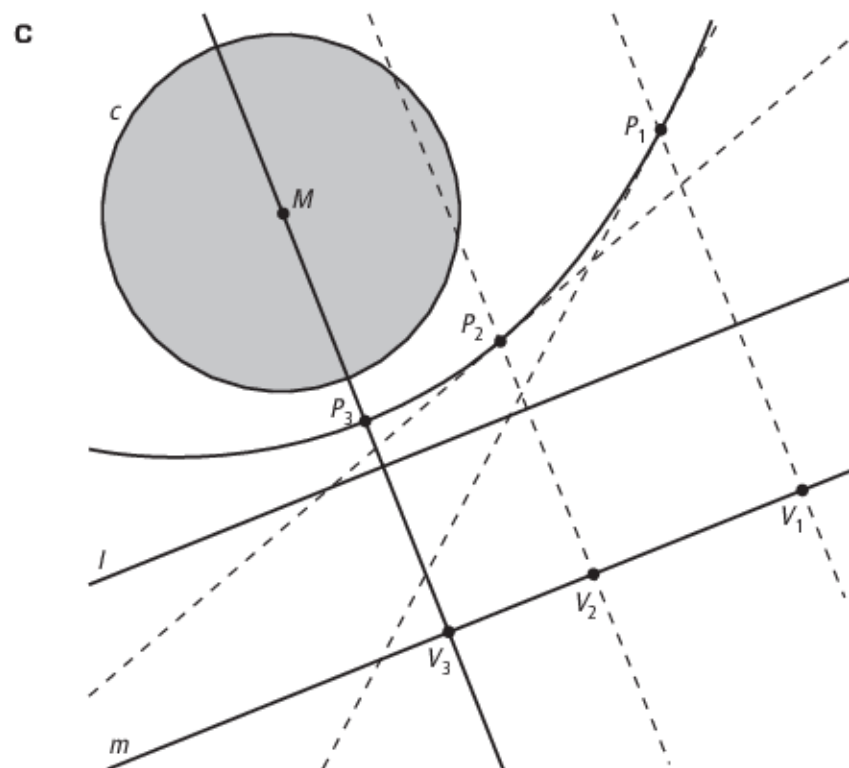
Als  $\angle BSC$  constant is, is de meetkundige plaats van de punten  $H$  een cirkelboog op koorde  $BC$ .



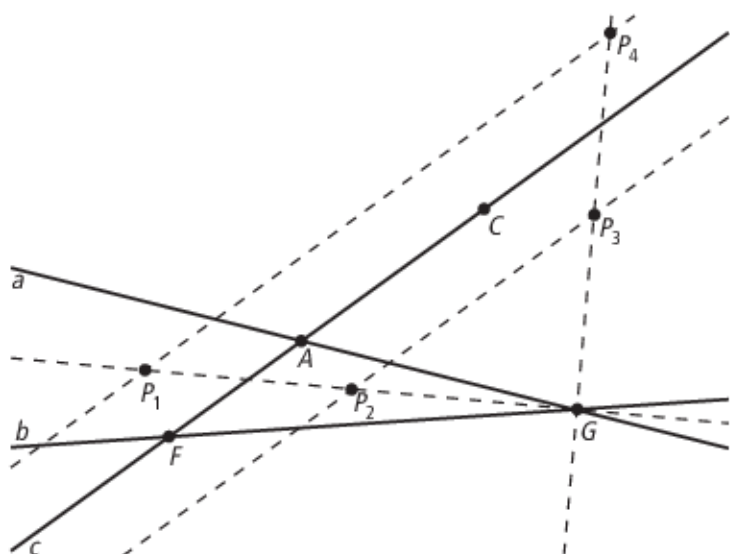




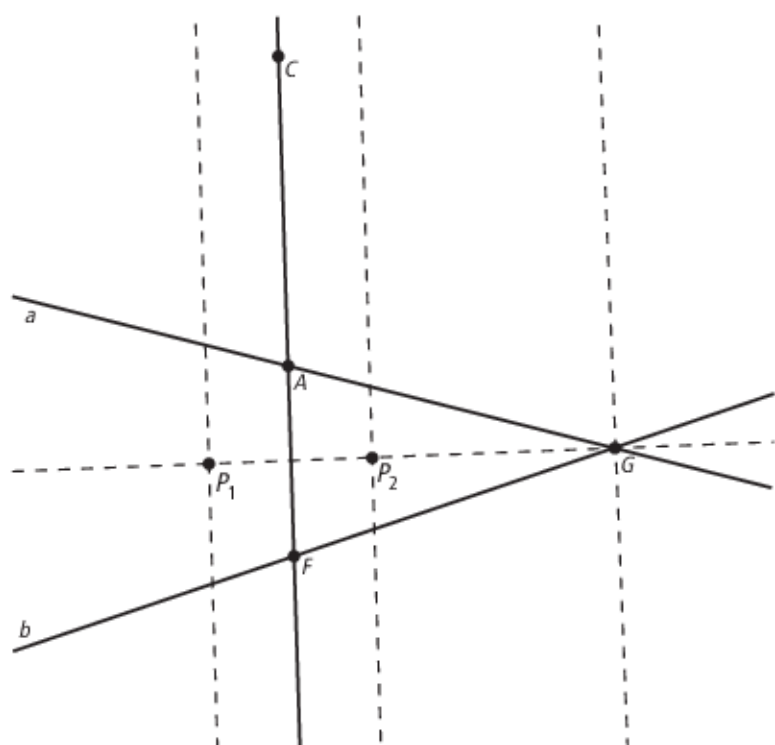
- b** De meetkundige plaats van de punten die gelijke afstand tot lijn  $l$  en cirkel  $c$  hebben is hetzelfde als de meetkundige plaats van de punten die gelijke afstand tot lijn  $m$  en punt  $M$  hebben, dat is een parabool met brandpunt  $M$  en richtlijn  $m$ .



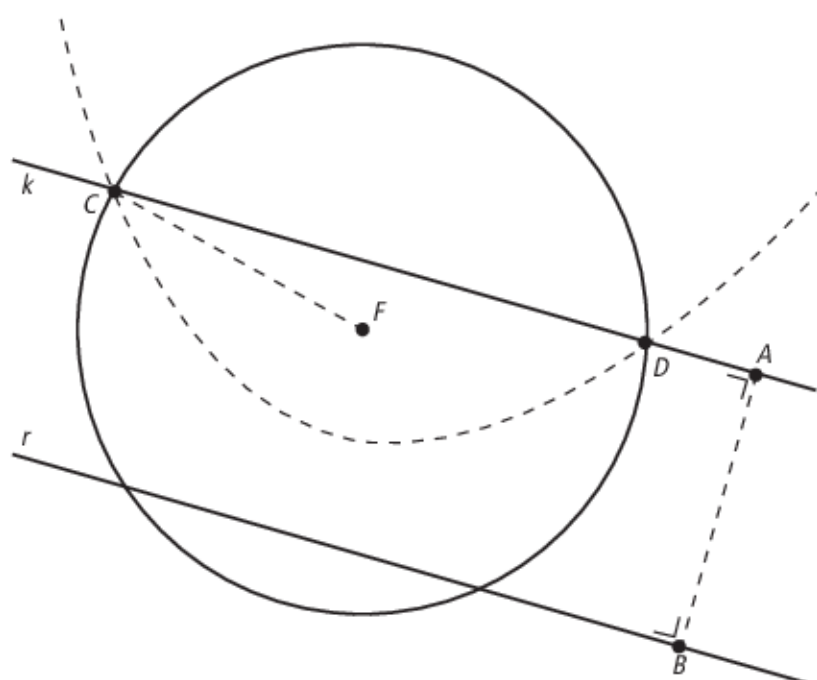
- 31a** De meetkundige plaats van de punten die even ver van lijn  $a$  als lijn  $b$  liggen is het bissectricepaar van de hoeken van de lijnen  $a$  en  $b$ .  
De meetkundige plaats van de punten die op afstand 1 cm van lijn  $c$  liggen wordt gevormd door het paar evenwijdige lijnen op afstand 1 cm van lijn  $c$ .  
De vier snijpunten van de genoemde lijnen vormen de gevraagde meetkundige plaats.



- b** Als je lijn  $c$  zo draait dat deze evenwijdig is aan één van de bissectrices, dan zijn er maar twee punten die voldoen aan de eisen. Dit is het minimaal aantal oplossingen. Elke andere richting van lijn  $c$  leidt tot vier oplossingen (beide lijnen evenwijdig aan lijn  $c$  snijden elk de beide bissectrices).



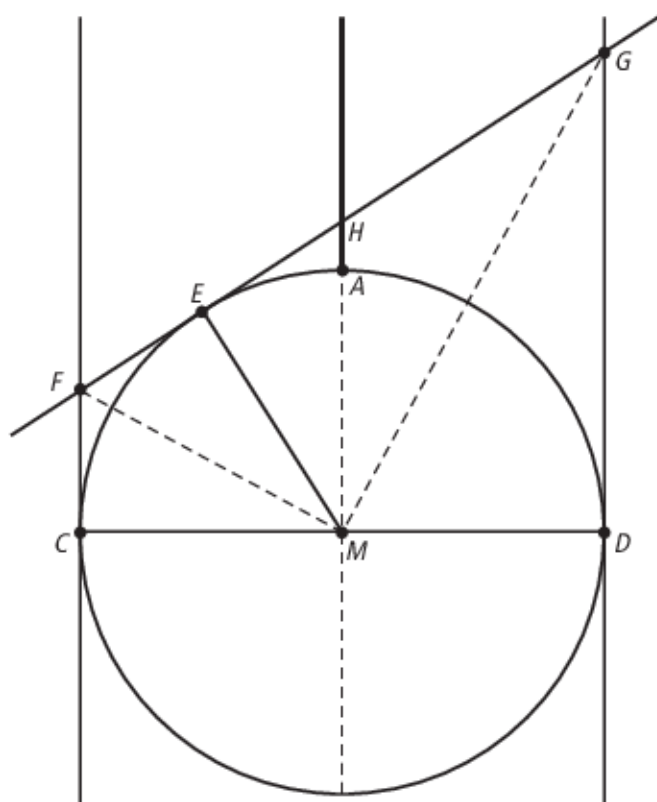
- 32a** Teken de cirkel met middelpunt  $F$  en straal  $d(k, r)$ .  
De snijpunten van deze cirkel met de lijn  $k$  zijn de gevraagde punten.



- b** Nu nog bewijzen dat de punten  $C$  en  $D$  op de parabool liggen.  
Voor punt  $C$  geldt  $CF = d(k, r) \Rightarrow d(C, F) = d(C, r)$ .  
Hieruit volgt dat  $C$  op de parabool ligt met brandpunt  $F$  en richtlijn  $r$ .  
Hetzelfde geldt voor punt  $D$ .

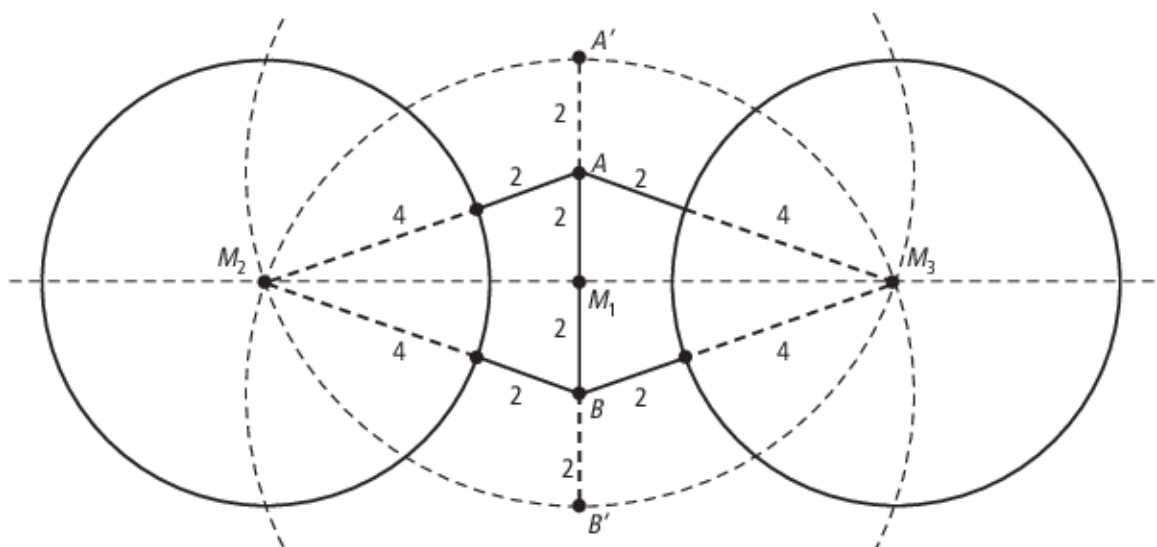
**Pagina 99:**

- 33a** De meetkundige plaats van punten  $H$  is een halve lijn die ligt op een lijn  $l$  door  $M$  loodrecht op  $CD$ . Het beginpunt van de meetkundige plaats is het snijpunt van lijn  $l$  met de cirkel.



- b Noem  $\angle CME = \alpha$  en  $\angle DMG = \beta$ .
- |                                                                                    |                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $MC = ME$ (straal)<br>$\angle MCF = \angle MEF = 90^\circ$ (raaklijn)<br>$MF = MF$ | $\Rightarrow \triangle MCF \cong \triangle MEF$ (ZZR) $\angle CME = \angle EMF = \alpha$ |
| $MD = ME$ (straal)<br>$\angle MDG = \angle MEG = 90^\circ$ (raaklijn)<br>$MG = MG$ |                                                                                          |
- Er geldt  $\angle CMD = 180^\circ$  (gestrekte hoek).  
 Dan is  $\angle CMD = \alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$ .  
 Hieruit volgt dat  $\angle FMG = \angle FME + \angle EMG = \alpha + \beta = 90^\circ$ .

- 34 De gezochte middelpunten liggen op de middelloodlijn van  $AB$ , het midden van  $AB$  is het eerste punt.  
 Er geldt  $d(A, c) + 4 = r$ , waarbij  $r$  de straal is van een hulpcirkel met middelpunt  $A$ .  
 Dit geeft  $r = 6$ .  
 Er geldt ook  $d(B, c) + 4 = r$ , dus  $r = 6$ , waarbij  $r$  de straal is van een hulpcirkel met middelpunt  $B$ .



De snijpunten van de beide hulpcirkels met de middelloodlijn door  $AB$  leveren de andere middelpunten  $M$ .

**35a** Te bewijzen:  $P$ ,  $Q$  en  $S$  liggen op één cirkel met middelpunt  $T$ .

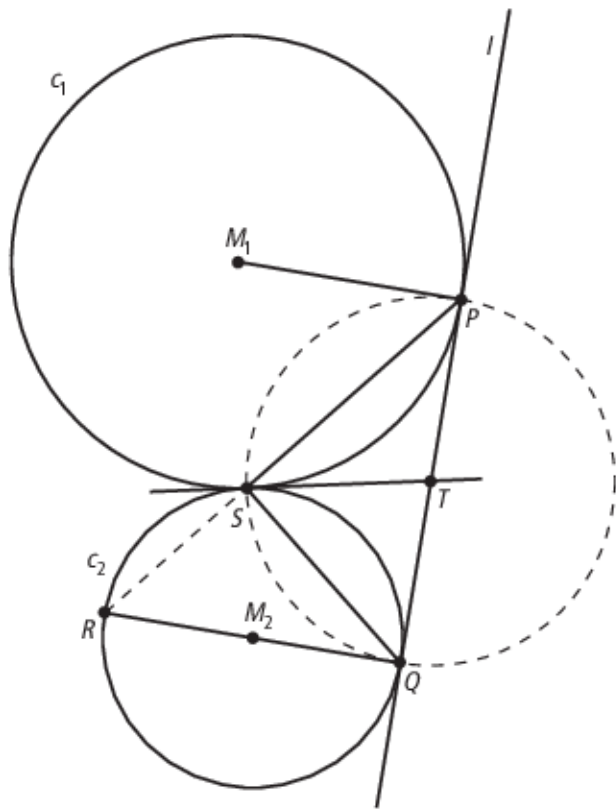
Bewijs: Teken  $M_1T$  en  $M_2T$ .

$$\left. \begin{array}{l} M_1P = M_1S \text{ (straal)} \\ \angle P = \angle S (= 90^\circ, \text{ raaklijn}) \\ M_1T = M_2T \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle M_1PT \cong \triangle M_1ST \text{ (ZZR)}, \text{ dus } TP = TS \text{ (1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_2Q = M_2S \text{ (straal)} \\ \angle Q = \angle S (= 90^\circ, \text{ raaklijn}) \\ M_2T = M_2T \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle M_2QT \cong \triangle M_2ST \text{ (ZZR)}, \text{ dus } TQ = TS \text{ (2)}$$

Uit (1) en (2) volgt  $TP = TS = TQ = r$ , dus  $P$ ,  $S$  en  $Q$  liggen op een cirkel met middelpunt  $T$ .

- b** Je kunt bewijzen dat drie punten op één lijn liggen door aan te tonen dat ze een gestrekte hoek vormen.
- c** Te bewijzen:  $P$ ,  $S$  en  $R$  liggen op één lijn.



Bewijs:

$RQ$  is middellijn, dus  $\angle RSQ = 90^\circ$  (Thales).

$PQ$  is middellijn, dus  $\angle PSQ = 90^\circ$  (Thales).

$\angle RSQ + \angle PSQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , dus  $P$ ,  $S$  en  $R$  liggen op één lijn.

## Test jezelf

**Pagina 102:**

- T-1a** Als  $r < 2$  dan is de middellijn van de cirkel  $< 4$ , dan zou koorde  $AB = 4$  niet in de cirkel passen.
- b**  $A$  en  $B$  zijn punten van een cirkel  $(M, r)$  met  $AB = 4$  cm.  
Eerst  $\Rightarrow$   
Gegeven:  $P$  is het midden van  $AB$ .  
Te bewijzen:  $P$  ligt op een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $\sqrt{r^2 - 4}$ .



Bewijs:

$AP = BP \Rightarrow MP \perp AB$  (Omgekeerde stelling loodlijn op koorde).

De stelling van *Pythagoras* in driehoek  $BMP$ :  $BP^2 + MP^2 = BM^2 \Rightarrow 2^2 + MP^2 = r^2 \Rightarrow MP = \sqrt{r^2 - 4}$ .

De afstand  $MP$  is constant, ongeacht de positie van  $A$  en  $B$ , dus  $P$  ligt op de cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $\sqrt{r^2 - 4}$ .

Nu de andere kant van het bewijs ( $\Leftarrow$ )

Gegeven:  $P$  ligt op een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $\sqrt{r^2 - 4}$ .

Te bewijzen:  $P$  is het midden van  $AB$ .

Bewijs:

Als de stelling van *Pythagoras* geldt in driehoek  $BMP$ , dan is de driehoek rechthoekig.

$$BP^2 + MP^2 = BM^2?$$

$$2^2 + (\sqrt{r^2 - 4})^2 = r^2$$

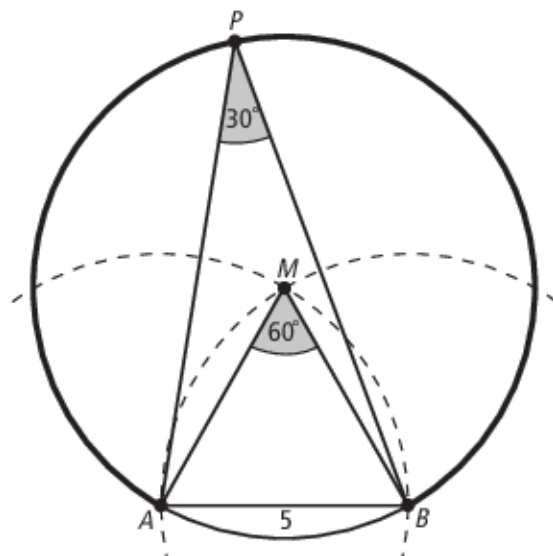
Dit klopt, dus  $\angle MPB = 90^\circ$ .

$MP \perp AB \Rightarrow AP = BP$  (Stelling loodlijn op koorde), dus  $P$  is het midden van  $AB$ .

**T-2a** Teken een gelijkbenige driehoek  $ABM$  met  $\angle AMB = 60^\circ$ .

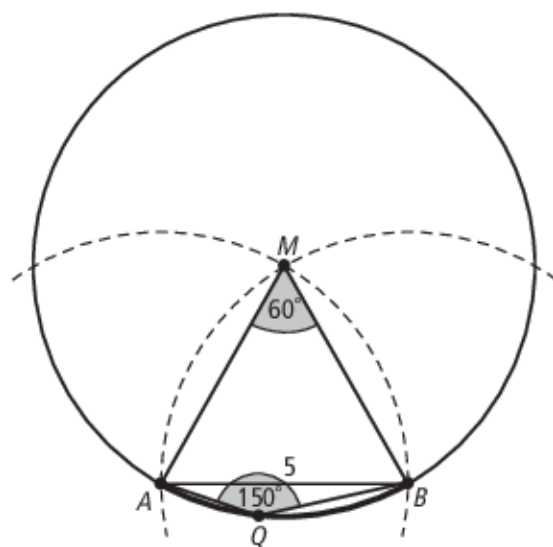
Dan is  $(M, MA)$  de cirkel waar de gevraagde meetkundige plaats op ligt (Stelling van de omtrekshoek).

De meetkundige plaats van de punten  $P$  met  $\angle APB = 30^\circ$  is de cirkelboog  $AB$  (de bovenste boog).

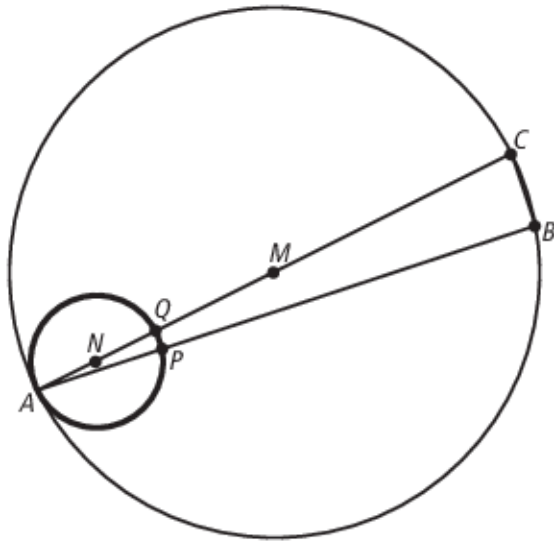


**b** Dan is  $(M, MA)$  de cirkel waar ook deze meetkundige plaats op ligt.

De meetkundige plaats van punten  $Q$  met  $\angle AQB = 150^\circ$  is de cirkelboog  $AB$  (de onderste boog).



T-3a

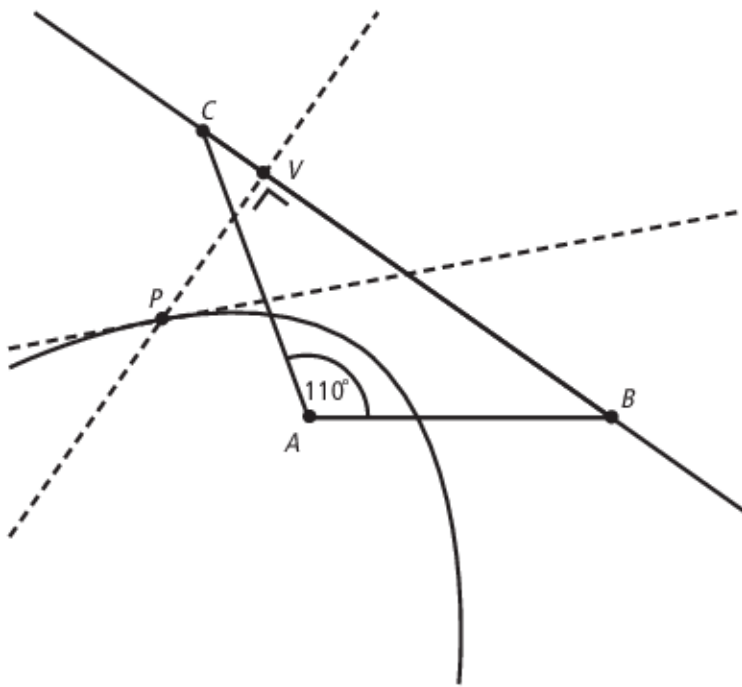


Teken de middellijn  $AC$ . Het midden van  $AM$  is  $Q$ .

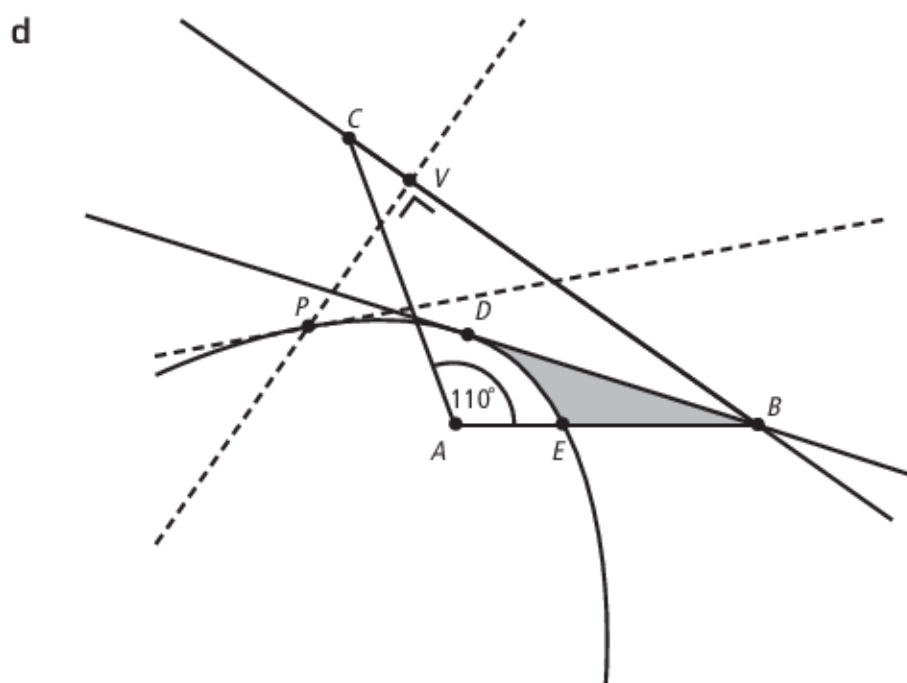
De driehoeken  $APQ$  en  $ABC$  zijn gelijkvormig met factor  $\frac{1}{4}$ . Als  $B$  de cirkel doorloopt, dan loopt  $P$  een cirkel die  $\frac{1}{4}$  keer zo groot is.

- b** Het middelpunt van de kleine cirkel ligt op  $\frac{1}{4}$  van  $AM$ .

T-4ab



- c** De punten  $P$  met  $d(P, AB) = d(P, BC)$  liggen op de bissectrice van  $\angle ABC$ .  
 Als  $d(P, AB) < d(P, BC)$  dan liggen de punten onder de bissectrice aan de kant van  $AB$ .  
 De punten  $P$  met  $d(P, A) = d(P, BC)$  liggen op de parabool met brandpunt  $A$  en richtlijn  $BC$ .  
 Als  $d(P, A) > d(P, BC)$  dan liggen de punten boven de parabool.  
 De parabool snijdt de bissectrice van  $\angle ABC$  in punt  $D$  en zijde  $AB$  in punt  $E$ .  
 Het gevraagde vlakdeel  $DEB$  wordt door de parabool, de bissectrice en  $BE$  begrensd.



**Pagina 103:**

**T-5a**  $\angle ABC$  is een omtrekhoek op de boog  $AC$ .

$A$  en  $C$  veranderen niet van plaats, dus  $\angle ABC$  is constant (*Stelling van de constante hoek*).

Punt  $P$  is het snijpunt van de bissectrice van  $\angle ABC$  en de cirkel.

Dan geldt dat  $\angle ABP = \angle CBP$ , dan horen daar gelijke koorden en gelijke bogen bij.

Hieruit volgt dat punt  $P$  in het midden van boog  $AC$  ligt, dus ligt punt  $P$  vast.

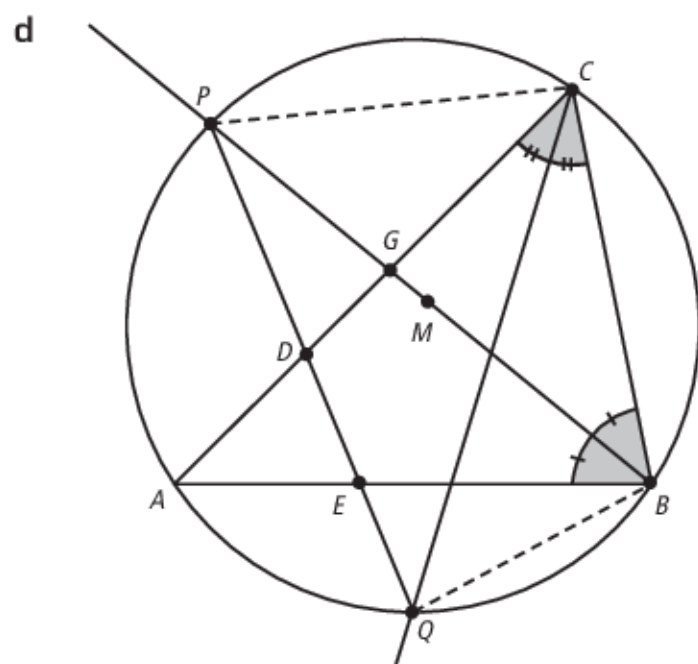
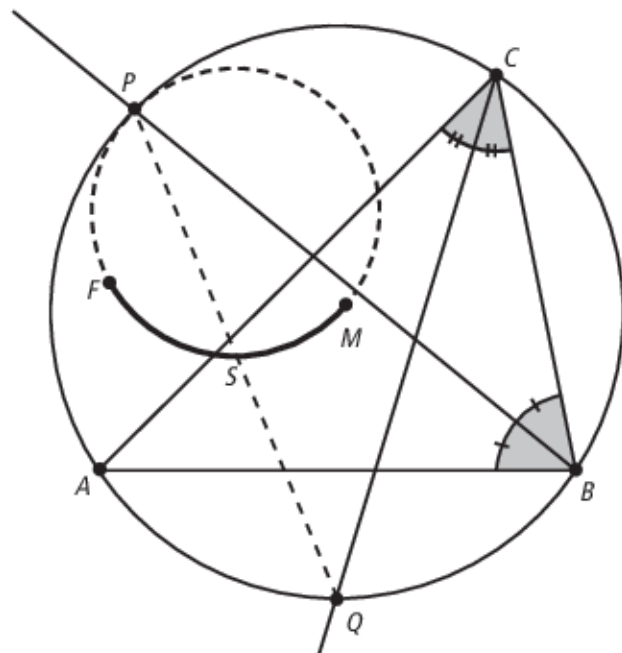
**b**  $S$  is het midden van een koorde, dus  $\angle MSP = 90^\circ$  (*Omgekeerde stelling loodlijn op koorde*).

Maar dat betekent dat  $S$  op de cirkel ligt met middellijn  $MP$  (*Thales*).

Als  $B$  het punt  $A$  nadert, nadert  $Q$  ook het punt  $A$ , dus het deel links van koorde  $AP$  hoort niet bij de cirkel.

Als  $B$  het punt  $C$  nadert, wordt  $PQ$  middelloodlijn van  $AC$  en middellijn van de cirkel. Het punt  $S$  komt dan in  $M$  terecht.

c De uiterste punten corresponderen met de situatie waarin  $B$  in  $A$  of in  $C$  komt. In het eerste geval is  $S$  het midden  $F$  van  $AP$ ; in het tweede geval is  $Q$  het midden van de boog  $AC$  en dan valt  $S$  samen met  $M$ .



Noem  $\angle ACB = \gamma$

Als  $BA = BC$ , dan ligt  $B$  in het midden van de boog  $ABC$  en dus is  $BP$  middellijn van de omgeschreven cirkel. Dan geldt:  $\angle EQB = \angle PQB = 90^\circ$  (*Thales*).

Noem het snijpunt van  $BP$  met  $AC$  nu  $G$ .

In de gelijkbenige driehoek  $ABC$  staat de bissectrice  $BP$  loodrecht op de basis  $AC$ , dus  $\angle PGD = 90^\circ$ .

$\angle EBQ = \angle ABQ$  (zelfde benen)

$\angle ABQ = \angle ACQ = \frac{1}{2}\gamma$  (omtrekshoek op boog  $AQ$ ), dus  $\angle BEQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$  (hoekensom driehoek).

Ook geldt  $\angle AED = \angle BEQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$  (overstaande hoeken).

$\angle GPD = \angle BPQ$  (zelfde benen)

$\angle BPQ = \angle BCQ = \frac{1}{2}\gamma$  (omtrekshoek op boog  $BQ$ ), dus  $\angle GDP = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$  (hoekensom driehoek).

Ook geldt  $\angle ADE = \angle GDP = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$  (overstaande hoeken).

Nu heb je gevonden dat  $\angle AED = \angle ADE$ .

Dus  $\triangle ADE$  is een gelijkbenige driehoek.

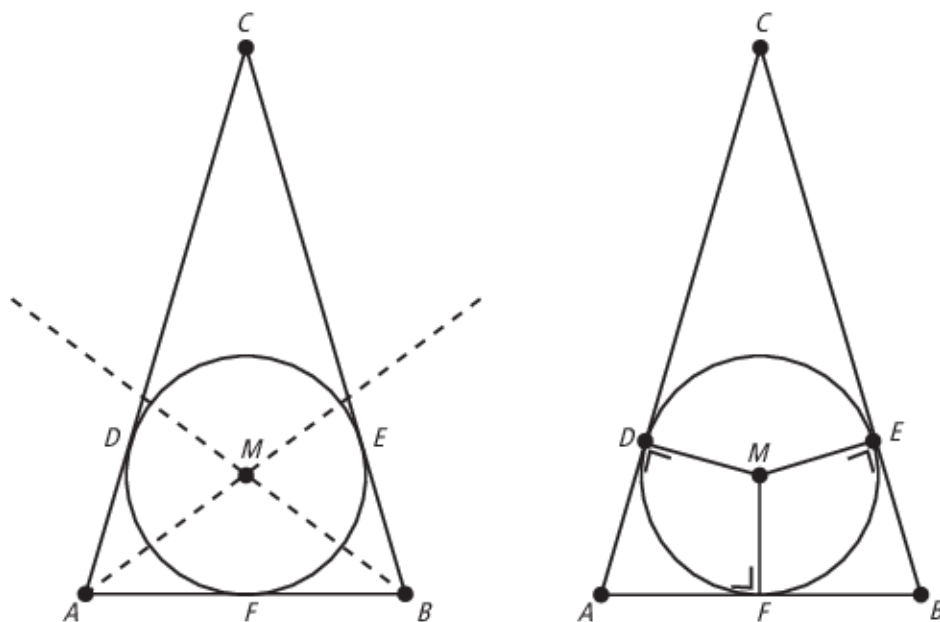
#### T-6a Methode 1:

Het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken van de driehoek (linkertekening).

Methode 2:

Teken in de punten  $D$ ,  $E$  en  $F$  de loodlijnen op de zijden.

Het snijpunt van deze loodlijnen is het gevraagde middelpunt (rechtterkening).

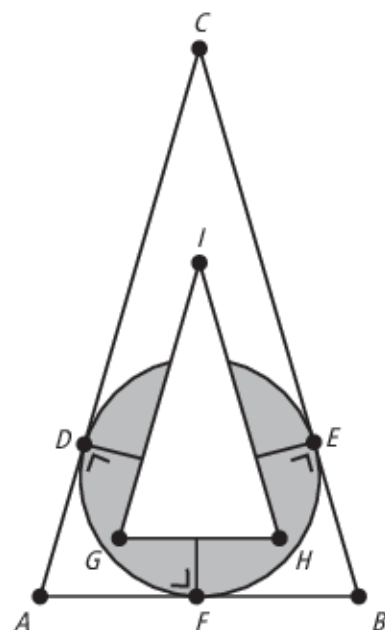


b  $\angle MEB = \angle MFB = 90^\circ$  (raaklijn aan cirkel)

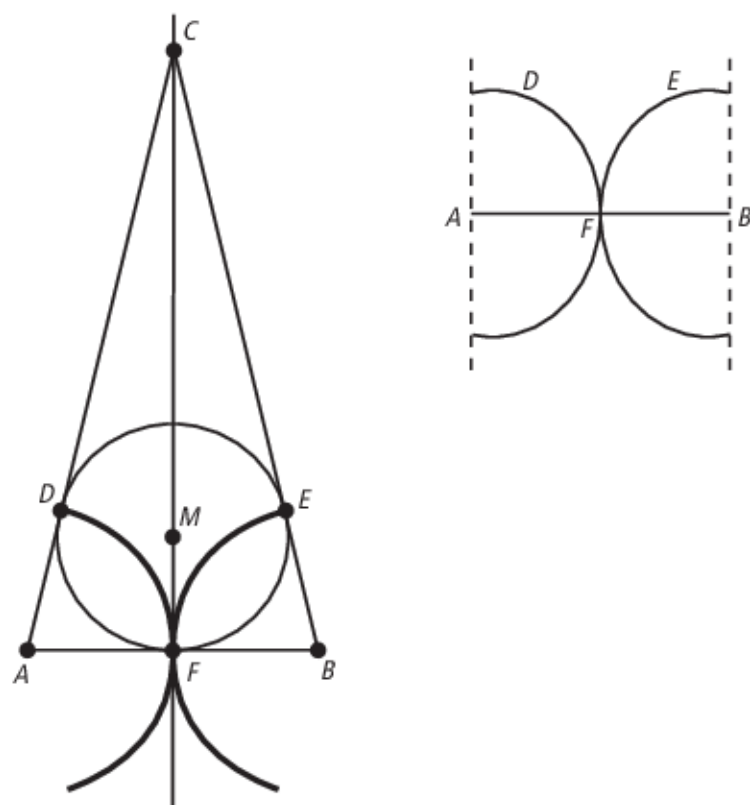
$$\angle MEB + \angle MFB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Hieruit volgt  $BEMF$  is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).

- c Teken de middelloodlijnen van de lijnstukken  $MD$ ,  $ME$  en  $MF$ .  
 Deze vormen samen een nieuwe driehoek  $GHI$ .  
 Het gebied binnen de cirkel maar buiten driehoek  $GHI$  is het gevraagde gebied.



- d In alle gevallen geldt  $AD = AF = BF = BE$ .  
 De punten  $D$  en  $E$  lopen dus langs de cirkel met middelpunt  $A$  resp.  $B$  en straal  $AF = BF$ .  
 De punten  $D$  en  $E$  komen niet voorbij de loodlijnen in  $A$  en  $B$  op de lijn  $AB$  (zie rechtterkening).





# Vaardigheden 2

Pagina 106:

- 1a**  $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$   
De vergelijking wordt  $t^2 - t - 12 = 0$ .
- b**  $(t - 4)(t + 3) = 0$ , dus  $t = 4$  of  $t = -3$
- c**  $2^x = -3$  heeft geen oplossing.  
 $2^x = 4$  heeft als oplossing  $x = 2$ .  
De oplossing van de vergelijking is dus  $x = 2$ .
- d** Noem  $3^x = t$ .  
 $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = t^2$   
 $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x = 3 \cdot t$   
 $9^x - 3^{x+1} = 18$  kan dus herschreven worden als  $t^2 - 3t = 18$ .  
 $t^2 - 3t - 18 = 0$   
 $(t - 6)(t + 3) = 0$ , dus  $t = 6$  of  $t = -3$ .  
 $3^x = -3$  heeft geen oplossing.  
 $3^x = 6$  geeft  $x = {}^3\log(6) \approx 1,63$ .  
De oplossing van de vergelijking is dus  $x = {}^3\log(6) \approx 1,63$ .
- 2a** Vervang  $(x^2 - x)$  door  $p$ .  
 $p^3 = 6p^2$   
 $p^3 - 6p^2 = 0$   
 $p^2(p - 6) = 0$ , dus  $p = 0$  of  $p = 6$   
 $x^2 - x = 0$  of  $x^2 - x - 6 = 0$   
 $x(x - 1) = 0$  of  $(x - 3)(x + 2) = 0$   
 $x = 0$  of  $x = 1$  of  $x = 3$  of  $x = -2$
- b** Vervang  ${}^3\log(x)$  door  $a$ .  
 $\frac{2}{a} + 1 = a$   
 $\frac{2}{a} = \frac{a - 1}{1}$   
 $a(a - 1) = 2$   
 $a^2 - a - 2 = 0$   
 $(a - 2)(a + 1) = 0$ , dus  $a = 2$  of  $a = -1$   
 ${}^3\log(x) = 2$  of  ${}^3\log(x) = -1$   
 $x = 9$  of  $x = \frac{1}{3}$
- c** Vervang  $\sqrt{x + 2}$  door  $b$ .  
 $(b^2 - b)^2 = 36$   
 $b^2 - b = -6$  of  $b^2 - b = 6$   
 $b^2 - b + 6 = 0$  of  $b^2 - b - 6 = 0$   
 $b^2 - b + 6 = 0$  heeft geen oplossing, want  $D < 0$   
 $(b - 3)(b + 2) = 0$ , dus  $b = 3$  of  $b = -2$ .

$$\sqrt{x+2} = 3 \text{ of } \sqrt{x+2} = -2$$

De eerste geeft  $x = 7$  als oplossing. De tweede heeft geen oplossing.

- d** Vervang  $\left(\frac{2a-1}{a+1}\right)$  door  $c$ .

$$c^2 = c + 2$$

$$c^2 - c - 2 = 0$$

$$(c-2)(c+1) = 0$$

$$c = 2 \text{ of } c = -1$$

$$\frac{2a-1}{a+1} = 2 \text{ of } \frac{2a-1}{a+1} = -1$$

$$2a-1 = 2(a+1) \text{ of } 2a-1 = -1(a+1)$$

$$2a-1 = 2a+2 \text{ of } 2a-1 = -a-1$$

$$-1 = 2 \text{ of } 3a = 0$$

De eerste vergelijking geeft geen oplossing, de tweede heeft als oplossing  $a = 0$ .

- e** Vervang  $3\sin(x) - 1$  door  $p$ .

$$\left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{p^2}{16} = \frac{1}{4}$$

$$p^2 = 4$$

$$p = -2 \text{ of } p = 2$$

$$3\sin(x) - 1 = -2 \text{ of } 3\sin(x) - 1 = 2$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{3} \text{ of } \sin(x) = 1$$

$$x \approx 3,48 + k \cdot 2\pi \text{ of } x \approx 5,94 + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

- f** Vervang  $2^x - 4$  door  $q$ .

$$q^3 = \frac{1}{q}, \text{ dus } q^4 = 1$$

Hieruit volgt  $q = -1$  of  $q = 1$ .

$$2^x - 4 = -1 \text{ of } 2^x - 4 = 1$$

$$2^x = 3 \text{ of } 2^x = 5$$

$$x = {}^2\log(3) \approx 1,58 \text{ of } x = {}^2\log(5) \approx 2,32$$

- g** Vervang  $\frac{e^x - 1}{e^x - e}$  door  $a$ .

$$2a = a^2$$

$$a(a-2) = 0$$

$$a = 0 \text{ of } a = 2$$

$$\frac{e^x - 1}{e^x - e} = 0 \text{ of } \frac{e^x - 1}{e^x - e} = 2$$

$$e^x - 1 = 0 \text{ of } e^x - 1 = 2(e^x - e)$$

$$e^x = 1 \text{ of } e^x = 2e - 1$$

$$x = 0 \text{ of } x = \ln(2e - 1) \approx 1,49$$

- 3a** Vervang  $4^x$  door  $t$ .

$$\text{Dan is } 4^{2x} = (4^x)^2 = t^2 \text{ en } 4^{x+2} = 4^2 \cdot 4^x = 16t.$$

De vergelijking wordt  $t^2 + 16t + 4 = 516$ .

$$t^2 + 16t - 512 = 0$$

$$(t+32)(t-16) = 0$$

$$t = -32 \text{ of } t = 16$$

$$4^x = -32 \text{ of } 4^x = 16$$

De eerste vergelijking heeft geen oplossing, de tweede vergelijking geeft  $x = 2$ .

- b**  $4^{2x} > 0$  en  $4^{x+2} > 0$ , dus het bereik is  $\langle 4, \rightarrow \rangle$ .

## Pagina 107:

- 4a** Stel  $u = \cos(2x)$ , dan is  $\frac{du}{dx} = -2\sin(2x)$ .  
 Dan is  $y = u^3 - \frac{5}{u^2} + \sqrt{u} = u^3 - 5u^{-2} + u^{\frac{1}{2}}$  en  $\frac{dy}{du} = 3u^2 + 10u^{-3} + \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = 3u^2 + \frac{10}{u^3} + \frac{1}{2\sqrt{u}}$ .  

$$f'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(3u^2 + \frac{10}{u^3} + \frac{1}{2u}\right) \cdot -2\sin(2x)$$

$$f'(x) = -2\sin(2x) \cdot \left(3\cos^2(2x) + \frac{10}{\cos^3(2x)} + \frac{1}{2\sqrt{\cos(2x)}}\right)$$
- b** Stel  $u = \sqrt{e^x + 1}$ , dan is  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{e^x + 1}} \cdot e^x = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$ .  
 Dan is  $y = \frac{5}{u} - 2u = 5u^{-1} - 2u$ , dus  $\frac{dy}{du} = -5u^{-2} - 2 = -\frac{5}{u^2} - 2$ .  

$$g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(-\frac{5}{u^2} - 2\right) \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}} = \left(-\frac{5}{e^x + 1} - 2\right) \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}} = -\frac{5e^x}{(2e^x + 2) \cdot \sqrt{e^x + 1}} - \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}$$
- c** Stel  $u = \ln(x)$ , dan is  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ .  
 Dan is  $y = \frac{2}{u^4} + \frac{4}{u^2} = 2u^{-4} + 4u^{-2}$ , dus  $\frac{dy}{du} = -\frac{8}{u^5} - \frac{8}{u^3}$ .  

$$p'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(-\frac{8}{\ln^5(x)} - \frac{8}{\ln^3(x)}\right) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{8}{x \cdot \ln^5(x)} - \frac{8}{x \cdot \ln^3(x)}$$
- d** Stel  $u = x^2 + 1$ , dan is  $\frac{du}{dx} = 2x$ .  
 Dan is  $y = \frac{2}{u} - \frac{4}{u^2} + \frac{8}{u^3} = 2u^{-1} - 4u^{-2} + 8u^{-3}$ , dus  $\frac{dy}{du} = -2u^{-2} + 8u^{-3} - 24u^{-4} = -\frac{2}{u^2} + \frac{8}{u^3} - \frac{24}{u^4}$ .  

$$q'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(-\frac{2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{8}{(x^2 + 1)^3} - \frac{24}{(x^2 + 1)^4}\right) \cdot 2x = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{16x}{(x^2 + 1)^3} - \frac{48x}{(x^2 + 1)^4}$$
- 5a** Op  $t = 0$  is het zuurstofgehalte 200 cm<sup>3</sup> zuurstof per liter lucht.  
 Als  $t$  grote waarden aanneemt, naderen de breuken in de formule tot 0 en nadert  $Z$  weer tot 200.
- b** Stel  $u = t + 10$ , dan is  $\frac{du}{dt} = 1$ .  
 Dan is  $y = 200\left(1 - \frac{10}{u} + \frac{100}{u^2}\right) = 200 - 2000u^{-1} + 20000u^{-2}$ , dus  

$$\frac{dy}{du} = 2000u^{-2} - 40000u^{-3} = \frac{2000}{u^2} - \frac{40000}{u^3}$$

$$Z'(t) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{2000}{(t + 10)^2} - \frac{40000}{(t + 10)^3}$$
 en hieruit volgt  $Z'(0) = -20$ .  
 De afgeleide is voor  $t = 0$  negatief, dus het zuurstofgehalte  $Z$  begint op  $t = 0$  te dalen.
- c** Als het zuurstofgehalte minimaal is, geldt  $Z'(t) = 0$ .  

$$\frac{2000}{(t + 10)^2} - \frac{40000}{(t + 10)^3} = 0$$

$$\frac{2000}{(t + 10)^2} = \frac{40000}{(t + 10)^3}$$

$$2000(t + 10)^3 = 40000(t + 10)^2$$

$$2000(t + 10) = 40000 \text{ (er mag door } t + 10 \text{ gedeeld worden, omdat de formule op } t = -10 \text{ nog niet van toepassing is).}$$

$$t + 10 = 20$$
 Op  $t = 10$  wordt het minimum bereikt.

- d Het normale niveau is  $Z = 200$ , dus 90% van het normale niveau is  $Z = 180$ .

$$Z(60) = 200 \left( 1 - \frac{10}{70} + \frac{100}{70^2} \right) \approx 176 < 180, \text{ dus de uitspraak klopt niet met de formule.}$$

- 6a Stel  $u = 2\sin(x) - 1$ , dan is  $f(x) = u^2 + 4u$ .

$$u^2 + 4u = 0$$

$$u(u + 4) = 0$$

$$u = 0 \text{ of } u = -4$$

$$2\sin(x) - 1 = 0 \text{ of } 2\sin(x) - 1 = -4.$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \sin(x) = -1\frac{1}{2}$$

De tweede vergelijking heeft geen oplossing, dus de oplossing is  $x = \frac{1}{6}\pi$  of  $x = \frac{5}{6}\pi$ .

- b  $y = u^2 + 4u$ , dus  $\frac{dy}{du} = 2u + 4$  en  $\frac{du}{dx} = 2\cos(x)$ .

$$f'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2(2\sin(x) - 1) + 4) \cdot 2\cos(x) = (4\sin(x) + 2) \cdot 2\cos(x)$$

Er moet gelden  $f'(x) = 0$ .

$$(4\sin(x) + 2) \cdot 2\cos(x) = 0$$

$$4\sin(x) + 2 = 0 \text{ of } 2\cos(x) = 0$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \text{ of } \cos(x) = 0$$

$$x = \frac{1}{6}\pi \text{ en } x = \frac{5}{6}\pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \frac{3}{2}\pi$$

De uiterste waarden zijn  $f(\frac{1}{2}\pi) = 5$ ,  $f(\frac{1}{6}\pi) = -4$ ,  $f(\frac{1}{2}\pi) = -3$  en  $f(\frac{5}{6}\pi) = -4$ .

- c Uit opdracht b en een plot volgt  $\langle \pi, 1\frac{1}{6}\pi \rangle$ ,  $\langle 1\frac{1}{6}\pi, 1\frac{1}{2}\pi \rangle$ ,  $\langle 1\frac{1}{2}\pi, 1\frac{5}{6}\pi \rangle$  en  $\langle 1\frac{5}{6}\pi, 2\pi \rangle$ .

### Pagina 108:

- 7a De schakels zijn  $\dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{\dots^3} \dots$

- b De schakels van de inverse zijn  $\dots \xleftarrow{\dots^2} \dots \xleftarrow{:2} \dots \xleftarrow{-1} \dots \xleftarrow{\sqrt[3]{\dots}} \dots$

Het functievoorschrift van de inverse is  $f^{-1}(x) = \left( \frac{\sqrt[3]{x-1}}{2} \right)^2$ .

- 8a De schakels zijn  $\dots \xrightarrow{\times 3} \dots \xrightarrow{-6} \dots \xrightarrow{\frac{1}{2}} \dots \xrightarrow{\times 2} \dots$

De schakels van de inverse zijn  $\dots \xleftarrow{:3} \dots \xleftarrow{+6} \dots \xleftarrow{\frac{1}{2}} \dots \xleftarrow{:2} \dots$

Het functievoorschrift van de inverse is  $f^{-1}(x) = \frac{\frac{1}{2}x + 6}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}x} + 2 = \frac{2}{3x} + 2$ .

- b De schakels zijn  $\dots \xrightarrow{\times 3} \dots \xrightarrow{+2} \dots \xrightarrow{2^-} \dots$

De schakels van de inverse zijn  $\dots \xleftarrow{:3} \dots \xleftarrow{-2} \dots \xleftarrow{{}^2\log(\dots)} \dots$

Het functievoorschrift van de inverse is  $f^{-1}(x) = \frac{{}^2\log(x) - 2}{3}$ .

- c De schakels zijn  $\dots \xrightarrow{\dots^3} \dots \xrightarrow{\times 3} \dots \xrightarrow{+2} \dots \xrightarrow{{}^2\log(\dots)} \dots$

De schakels van de inverse zijn  $\dots \xleftarrow{\sqrt[3]{\dots}} \dots \xleftarrow{:3} \dots \xleftarrow{-2} \dots \xleftarrow{2^-} \dots$

Het functievoorschrift van de inverse is  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2^x - 2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 2^x - \frac{2}{3}}$ .

- d De schakels zijn  $\dots \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{+4} \dots \xrightarrow{\ln(\dots)} \dots \xrightarrow{\frac{1}{e}} \dots \xrightarrow{\times 4} \dots \xrightarrow{+3} \dots$

De schakels van de inverse zijn  $\dots \xleftarrow{:2} \dots \xleftarrow{-4} \dots \xleftarrow{e^-} \dots \xleftarrow{\frac{1}{e}} \dots \xleftarrow{:4} \dots \xleftarrow{-3} \dots$

Het functievoorschrift van de inverse is  $f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{4}{x-3}} - 4}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{4}{x-3}} - 2$ .

- 9a Als het punt  $(x, y)$  op de grafiek van  $f(x)$  ligt, dan ligt het punt  $(y, x)$  op de inverse.

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & x(2y - 3) = y + 2 \\
 & 2xy - 3x = y + 2 \\
 & 2xy - y = 3x + 2 \\
 & y(2x - 1) = 3x + 2 \\
 & y = \frac{3x + 2}{2x - 1}
 \end{aligned}$$

$$\text{c} \quad f^{-1}(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1}$$

$$\text{10a} \quad y \text{ uitdrukken in } x \text{ als } x = 2 + \frac{3}{y + 1} \text{ geeft}$$

$$x - 2 = \frac{3}{y + 1}$$

$$y + 1 = \frac{3}{x - 2}$$

$$y = \frac{3}{x - 2} - 1$$

$$\text{De inverse functie is } f^{-1}(x) = \frac{3}{x - 2} - 1.$$

$$\text{b} \quad y \text{ uitdrukken in } x \text{ als } x = \frac{2y - 4}{y + 3} \text{ geeft}$$

$$xy + 3x = 2y - 4$$

$$xy - 2y = -3x - 4$$

$$y(x - 2) = -3x - 4$$

$$y = \frac{-3x - 4}{x - 2} = \frac{3x + 4}{2 - x}$$

$$\text{De inverse functie is } g^{-1}(x) = \frac{3x + 4}{2 - x}.$$

$$\text{c} \quad y \text{ uitdrukken in } x \text{ als } x = e^{2y + 4} \text{ geeft}$$

$$\ln(e^{2y + 4}) = \ln(x)$$

$$2y + 4 = \ln(x)$$

$$y = \frac{1}{2} \ln(x) - 2$$

$$\text{De inverse functie is } h^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln(x) - 2.$$

$$\text{d} \quad y \text{ uitdrukken in } x \text{ als } x = \sqrt{y^2 + 4} - y \text{ geeft}$$

$$x + y = \sqrt{y^2 + 4}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = y^2 + 4$$

$$2xy = 4 - x^2$$

$$y = \frac{4 - x^2}{2x}$$

$$\text{De inverse functie is } k^{-1}(x) = \frac{4 - x^2}{2x}.$$

$$\text{e} \quad y \text{ uitdrukken in } x \text{ als } x = {}^2\log(3 + \sqrt{y}) \text{ geeft}$$

$$3 + \sqrt{y} = 2^x$$

$$\sqrt{y} = 2^x - 3$$

$$y = (2^x - 3)^2 = 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 9$$

$$\text{De inverse functie is } l^{-1}(x) = 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 9.$$

$$\text{11a} \quad y \text{ uitdrukken in } x \text{ als } x = \frac{2y + 2}{y - 2} \text{ geeft}$$

$$xy - 2x = 2y + 2$$

$$xy - 2y = 2x + 2$$



$$y(x-2) = 2x+2$$

$$y = \frac{2x+2}{x-2}$$

$$\text{De inverse functie is } f^{-1}(x) = \frac{2x+2}{x-2} = f(x).$$

**b**  $y$  uitdrukken in  $x$  als  $x = \frac{ay+b}{y-a}$  geeft

$$xy - ax = ay + b$$

$$xy - ay = ax + b$$

$$y(x-a) = ax + b$$

$$y = \frac{ax+b}{x-a}$$

$$\text{De inverse functie is } g^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x-a} = g(x).$$

**12**  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ , dus aangetoond moet worden  $g\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = x$ .

$$g\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \ln \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}\right)} = \ln \left(\frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{2e^x}{2e^{-x}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(e^{2x}) = \frac{1}{2} \ln(e^x)^2 = \ln(e^x) = x$$

Dus  $f(x)$  en  $g(x)$  zijn elkaars inverse.

**Pagina 109:**

**13a**  $y$  uitdrukken in  $x$  als  $x = \ln(2y-1)$  geeft

$$e^x = 2y - 1$$

$$2y = e^x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}(e^x + 1) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}$$

**b** Oplossen van  $g(x) = 3$  geeft

$$\frac{1}{2}(e^x + 1) = 3$$

$$e^x = 5$$

$$x = \ln(5)$$

De oppervlakte van de rechthoek is  $3 \ln(5)$ .

Het gebied in de rechthoek onder de grafiek is  $\int_0^{\ln(5)} g(x) \, dx$ .

De oppervlakte van het gekleurde gebied is  $3 \ln(5) - \int_0^{\ln(5)} g(x) \, dx$ .

**c**  $3 \ln(5) - \int_0^{\ln(5)} \left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\right) \, dx = 3 \ln(5) - \left[\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}x\right]_0^{\ln(5)} = 3 \ln(5) - \left(2\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(5) - \frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2} \ln(5) - 2$

**14a**  $y$  uitdrukken in  $x$  als  $x = \ln(2y)$  geeft

$$2y = e^x$$

$$y = \frac{1}{2}e^x$$

De hoekpunten van de rechthoek zijn  $(0, 0)$ ,  $(\ln(2e), 0)$ ,  $(\ln(2e), e)$  en  $(0, e)$ .

De oppervlakte van de rechthoek is  $e \cdot \ln(2e) = e \cdot (\ln(e) + \ln(2)) = e \cdot (1 + \ln(2)) = e + e \ln(2)$ .

$$\int_{\frac{1}{2}}^e \ln(2x) dx = (e + e \ln(2)) - \int_0^{\ln(2e)} \frac{1}{2} e^x dx = (e + e \ln(2)) - \left[ \frac{1}{2} e^x \right]_0^{\ln(2e)} = e + e \ln(2) - \left( \frac{1}{2} e^{\ln(2e)} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$e + e \ln(2) - \left( \frac{1}{2} \cdot 2e - \frac{1}{2} \right) = e \ln(2) + \frac{1}{2}$$

- b**  $y$  uitdrukken in  $x$  als  $x = \sqrt{2 + \sqrt{y}}$  geeft

$$x^2 = 2 + \sqrt{y}$$

$$y = (x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4.$$

De hoekpunten van de rechthoek zijn  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 4)$  en  $(0, 4)$ .

De oppervlakte van de rechthoek is  $4 \cdot 2 = 8$ .

$$\int_0^4 \sqrt{2 + \sqrt{x}} dx = 8 - \int_{\sqrt{2}}^2 (x^4 - 4x^2 + 4) dx = 8 - \left[ \frac{1}{5} x^5 - \frac{4}{3} x^3 + 4x \right]_{\sqrt{2}}^2 =$$

$$8 - \left( 3\frac{11}{15} - 2\frac{2}{15}\sqrt{2} \right) = 4\frac{4}{15} + 2\frac{2}{15}\sqrt{2}$$

- c**  $y$  uitdrukken in  $x$  als  $x = \frac{1}{1 + \sqrt{y}}$  geeft

$$1 + \sqrt{y} = \frac{1}{x}$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{x} - 1$$

$$y = \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1$$

$$\int_0^9 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = 9 \cdot \frac{1}{4} + \int_{\frac{1}{4}}^1 \left( \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \right) dx = 2\frac{1}{4} + \left[ -\frac{1}{x} - 2 \ln(x) + x \right]_{\frac{1}{4}}^1 = 2\frac{1}{4} + 3\frac{3}{4} + 2 \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 6 + 2 \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

## Extra oefening – Basis

Pagina 110:

- B-1**  $CD$  is de hoogtelijn van  $\triangle ABC$ , dus  $CD \perp AB$ .  
 $CE$  is middellijn van de cirkel en zijde van  $\triangle DEC$ .  
 Volgens de stelling van Thales geldt  $CD \perp DE$ .  
 Zowel  $AB$  als  $DE$  staan loodrecht op  $CD$ , dus  $DE$  is evenwijdig aan  $AB$ .

- B-2a**  $\angle EDB$  en  $\angle DBA$

- b** Omtrekshoek  $CAB$  staat op de boog  $BC$ .  
 Andere omtrekshoeken bij dezelfde boog zijn  $\angle BDC$  en  $\angle BEC$ .

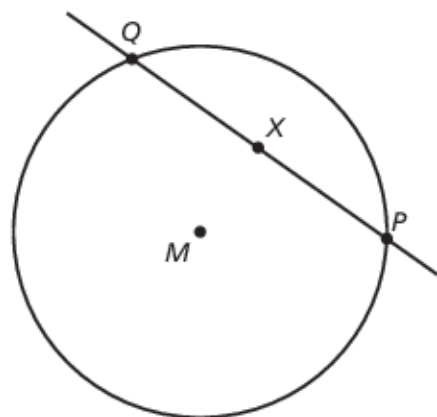
- c** In opdracht B-1 is bewezen  $DE \parallel AB$ .  
 Dan is  $\angle EDB = \angle DBA$  (Z- hoeken).  
 $\angle EDB$  is de omtrekshoek bij boog  $BE$  en  $\angle DBA$  is de omtrekshoek bij boog  $AD$ .  
 Deze omtrekshoeken zijn even groot, dus dan zijn de bogen  $BE$  en  $AD$  ook even groot.  
 Hieruit volgt  $BE = AD$ .

- B-3a** In  $\triangle ABT$  zijn de hoeken  $A$  en  $B$  elk  $60^\circ$ , dus ook  $\angle ATB = 60^\circ$ .  
 In  $\triangle ABS$  is  $\angle A = 90^\circ$  en  $\angle B = 30^\circ$ , dus  $\angle ASB = 60^\circ$ .  
 Dan geldt  $\angle APB = \angle ATB = \angle ASB = 60^\circ$ .  
 Omdat  $P$  op de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABP$  ligt, liggen ook de punten  $T$  en  $S$  op de omgeschreven cirkel (*Omgekeerde stelling van de constante hoek*).
- b**  $\angle TSP = \angle TAP = 30^\circ$  (beide zijn omtrekshoeken bij boog  $PT$ )
- B-4a**  $AD$  en  $BE$  zijn hoogtelijnen, dus  $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$ .  
 Dan liggen de punten  $D$  en  $E$  op de cirkel met middellijn  $AB$  (*Omgekeerde stelling van Thales*).  
 De punten  $A, B, D$  en  $E$  liggen op een cirkel, dus is  $ABDE$  een koordenvierhoek.
- b**  $\angle CEH + \angle CDH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , dus is  $CEDH$  een koordenvierhoek (*Omgekeerde koordenvierhoekstelling*).
- c**  $\triangle AEG \sim \triangle AEH$  (gespiegeld)  
 Dan is  $\angle AGB = \angle AHE$ .  
 $\triangle BDH \sim \triangle BDF$  (gespiegeld)  
 Dan is  $\angle BFA = \angle BHD$ .  
 $\angle AHE = \angle BHD$  (overstaande hoeken).  
 Er geldt dus  $\angle AGB = \angle BFA$ , dus  $F$  en  $G$  liggen beide op een cirkel met koorde  $AB$  (*Omgekeerde stelling constante hoek*). Hieruit volgt dat  $ABFG$  een koordenvierhoek is.
- B-5a**  $AR$  is raaklijn aan de cirkel en  $AB$  is een koorde.  
 Volgens de stelling *hoek tussen raaklijn en koorde* is  $\angle BAR$  gelijk aan de omtrekshoek bij koorde  $AB$ , dus  $\angle BAR = \gamma$ .
- b** In  $\triangle BCP$  geldt volgens de stelling *hoek tussen raaklijn en koorde*  $\angle B = \angle C = \alpha$ .  
 Dan is  $\angle P = 180 - 2\alpha$ .  
 In  $\triangle ACQ$  geldt volgens de stelling *hoek tussen raaklijn en koorde*  $\angle A = \angle C = \beta$ .  
 Dan is  $\angle Q = 180 - 2\beta$ .  
 In  $\triangle BAR$  geldt volgens de stelling *hoek tussen raaklijn en koorde*  $\angle A = \angle B = \gamma$ .  
 Dan is  $\angle R = 180 - 2\gamma$ .
- c** Volgens de koordenvierhoekstelling is de som van een paar overstaande hoeken van een koordenvierhoek gelijk aan  $180^\circ$ .  
 In vierhoek  $ARBC$  vormen  $\angle R$  en  $\angle C$  een paar overstaande hoeken.  
 $\angle R + \angle C = (180 - 2\gamma) + \gamma = 180 - \gamma$   
 Omdat  $\gamma > 0$  is  $\angle R + \angle C \neq 180^\circ$  voor elke waarde van  $\gamma$ .  
 Hieruit volgt dat  $ARBC$  geen koordenvierhoek kan zijn.

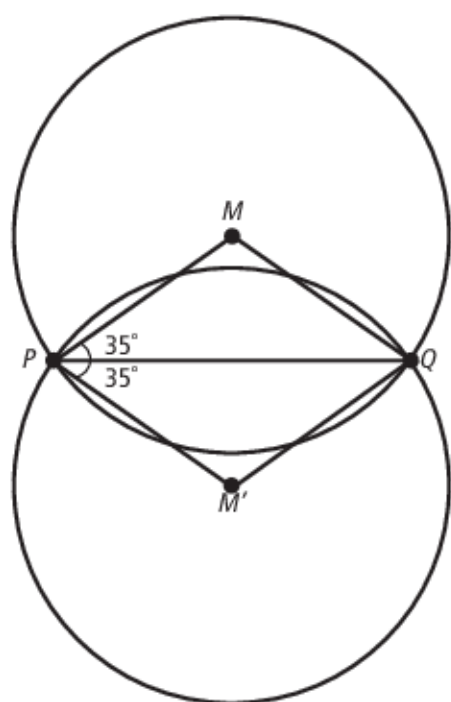
Pagina 111:

- B-6ab**  $PM = QM$  (straal van de cirkel), dus  $\triangle PMQ$  is gelijkbenig.  
 Dan is  $MX$  hoogtelijn, dus  $\angle PXM = 90^\circ$ .  
 Als de lijn om  $P$  wordt geroteerd, blijft  $\angle PXM = 90^\circ$  (behalve als  $PQ$  middellijn van de cirkel is).  
 Dus  $X$  ligt op een cirkel met middellijn  $MP$  (*Omgekeerde stelling van Thales*).  
 (Omdat ook  $M$  op deze cirkel ligt, ligt  $X$  ook op de cirkel in het geval dat  $PQ$  middellijn van de cirkel is.)

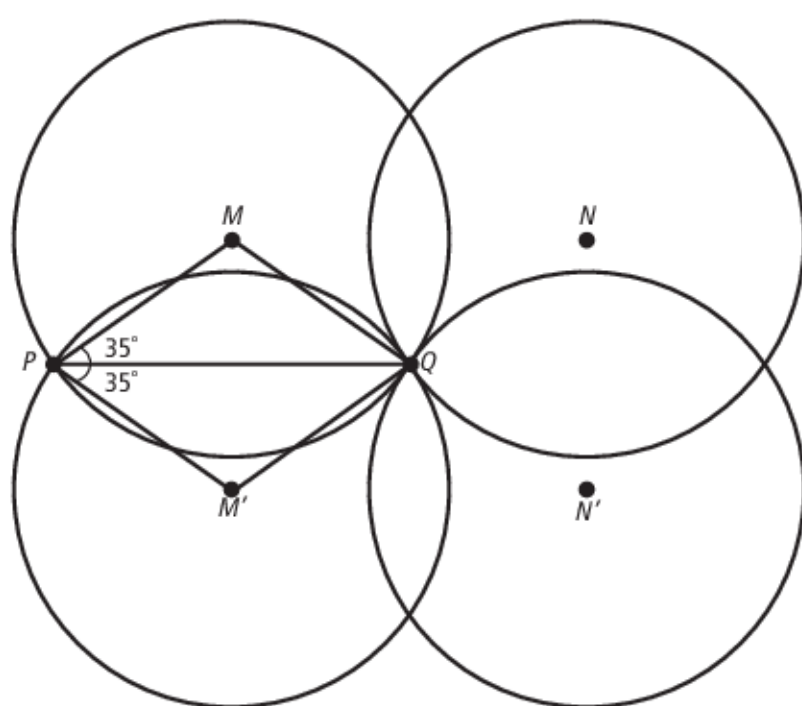
De meetkundige plaats van  $X$  is dus de cirkel met middellijn  $MP$ .

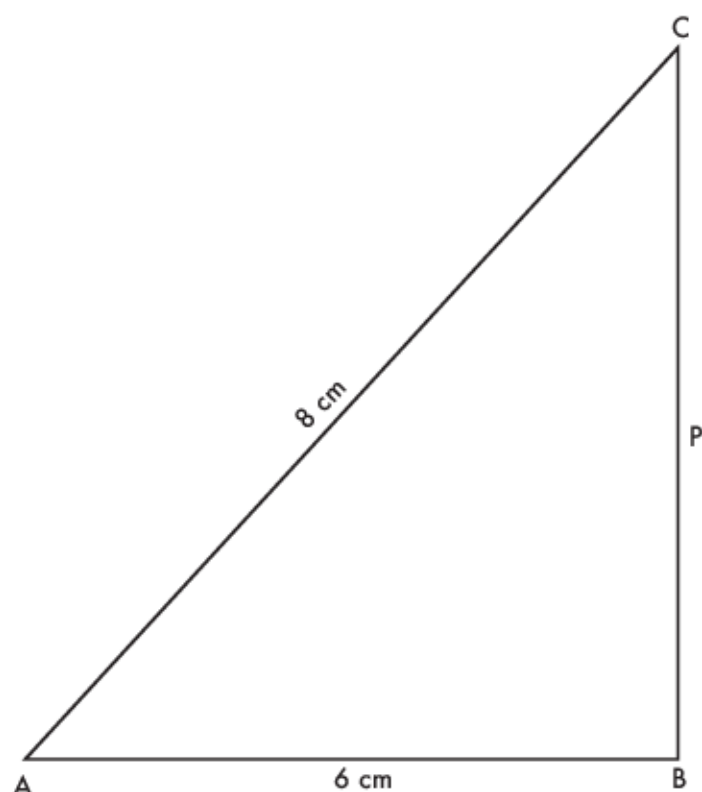


- B-7a** Er geldt  $\angle PMQ = 2\angle PXQ = 110^\circ$  (omtrekshoek).  
 Dan is  $\angle MPQ = \angle MQP = \frac{1}{2}(180^\circ - 110^\circ) = 35^\circ$ .

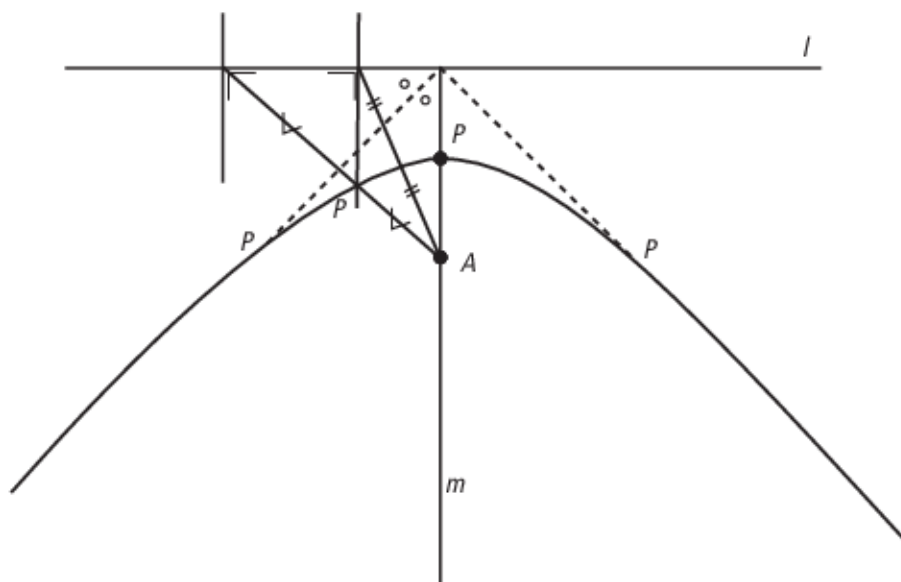
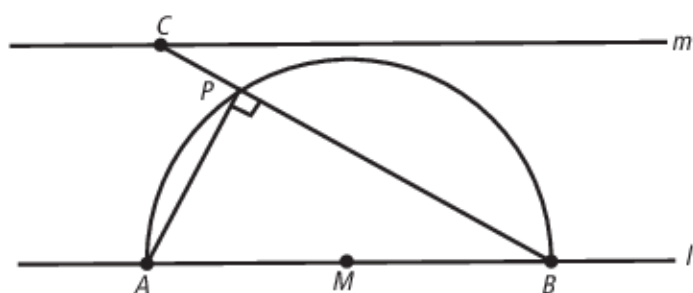


- b**  $QPXY$  is een parallellogram, dus  $XY = PQ = 5$  cm en  $XY \parallel PQ$ .  
 Punt  $Y$  ligt 5 cm naast  $X$ , dus de punten  $Y$  liggen op één van de cirkels waarvan het middelpunt 5 cm naast  $M$  en  $M'$  ligt.



**B-8ab****cd** Noem het midden van  $AB$  punt  $M$ .Dan is  $PM$  middenparallel in  $\triangle ABC$ , dus  $MP = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$ .De punten  $P$  liggen op een cirkel met middelpunt  $M$  en straal 4 cm.

**B-9abc** De meetkundige plaats van de punten  $Q$  bestaat uit twee halve lijnen en een deel van een parabool. De hoek van de lijnen is  $45^\circ$  ten opzichte van zowel  $l$  als  $m$ . De parabool heeft richtlijn  $l$  en brandpunt  $A$ .

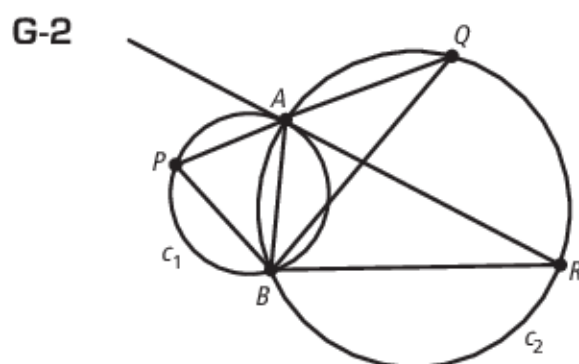
**B-10ab**  $\triangle ABP$  is rechthoekig in hoek  $P$ .Volgens de omgekeerde stelling van Thales, moet  $P$  dan op een cirkel liggen met middellijn  $AB$ .Op het moment dat  $C$  recht boven  $A$  of  $B$  is gekomen, is het niet meer mogelijk  $P$  te construeren. De eindpunten zijn dus  $A$  en  $B$ .



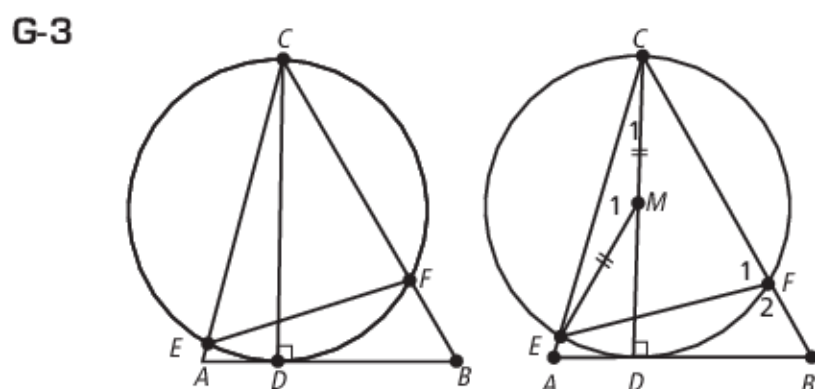
## Extra Oefening – Gemengd

Pagina 112:

- G-1**  $\angle APQ = \angle ABQ$  (omtrekshoeken bij boog  $AQ$  van  $c_1$ )  
 $\angle CPQ = \angle CDQ$  (omtrekshoeken bij boog  $CQ$  van  $c_2$ )  
 Er geldt  $\angle APQ = \angle CPQ$ , dus er geldt ook  $\angle ABQ = \angle CDQ$   
 Hieruit volgt dat deze hoeken Z- hoeken zijn, dus  $AB \parallel CD$ .



- $\angle PQB = \angle ARB$  (omtrekshoeken bij boog  $AB$  van  $c_2$ ).  
 $\angle BPQ = \angle BAR$  (Stelling hoek tussen raaklijn en koorde)  
 De driehoeken hebben twee gelijke hoeken,  $\angle PQB = \angle ARB$  en  $\angle BPQ = \angle BAR$ ,  
 dus de driehoeken zijn gelijkvormig.



- In  $\triangle ADC$  geldt  $\angle A = 180^\circ - 90^\circ - \angle C_1 = 90^\circ - \angle C_1$  (1).  
 In  $\triangle EMC$  is  $EM = MC$  (straal van de cirkel), dus  $\angle M_1 = 180 - 2 \cdot \angle C_1$ .  
 $\angle M_1$  is middelpuntshoek bij boog  $EC$  en  $\angle F_1$  is omtrekshoek bij boog  $EC$ .  
 Dan is  $\angle F_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle M_1 = 90^\circ - \angle C_1$ .  
 Hieruit volgt  $\angle F_2 = 180^\circ - (90^\circ - \angle C_1) = 90^\circ + \angle C_1$  (2).  
 Uit (1) en (2) volgt  $\angle A + \angle F_2 = (90^\circ - \angle C_1) + (90^\circ + \angle C_1) = 180^\circ$ .  
 $ABFE$  is een koordenvierhoek (Omgekeerde koordenvierhoekstelling).

- G-4** Het middelpunt van een ingeschreven cirkel is het snijpunt van de drie bissectrices van de driehoek.

$$\left. \begin{array}{l} MP = MP \\ MQ = MR \\ \angle MRP = \angle MQP \end{array} \right\} \triangle MPQ \cong \triangle MPR (ZZR)$$

- Hieruit volgt  $\angle QPM = \angle RPM$ , dus  $T$  ligt op de bissectrice vanuit hoekpunt  $P$ .  
 Omdat  $\angle QMT = \angle RMT$  geldt boog  $QT =$  boog  $RT$ .  
 Lijnstuk  $RT$  verdeelt hoek  $R$  in twee delen. De ene hoek is omtrekshoek bij boog  $QT$ , de andere bij boog  $RT$ . De twee hoeken zijn gelijk, dus  $RT$  is bissectrice van hoek  $R$ .

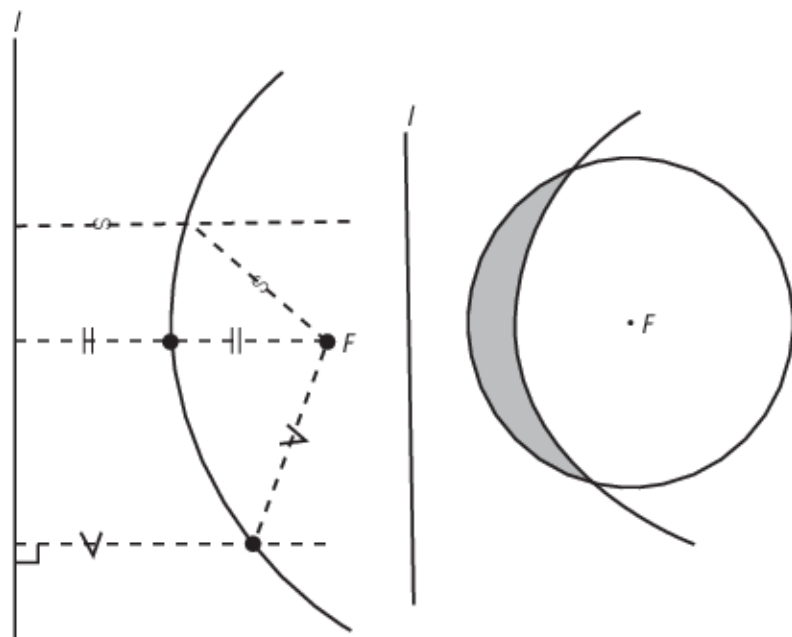
In een driehoek gaan de drie bissectrices door één punt, dus  $QT$  is de derde bissectrice.

$T$  is het snijpunt van de drie bissectrices van de driehoek, dus het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

- G-5a** Stel  $\angle BAC = \angle BQE = \alpha$ , dan is  $\angle BQP = 180 - \alpha$  (*gestrekte hoek*).  
 Hieruit zou dan volgen  $\angle BAC + \angle BQP = \alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$ , dus dan  $ABQP$  is een koordenvierhoek (*Omgekeerde koordenvierhoekstelling*).
- b**  $\angle BQE$  is een buitenhoek van  $\triangle CEQ$  en hieruit volgt  $\angle BQE = \angle ECQ + \angle CEQ$ .
- c**  $\angle BAC$  is omtrekshoek bij boog  $BC$ .  
 $\angle BQE = \angle ECQ + \angle CEQ$   
 $\angle ECQ$  is omtrekshoek bij boog  $BE$ .  
 $\angle CEQ$  is omtrekshoek bij boog  $DC$ .  
 Omdat de koorden  $CD$  en  $CE$  even lang zijn, zijn ook de bogen  $CD$  en  $CE$  even lang.  
 boog  $BE$  + boog  $DC$  = boog  $BE$  + boog  $CE$  = boog  $BC$   
 De hoeken  $BAC$  en  $BQE$  kunnen beide beschouwd worden als omtrekshoeken bij boog  $BC$  en zijn dus gelijk.  
 Bij opdracht a is bewezen, dat hiermee is aangetoond, dat  $ABQP$  een koordenvierhoek is.

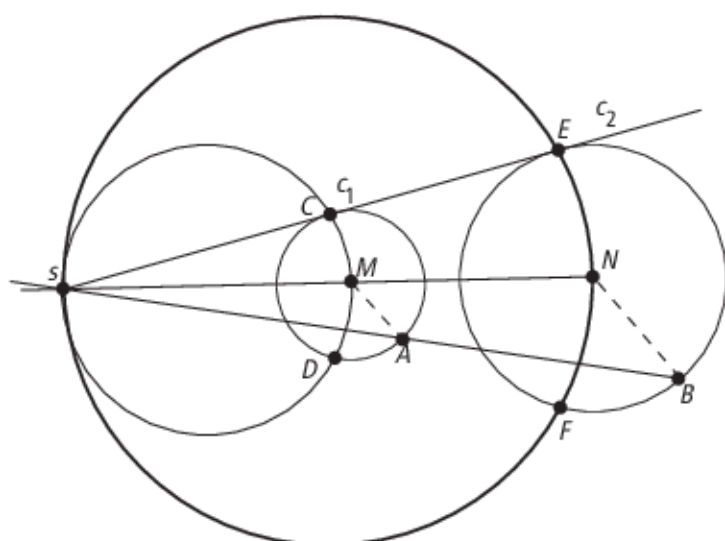
**Pagina 113:**

**G-6abd**



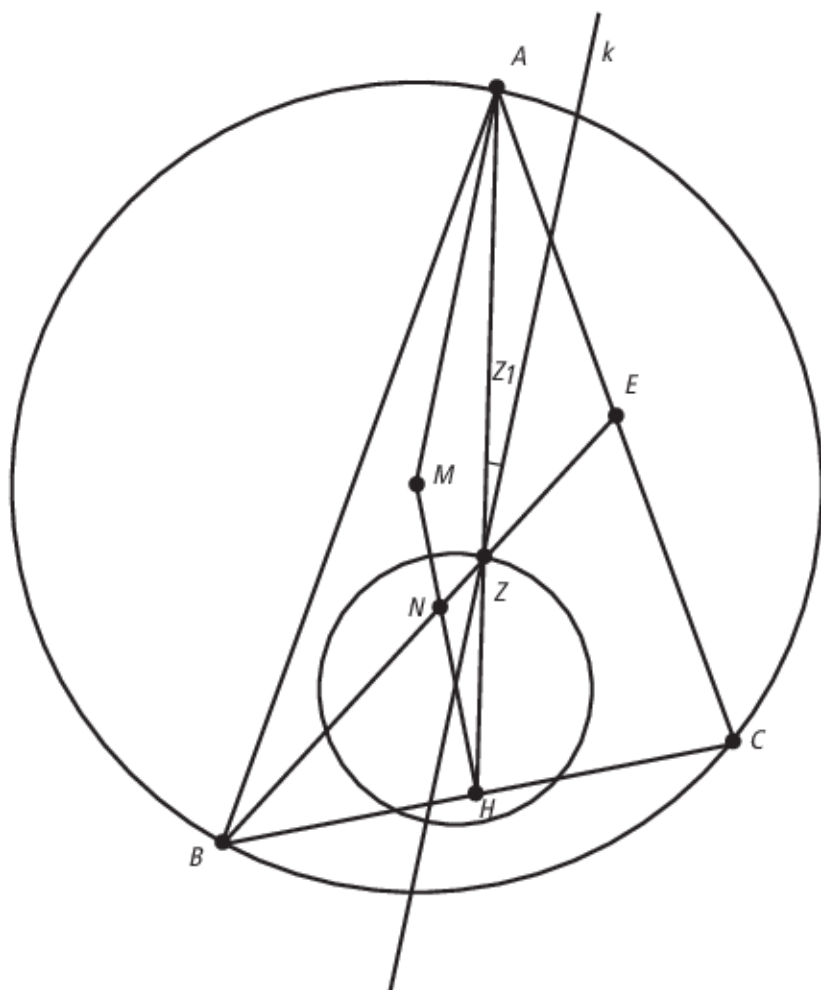
- c** Omdat  $p$  een parabool is met  $F$  als brandpunt en  $l$  als richtlijn geldt  $d(A, F) = d(A, l) = d(A, B)$ , dus  $AF = AB$  waaruit volgt dat driehoek  $FAB$  gelijkbenig is.
- d**  $d(P, F) < 3$  cm is het binnengebied van een cirkel met middelpunt  $F$  en straal 3 cm.  
 $d(P, F) > d(P, l)$  is het gebied tussen de parabool en lijn  $l$ .  
 Het grijsgetekende gebied in de tekening is de oplossing.

G-7abcd



- e In  $\triangle SMC$  is  $SM$  middellijn, dus is  $\angle SCM = 90^\circ$  (Thales).  
 In  $\triangle SNE$  is  $SN$  middellijn, dus is  $\angle SEN = 90^\circ$  (Thales).  
 Dan is  $\triangle SMC \sim \triangle SNE$ , want  $\angle MSC = \angle NSE$  en  $\angle SMC = \angle SNE = 90^\circ$ .  
 $N$  ligt op het verlengde van  $SM$ , dus  $E$  ligt op het verlengde van  $SC$ .  
 De punten  $S$ ,  $C$  en  $E$  liggen op een rechte lijn.
- f De lijn  $SC$  staat loodrecht op de straal van  $c_1$  en  $C$  ligt op de cirkel, dus is  $SC$  raaklijn.  
 De lijn  $SE$  staat loodrecht op de straal van  $c_2$  en  $E$  ligt op de cirkel, dus is  $SE$  raaklijn.

G-8a



- b  $\angle AHM = \angle ZHN$  (dezelfde hoek)  
 $\angle MAH = \angle Z_1 = \angle NZH$  (respectievelijk  $Z$ -hoeken en overstaande hoeken)  
 $\triangle AMH$  en  $\triangle ZNH$  hebben twee gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig.
- c Bij opdracht b is bewezen  $\triangle AMH \sim \triangle ZNH$ .  
 Dan geldt  $MA : ZN = AH : ZH$ .  
 Vul nu in:  $ZH = \frac{1}{3} \cdot AH$ . Dit geeft  $MA : ZN = AH : \frac{1}{3} \cdot AH = 3 : 1$ .  
 Daaruit volgt  $ZN = \frac{1}{3} \cdot MA$ , dus  $Z$  ligt op een cirkel met middelpunt  $N$  en straal  $\frac{1}{3} \cdot MA$ .

## Extra oefening – Vaardigheden

**V-1a**  $(x-5)(x-1)=0$

$x=5$  of  $x=1$

**b**  $x^2-5x-6=0$

$(x-6)(x+1)=0$

$x=6$  of  $x=-1$

**c**  $x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3$  of  $x=-2$

**d**  $x^2-6x+5=0$

$(x-5)(x-1)=0$

$x=5$  of  $x=1$

**V-2a**  $4x-7=9$  of  $4x-7=-9$

$4x=16$  of  $4x=-2$

$x=4$  of  $x=-\frac{1}{2}$

**b**  $2x+1=0$  of  $3x-5=x$

$2x=-1$  of  $2x=5$

$x=-\frac{1}{2}$  of  $x=2\frac{1}{2}$

$x=2 \pm \sqrt{3}$  of  $x=-1$  of  $x=1$

**c**  $(x-3)(x+3)=(x-3)(2x+5)$

$x-3=0$  of  $x+3=2x+5$

$x=3$  of  $x=-2$

**d**  $7x-3=x-2$  of  $7x-3=-(x-2)$

$6x=1$  of  $8x=5$

$x=\frac{1}{6}$  of  $x=\frac{5}{8}$

**V-3a**  $x^3-5x^2-6x=0$

$x(x^2-5x-6)=0$

$x(x-6)(x+1)=0$

$x=0$  of  $x=6$  of  $x=-1$

**b**  $x^4-3x^3=0$

$x^3(x-3)=0$

$x=0$  of  $x=3$

**c**  $x^4-3x^2=0$

$x^2(x^2-3)=0$

$x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$

$x=0$  of  $x=\sqrt{3}$  of  $x=-\sqrt{3}$

**d**  $x^4-3x=0$

$x(x^3-3)=0$

$x=0$  of  $x=\sqrt[3]{3}$

**V-4a**  $10-2x \geq 0$ , dus  $-2x \geq -10$ , dus  $x \leq 5$ . Het domein is  $\langle \leftarrow, 5 \rangle$ .

**b**  $27-6x-x^2 \geq 0$ , dus  $x^2+6x-27 \leq 0$ , dus  $(x+9)(x-3) \leq 0$

$(x+9)(x-3)$  is een dalparabool met nulpunten  $x=-9$  en  $x=3$ , dus het domein is  $[-9, 3]$ .

**e**  $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$  of  $x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$

**f**  $D = -7 < 0$ , dus geen oplossing

**g**  $2x^2-3x-20=0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{4}$

$x=4$  of  $x=-2\frac{1}{2}$

**h**  $x = \frac{8 \pm \sqrt{324}}{10}$

$x=-1$  of  $x=2,6$

**e**  $3(2x-1)(4x+5)=x(2x-1)$

$2x-1=0$  of  $12x+15=x$

$2x=1$  of  $11x=-15$

$x=\frac{1}{2}$  of  $x=-1\frac{4}{11}$

**f**  $x^2-2x=2x-1$  of  $x^2-2x=-(2x-1)$

$x^2-4x+1=0$  of  $x^2=1$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$  of  $x=-1$  of  $x=1$

**g**  $3x+4=5$  of  $3x+4=-5$

$3x=1$  of  $3x=-9$

$x=\frac{1}{3}$  of  $x=-3$

**h**  $5(x^2-4x-12)=0$

$5(x-6)(x+2)=0$

$x=6$  of  $x=-2$

**e**  $x^4-10x^2=0$

$x^2(x^2-10)=0$

$x^2=0$  of  $x-10=0$

$x=0$  of  $x=10$

**f**  $x^2-6=x^2$  of  $x^2-6=-x^2$

$0-6=0$  of  $2x^2=6$

De eerste geeft geen oplossing.

$x=-\sqrt{3}$  of  $x=\sqrt{3}$

**g**  $1-2x^2=5$  of  $1-2x^2=-5$

$2x^2=-4$  of  $2x^2=6$

De eerste geeft geen oplossing.

$x=-\sqrt{3}$  of  $x=\sqrt{3}$

**h**  $(x^3-10)(x^3-2)=0$

$x=\sqrt[3]{10}$  of  $x=\sqrt[3]{2}$



- c**  $x \geq 0$  en  $8 - x \geq 0$ , dus  $x \leq 8$ . Het domein is  $[0, 8]$ .
- d**  $x^3 - 4x \geq 0$ , dus  $x(x^2 - 4) \geq 0$ , dus  $x(x - 2)(x + 2) \geq 0$ . Het domein is  $[-2, 0]$  en  $[2, \rightarrow)$ .
- e**  $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2) \geq 0$   
 $(x - 7)(x + 2)$  is een dalparabool, dus tussen de nulpunten negatief.  
 Het domein is  $\langle -, -2]$  en  $[7, \rightarrow)$ .
- f**  $9 - x^2 = (3 - x)(3 + x) > 0$  (omdat de wortel in de noemer staat, mag deze geen nul zijn).  
 Het domein is  $\langle -3, 3 \rangle$ .

**Pagina 115:**

- V-5a**  $12 - 4x - x^2 = 7$   
 $x^2 + 4x - 5 = 0$   
 $(x + 5)(x - 1) = 0$   
 $x = -5$  of  $x = 1$ , voldoen beide
- b**  $3x^2 - 8x + 8 = x^2$   
 $2x^2 - 8x + 8 = 0$   
 $2(x^2 - 4x + 4) = 0$   
 $2(x - 2)^2 = 0$   
 $x = 2$ , voldoet
- c**  $12 = 4\sqrt{1 + 2x}$   
 $144 = 16(1 + 2x)$   
 $144 = 16 + 32x$   
 $32x = 128$   
 $x = 4$ , voldoet
- d**  $1 - 5x = (x - 1)^2$   
 $1 - 5x = x^2 - 2x + 1$   
 $x^2 + 3x = 0$   
 $x(x + 3) = 0$   
 $x = 0$  of  $x = -3$ , voldoen geen van beide
- e**  $40 - x^2 = (-x + 4)^2$   
 $40 - x^2 = x^2 - 8x + 16$   
 $2x^2 - 8x - 24 = 0$   
 $2(x - 6)(x + 2) = 0$   
 $x = 6$  of  $x = -2$ , alleen  $x = -2$  voldoet
- f**  $\frac{x^2}{1 + 2x} = \frac{16}{9}$   
 $9x^2 = 16 + 32x$   
 $9x^2 - 32x - 16 = 0$   
 $x = \frac{32 \pm 40}{18}$   
 $x = 4$  of  $x = -\frac{4}{9}$ , alleen  $x = -\frac{4}{9}$  voldoet
- V-6a**  $2x - 1 = {}^2\log(3)$   
 $2x = {}^2\log(3) + 1$   
 $x = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(3) + \frac{1}{2}$
- b**  $x + 1 = \sqrt[7]{4}$   
 $x = \sqrt[7]{4} - 1$
- c**  $x^2 = {}^3\log(6)$   
 $x = -\sqrt[3]{\log(6)}$  of  $x = \sqrt[3]{\log(6)}$
- d**  $(2^{-1})^{3x-5} = (2^2)^{1-x}$   
 $2^{-3x+5} = 2^{2-2x}$   
 $-3x + 5 = 2 - 2x$   
 $x = 3$
- e**  $2^{x^2-2x} = 2^8$   
 $x^2 - 2x = 8$   
 $(x - 4)(x + 2) = 0$   
 $x = 4$  of  $x = -2$
- f**  $1\frac{1}{2}x = {}^7\log(35)$   
 $x = \frac{2}{3} \cdot {}^7\log(35)$
- g**  $2^{5x} = (2^{-2})^{2x-3}$   
 $2^{5x} = 2^{-4x+6}$   
 $5x = -4x + 6$   
 $9x = 6$   
 $x = \frac{2}{3}$
- h**  $2^{-x+3} = 2^3$   
 $-x + 3 = 3$   
 $x = 0$



**V-7a**  $3^x - 1 = 0$  of  $3^x - 2 = 0$

$3^x = 1$  of  $3^x = 2$

$x = 0$  of  $x = {}^3\log(2)$

**b**  $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0$

Stel  $2^x = p$ .

$p^2 - 3p - 10 = 0$

$(p - 5)(p + 2) = 0$

$p = 5$  of  $p = -2$

$2^x = 5$  of  $2^x = -2$

$x = {}^2\log(5)$  of geen oplossing

**c**  $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 6$

Stel  $2^x = p$ .

$p^2 - 3p - 4 = 0$

$(p - 4)(p + 1) = 0$

$p = 4$  of  $p = -1$

$2^x = 4$  of  $2^x = -1$

$x = 2$  of geen oplossing

**d**  $x^4 = 27$

$x = -\sqrt[4]{27}$  of  $x = \sqrt[4]{27}$

**e**  $x^6 - 6x^3 - 27 = 0$

$(x^3 - 9)(x^3 + 3) = 0$

$x^3 = 9$  of  $x^3 = -3$

$x = \sqrt[3]{9}$  of  $x = \sqrt[3]{-3}$

**f**  $x(x^2 - 27) = 0$

$x = 0$  of  $x^2 = 27$

$x = 0$  of  $x = -\sqrt{27} = -3\sqrt{3}$  of  $x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

**V-8a**  $18 - 3x > 0$

$-3x > -18$

$x < 6$ , dus het domein is  $\langle \leftarrow, 6 \rangle$ .

**b**  $18 - 3x - x^2 > 0$

$x^2 + 3x - 18 < 0$

$(x + 6)(x - 3) < 0$

$x^2 + 3x - 18$  is een dalparabool, dus het domein is  $\langle -6, 3 \rangle$ .

**c**  $x^3 - 25x > 0$

$x(x^2 - 25) > 0$

$x(x - 5)(x + 5) > 0$

Dit geldt voor  $-5 < x < 0$  en voor  $x > 5$ , dus het domein is  $\langle -5, 0 \rangle$  en  $\langle 5, \rightarrow \rangle$ .

**d**  $10 - 2x > 0$  en  $10 - 2x \neq 1$

$-2x > -10$  en  $-2x \neq -9$

$x < 5$  en  $x \neq 4\frac{1}{2}$ , dus het domein is  $\langle \leftarrow, 4\frac{1}{2} \rangle$  en  $\langle 4\frac{1}{2}, 5 \rangle$ .

**e**  $1 - x > 0$  en  $1 + x > 0$

$-x > -1$  en  $x > -1$

$x < 1$  en  $x > -1$ , dus het domein is  $\langle -1, 1 \rangle$ .

**f**  $\frac{18 - 3x}{x} > 0$  en  $x \neq 0$

Uit het tekenverloop blijkt dat dit geldt voor  $0 < x < 6$ , dus het domein is  $\langle 0, 6 \rangle$ .

**V-9a**  $3x - 2 = 2^5 = 32$

$3x = 34$

$x = 11\frac{1}{3}$

**b**  $x^2 - 4 = 3^2 = 9$

$x^2 = 13$

$x = -\sqrt{13}$  of  $x = \sqrt{13}$

**c**  $2x - 1 = e^3$

$2x = e^3 + 1$

$x = \frac{1}{2}e^3 + \frac{1}{2}$

**d**  $10 - x = 10$

$x = 0$

**e**  $x - 5 = 5^5 = 3125$

$x = 3130$

**f**  $\log((x+1)(x-1)) = 1$

$$(x+1)(x-1) = 10$$

$$x^2 - 1 = 10$$

$$x^2 = 11$$

$$x = -\sqrt{11} \text{ of } x = \sqrt{11}$$

Voor  $x = -\sqrt{11}$  bestaan de logaritmen niet,  
dus de oplossing is  $x = \sqrt{11}$ .

**g**  $\frac{1}{3}\log((1-2x)(-1-2x)) = 0$

$$(1-2x)(-1-2x) = 1$$

$$4x^2 - 1 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ of } x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Voor  $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  bestaan de logaritmen niet,  
dus de oplossing is  $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

**h**  ${}^3\log(2x+5) - {}^3\log(x^2) = 1$

$${}^3\log\left(\frac{2x+5}{x^2}\right) = 1$$

$$\frac{2x+5}{x^2} = 3$$

$$2x+5 = 3x^2$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm 8}{6}$$

$$x = 1\frac{2}{3} \text{ of } x = -\frac{1}{3}$$

Voor  $x = 1\frac{2}{3}$  bestaat  ${}^3\log(-x)$  niet,  
dus de oplossing is  $x = -\frac{1}{3}$ .

**i**  ${}^2\log(2x-3) = 0$  of  ${}^2\log(6-x) = 0$

$$2x-3 = 1 \text{ of } 6-x = 1$$

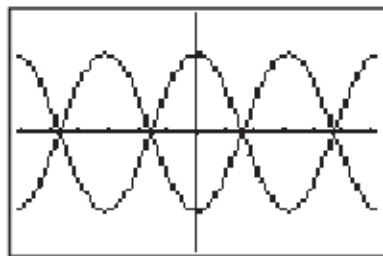
$$x = 2 \text{ of } x = 5, \text{ voldoen beide}$$

# Hoofdstuk 5 – Goniometrische formules

## Voorkennis: Symmetrie-eigenschappen

Pagina 118:

- V-1a** De grafiek van  $f$  heeft symmetrieassen  $x = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm 1\frac{1}{2}\pi, \pm 2\frac{1}{2}\pi, \pm 3\frac{1}{2}\pi, \dots$
- b** De grafiek van  $g$  heeft symmetrieassen  $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$
- c**  $\sin(-a) = -\sin(a)$  is juist, want de  $y$ -waarde van  $\sin(a)$  heeft een tegenovergesteld teken bij  $\sin(-a)$ .
- d**  $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$  is juist, want de  $y$ -waarde van  $\cos(a)$  heeft een tegenovergesteld teken bij  $\cos(\pi - a)$ .
- e**  $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$ , want de  $y$ -waarde van  $\sin(\pi + a)$  heeft een tegenovergesteld teken bij  $\sin(a)$ .
- f** Invoer:  $Y1 = \cos(\pi + X)$  en  $Y2 = \cos(X)$   
Venster:  $X_{\min} = -2\pi, X_{\max} = 2\pi, Y_{\min} = -1.5, Y_{\max} = 1.5$

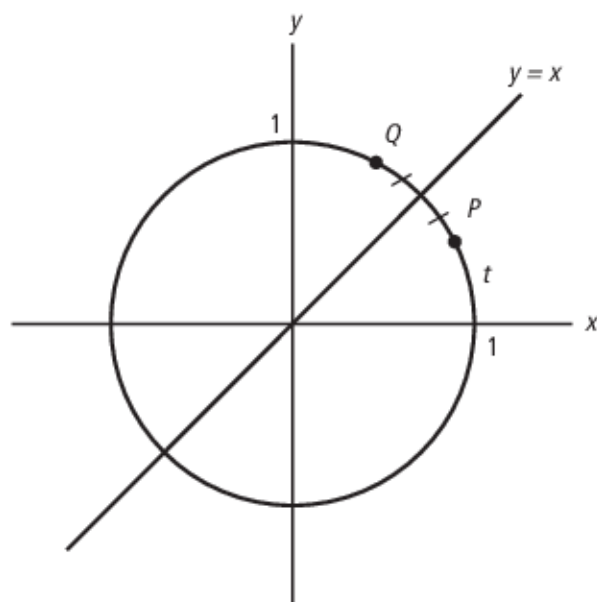


De  $y$ -waarden van de functies hebben een tegenovergesteld teken, dus  $h(t) = -k(t)$ .

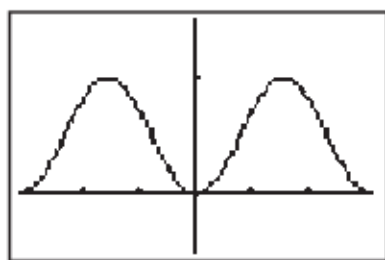
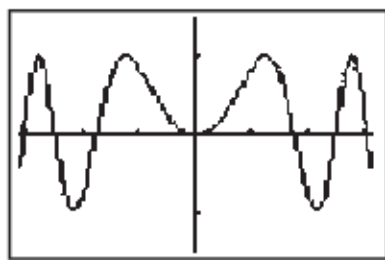
Pagina 119:

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>V-2a</b> <math>f(t) = \sin(7\pi + t)</math><br/><math>f(t) = \sin(3 \cdot 2\pi + (\pi + t))</math><br/><math>f(t) = \sin(\pi + t)</math><br/><math>f(t) = -\sin(t)</math></p> <p><b>b</b> <math>g(t) = \cos(-2\pi - t)</math><br/><math>g(t) = \cos(-(2\pi + t))</math><br/><math>g(t) = \cos(2\pi + t)</math><br/><math>g(t) = \cos(t)</math></p> <p><b>c</b> <math>h(t) = \sin(-3\pi - t)</math><br/><math>h(t) = \sin(-(3\pi + t))</math><br/><math>h(t) = -\sin(3\pi + t)</math><br/><math>h(t) = -\sin(2\pi + (\pi + t))</math><br/><math>h(t) = -\sin(\pi + t)</math><br/><math>h(t) = \sin(t)</math></p> | <p><b>d</b> <math>k(t) = \sin(-t - 23\pi)</math><br/><math>k(t) = \sin(-(t + 23\pi))</math><br/><math>k(t) = -\sin(t + 23\pi)</math><br/><math>k(t) = -\sin((t + \pi) + 11 \cdot 2\pi)</math><br/><math>k(t) = -\sin(t + \pi)</math><br/><math>k(t) = \sin(t)</math></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

V-3a



- b** Bij een punt dat gespiegeld wordt in de lijn  $y = x$  verwisselen de  $x$  en  $y$ -coördinaten van plaats. De coördinaten van  $P$  zijn  $(\cos(t), \sin(t))$ . De verwisseling van de coördinaten voor  $Q$  geeft dus  $(\sin(t), \cos(t))$ .
- c** De booglengte van  $P$  tot de  $x$ -as is  $t$ , dus de booglengte van  $Q$  tot de  $y$ -as is  $t$ . De booglengte van de  $y$ -as tot de  $x$ -as is  $\frac{1}{2}\pi$ , dus de booglengte van  $Q$  tot de  $x$ -as is  $\frac{1}{2}\pi - t$ .
- d** De  $y$ -coördinaat van  $Q$  is de  $x$ -coördinaat van  $P$ , dus  $\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos(t)$ . De  $x$ -coördinaat van  $Q$  is de  $y$ -coördinaat van  $P$ , dus  $\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin(t)$ .

V-4 Invoer:  $Y1 = \sin(X)^2$ Venster:  $X_{\min} = -\pi$ ,  $X_{\max} = \pi$ ,  $Y_{\min} = -0.5$ ,  $Y_{\max} = 1.5$ Invoer:  $Y1 = \sin(X^2)$ Venster:  $X_{\min} = -\pi$ ,  $X_{\max} = \pi$ ,  $Y_{\min} = -1.5$ ,  $Y_{\max} = 1.5$ De grafieken van  $f$  en  $g$  vallen niet samen.

**V-5a**  $f(x) = (\sin(x) + \cos(x))^2 + (\sin(x) - \cos(x))^2$   
 $f(x) = (\sin^2(x) + 2\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos^2(x)) + (\sin^2(x) - 2\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos^2(x))$   
 $f(x) = 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x)$

- b** Uit de gelijkheid  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  volgt

$$2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) =$$

$$2 \cdot (\sin^2(x) + \cos^2(x)) =$$

$$2 \cdot 1 = 2$$

De plot geeft een horizontale lijn op hoogte 2.

## 5-1 Somformules

Pagina 120:

$$1a \quad \left. \begin{array}{l} \alpha + \angle BQA = 90^\circ \\ \angle BQC = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha + \angle BQA = 90^\circ \\ \angle BQA + \angle PQC = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 90^\circ - \alpha + \angle PQC = 90^\circ \Rightarrow \angle PQC = \alpha$$

b  $\angle APD$  en  $\angle PAB$  vormen Z-hoeken, dus  $\angle APD = \alpha + \beta$ .

c

| $\triangle APQ$               | $\triangle ABQ$                | $\triangle PCQ$                | $\triangle APD$                        |
|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------------|
| $\cos(\beta) = \frac{AQ}{AP}$ | $\cos(\alpha) = \frac{AB}{AQ}$ | $\cos(\alpha) = \frac{QC}{PQ}$ | $\cos(\alpha + \beta) = \frac{PD}{AP}$ |
| $\sin(\beta) = \frac{PQ}{AP}$ | $\sin(\alpha) = \frac{BQ}{AQ}$ | $\sin(\alpha) = \frac{PC}{PQ}$ | $\sin(\alpha + \beta) = \frac{AD}{AP}$ |

$$d \quad \sin(\alpha + \beta) = \frac{AD}{AP} = \frac{AD}{1} = AD$$

$$\sin(\alpha) = \frac{BQ}{AQ} \Rightarrow BQ = AQ \cdot \sin(\alpha) \quad \cos(\alpha) = \frac{QC}{PQ} \Rightarrow QC = PQ \cdot \cos(\alpha)$$

$$AD = BQ + QC \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = AQ \cdot \sin(\alpha) + PQ \cdot \cos(\alpha)$$

e Substitutie van  $AQ = \cos(\beta)$  en  $PQ = \sin(\beta)$  in de uitdrukking bij d geeft

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha).$$

$$f \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{PD}{AP} = \frac{PD}{1} = PD$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AQ} \Rightarrow AB = AQ \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{PC}{PQ} \Rightarrow PC = PQ \cdot \sin(\alpha)$$

$$PD = AB - PC \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = AQ \cdot \cos(\alpha) - PQ \cdot \sin(\alpha)$$

Substitutie van  $AQ = \cos(\beta)$  en  $PQ = \sin(\beta)$  geeft

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

$$2a \quad \begin{aligned} g(x) &= \cos(x - \tfrac{1}{4}\pi) \\ g(x) &= \cos(x) \cdot \cos(\tfrac{1}{4}\pi) + \sin(x) \cdot \sin(\tfrac{1}{4}\pi) \\ g(x) &= \cos(x) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \sin(x) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ g(x) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(\cos(x) + \sin(x)) \end{aligned}$$

$$b \quad \begin{aligned} f(x) &= \cos(\pi + x) \\ f(x) &= \cos(\pi) \cdot \cos(x) - \sin(\pi) \cdot \sin(x) \\ f(x) &= -1 \cdot \cos(x) - 0 \cdot \sin(x) \\ f(x) &= -\cos(x) \end{aligned}$$

$$c \quad \begin{aligned} \sin(\tfrac{1}{2}\pi - t) &= \sin(\tfrac{1}{2}\pi) \cdot \cos(t) - \cos(\tfrac{1}{2}\pi) \cdot \sin(t) \\ &= 1 \cdot \cos(t) - 0 \cdot \sin(t) \\ &= \cos(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\tfrac{1}{2}\pi - t) &= \cos(\tfrac{1}{2}\pi) \cdot \cos(t) + \sin(\tfrac{1}{2}\pi) \cdot \sin(t) \\ &= 0 \cdot \cos(t) + 1 \cdot \sin(t) \\ &= \sin(t) \end{aligned}$$



## Pagina 121:

$$\begin{aligned}
 \text{3a} \quad & \sin(2t) \\
 &= \sin(t+t) \\
 &= \sin(t) \cdot \cos(t) + \cos(t) \cdot \sin(t) \\
 &= 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & \cos(2t) \\
 &= \cos(t+t) \\
 &= \cos(t) \cdot \cos(t) - \sin(t) \cdot \sin(t) \\
 &= \cos^2(t) - \sin^2(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{4} \quad & \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \Rightarrow \sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) \\
 & \text{Substitutie in } \cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) \text{ geeft} \\
 & \cos(2t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = \cos^2(t) - 1 + \cos^2(t) = 2\cos^2(t) - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \Rightarrow \cos^2(t) = 1 - \sin^2(t) \\
 & \text{Substitutie in } \cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) \text{ geeft} \\
 & \cos(2t) = 1 - \sin^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{5a} \quad & \sin(2t) = 2\cos(t) \\
 & 2\sin(t) \cdot \cos(t) = 2\cos(t) \\
 & 2\sin(t) \cdot \cos(t) - 2\cos(t) = 0 \\
 & 2\cos(t) \cdot (\sin(t) - 1) = 0 \\
 & \cos(t) = 0 \text{ of } \sin(t) - 1 = 0 \\
 & \cos(t) = 0 \text{ of } \sin(t) = 1 \\
 & t = \frac{1}{2}\pi \text{ of } t = 1\frac{1}{2}\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & \sin(2t) = 2\sin(t) \\
 & 2\sin(t) \cdot \cos(t) = 2\sin(t) \\
 & 2\sin(t) \cdot \cos(t) - 2\sin(t) = 0 \\
 & 2\sin(t) \cdot (\cos(t) - 1) = 0 \\
 & \sin(t) = 0 \text{ of } \cos(t) - 1 = 0 \\
 & \sin(t) = 0 \text{ of } \cos(t) = 1 \\
 & t = 0 \text{ of } t = \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{6a} \quad & 2\sin(t) \cdot \cos(t) = -\frac{1}{2} \\
 & \sin(2t) = -\frac{1}{2} \\
 & 2t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2t = \pi - (-\frac{1}{6}\pi) + k \cdot 2\pi \\
 & 2t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2t = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\
 & t = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \text{ of } t = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \\
 & \text{De oplossingen op } [0, 2\pi] \text{ zijn } t = \frac{7}{12}\pi \text{ of } t = \frac{11}{12}\pi \text{ of } t = 1\frac{7}{12}\pi \text{ of } t = 1\frac{11}{12}\pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & \sin^2(t) - \cos^2(t) = 1 \\
 & -(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 1 \\
 & \cos(2t) = -1 \\
 & 2t = \pi + k \cdot 2\pi \\
 & t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \\
 & \text{De oplossingen op } [0, 2\pi] \text{ zijn } t = \frac{1}{2}\pi \text{ of } t = 1\frac{1}{2}\pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{7a} \quad & \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \\
 & 2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x) \\
 & \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)
 \end{aligned}$$

- b** Een primitieve van  $\sin^2(x)$  is ook een primitieve van  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ .  
Een primitieve is dus  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$ .

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) \right]_0^{\pi} = \left( \frac{1}{2}\pi - 0 \right) - (0 - 0) = \frac{1}{2}\pi$$

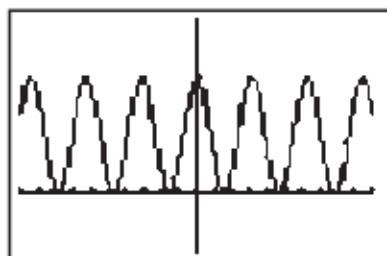
**8a**  $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$   
 $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$   
 $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

**b**  $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \right) dx = \left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \left( \frac{1}{4}\pi + 0 \right) - (0 + 0) = \frac{1}{4}\pi$

## 5-2 Herleiden

Pagina 122:

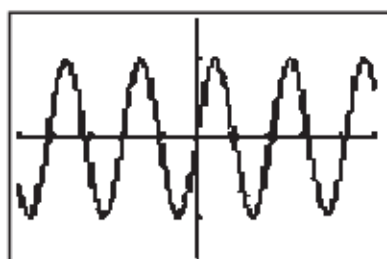
- 9a** Invoer:  $Y1 = (1 - \sin(X))(1 + \sin(X))$  en  $Y2 = \cos(X)^2$   
 Venster:  $X_{\min} = -10$ ,  $X_{\max} = 10$ ,  $Y_{\min} = -0.5$ ,  $Y_{\max} = 1.5$



De grafieken vallen samen.

- b**  $f(x) = (1 - \sin(x))(1 + \sin(x))$   
 $f(x) = 1 - \sin(x) + \sin(x) - \sin(x) \cdot \sin(x)$   
 $f(x) = 1 - \sin^2(x)$
- c** De gelijkheid  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  geldt voor elke  $x$ , dus  $1 - \sin^2(x) = \cos^2(x)$  geldt ook voor elke  $x$  zodat  $f(x) = g(x)$  voor elke  $x$  geldt.

- 10a** Invoer:  $Y1 = \sin(3X)$  en  $Y2 = 3\sin(X) - 4\sin(X)^3$   
 Venster:  $X_{\min} = -5$ ,  $X_{\max} = 5$ ,  $Y_{\min} = -1.5$ ,  $Y_{\max} = 1.5$

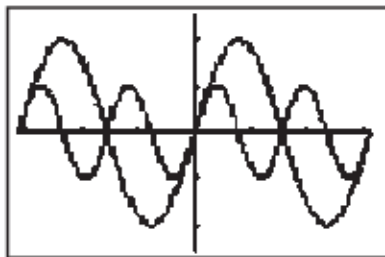


De grafieken vallen samen.

- b**  $\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x) \cdot \cos(x) + \cos(2x) \cdot \sin(x)$
- c**  $\sin(3x) = \sin(2x) \cdot \cos(x) + \cos(2x) \cdot \sin(x)$   
 $= 2\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + (1 - 2\sin^2(x)) \cdot \sin(x)$   
 $= 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$   
 $= 2\sin(x) \cdot (1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$   
 $= 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$   
 $= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{d} \quad \cos(3x) &= \cos(2x + x) \\
 &= \cos(2x) \cdot \cos(x) - \sin(2x) \cdot \sin(x) \\
 &= (2\cos^2(x) - 1) \cdot \cos(x) - 2\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) \\
 &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) \cdot \sin^2(x) \\
 &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) \cdot (1 - \cos^2(x)) \\
 &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x) \\
 &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)
 \end{aligned}$$

- 11a** Invoer:  $Y1 = \sin(4X)$  en  $Y2 = 4\sin(X) \cdot \cos(X)$   
 Venster:  $X_{\min} = -\pi$ ,  $X_{\max} = \pi$ ,  $Y_{\min} = -2.5$ ,  $Y_{\max} = 2.5$



De grafieken zijn verschillend, dus  $\sin(4t) \neq 4\sin(t) \cdot \cos(t)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad \sin(4t) &= \sin(2t + 2t) \\
 &= \sin(2t) \cdot \cos(2t) + \cos(2t) \cdot \sin(2t) \\
 &= 2\sin(2t) \cdot \cos(2t) \\
 &= 2 \cdot 2\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \cos(2t) \\
 &= 4\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \cos(2t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c} \quad \sin(8t) &= \sin(4t + 4t) \\
 &= \sin(4t) \cdot \cos(4t) + \cos(4t) \cdot \sin(4t) \\
 &= 2\sin(4t) \cdot \cos(4t)
 \end{aligned}$$

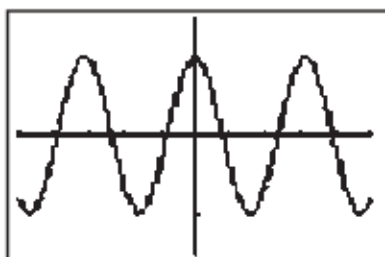
Substitutie van de uitdrukking bij b geeft:

$$\begin{aligned}
 \sin(8t) &= 2 \cdot 4\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \cos(2t) \cdot \cos(4t) \\
 &= 8\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \cos(2t) \cdot \cos(4t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d} \quad \sin(16t) &= 2\sin(8t) \cdot \cos(8t) \\
 \text{Substitutie van de uitdrukking bij c geeft:} \\
 \sin(16t) &= 2 \cdot 8\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \cos(2t) \cdot \cos(4t) \cdot \cos(8t) \\
 &= 16\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \cos(2t) \cdot \cos(4t) \cdot \cos(8t) \\
 \sin(32t) &= 2\sin(16t) \cdot \cos(16t) \\
 &= 2 \cdot 16\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \cos(2t) \cdot \cos(4t) \cdot \cos(8t) \cdot \cos(16t) \\
 &= 32\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot \cos(2t) \cdot \cos(4t) \cdot \cos(8t) \cdot \cos(16t)
 \end{aligned}$$

**Pagina 123:**

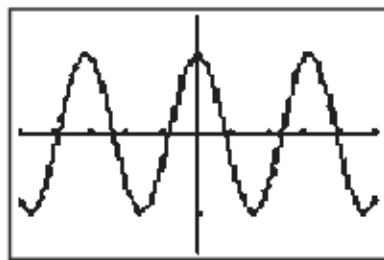
- 12a** Invoer:  $Y1 = \cos(X)^4 - \sin(X)^4$ ,  $Y2 = \cos(X)^2 - \sin(X)^2$   
 Venster:  $X_{\min} = -5$ ,  $X_{\max} = 5$ ,  $Y_{\min} = -1.5$ ,  $Y_{\max} = 1.5$



De grafieken vallen samen.

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & \cos^4(x) - \sin^4(x) \\
 &= (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot (\cos^2(x) + \sin^2(x)) \\
 &= (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot 1 \\
 &= \cos^2(x) - \sin^2(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{13a} \quad & (\cos(t) - \sin(t))^2 \\
 &= \cos^2(t) - 2\sin(t) \cdot \cos(t) + \sin^2(t) \\
 &= 1 - 2\sin(t) \cdot \cos(t) \\
 &= 1 - \sin(2t)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & \cos(4x) = \cos(2(2x)) \\
 &= 2\cos^2(2x) - 1 \\
 &= 2 \cdot (2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 \\
 &= 2 \cdot (4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1 \\
 &= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1
 \end{aligned}$$

**14a** Voor een gemeenschappelijk punt met de  $x$ -as geldt  $f(x) = 0$ .

$$1 + \cos(x) + \cos^2(x) = 0$$

$$\text{Stel } p = \cos(x).$$

$$1 + p + p^2 = 0$$

$$p^2 + p + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3.$$

De discriminant is negatief, dus er bestaat geen waarde van  $\cos(x)$  als oplossing voor  $f(x) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & p(x) = f(x) \cdot g(x) \\
 & p(x) = (1 + \cos(x) + \cos^2(x)) \cdot (1 - \cos(x)) \\
 & p(x) = 1 + \cos(x) + \cos^2(x) - \cos(x) - \cos^2(x) - \cos^3(x) \\
 & p(x) = 1 - \cos^3(x)
 \end{aligned}$$

**c** Als de grafiek van  $p$  de  $x$ -as raakt, geldt  $p(x) = 0$

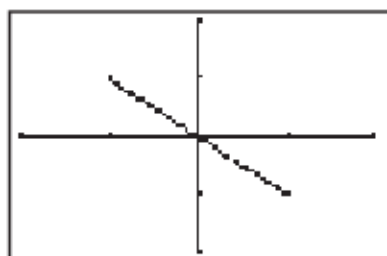
$$1 - \cos^3(x) = 0 \Rightarrow \cos^3(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) = 1 \text{ heeft oplossingen dus de grafiek van } p \text{ en de } x\text{-as hebben punten gemeenschappelijk.}$$

Als de grafiek van  $p$  de  $x$ -as snijdt dan moet gelden

$$1 - \cos^3(x) < 0 \Rightarrow \cos^3(x) > 1 \Rightarrow \cos(x) > 1, \text{ wat niet kan.}$$

De grafiek van  $p$  kan de  $x$ -as dus alleen raken.

**15a** Invoer:  $X1T = \cos(\pi - T)$  en  $Y1T = \sin(\pi/2 - T)$   
 (TI: via MODE > Par, Casio: via Type, Param)  
 Venster:  $X_{\min} = -2$ ,  $X_{\max} = 2$ ,  $Y_{\min} = -2$ ,  $Y_{\max} = 2$

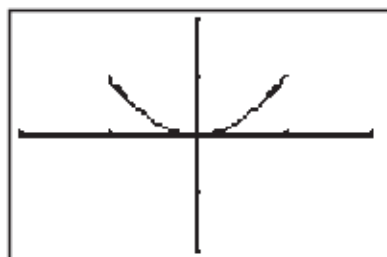


Uit  $x = \cos(\pi - t) = -\cos(t)$  volgt  $\cos(t) = -x$ .

$$y = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - t) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi) \cdot \cos(t) - \cos(\tfrac{1}{2}\pi) \cdot \sin(t) = 1 \cdot \cos(t) - 0 \cdot \sin(t) = \cos(t)$$

Substitutie van  $\cos(t)$  door  $-x$  geeft  $y = -x$ .

- b** Invoer:  $X1T = \cos(\pi/2 - T)$  en  $Y1T = (\sin(\pi - T))^2$   
 (TI: via MODE > Par, Casio: via Type, Param)  
 Venster:  $X_{\min} = -2$ ,  $X_{\max} = 2$ ,  $Y_{\min} = -2$ ,  $Y_{\max} = 2$



Uit  $x = \cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos(\frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(t) + \sin(\frac{1}{2}\pi) \cdot \sin(t) = 0 \cdot \cos(t) + 1 \cdot \sin(t) = \sin(t)$   
 volgt  $\sin(t) = x$ .

Uit  $\sin(\pi - t) = \sin(t)$  volgt  $y = \sin^2(\pi - t) = \sin^2(t)$ .

Substitutie van  $\sin(t)$  door  $x$  geeft  $y = x^2$ .

- 16a** Voor de snijpunten met de  $y$ -as geldt  $x = 0$ .  
 $\cos(3t) = 0$   
 $3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $3t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$  of  $t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$   
 $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$
- b**  $x$  heeft periode  $\frac{2}{3}\pi$  en  $y$  heeft periode  $2\pi$ , dus de periode van  $K$  is  $2\pi$ .  
 Voor bijvoorbeeld  $a = 2\pi$  en  $b = 2\pi$  of  $a = 4\pi$  en  $b = 6\pi$  krijg je dezelfde kromme.

### 5-3 Formules van Simpson

Pagina 124:

- 17a**  $\sin(t+u) + \sin(t-u)$   
 $= \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u) + \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$   
 $= 2\sin(t) \cdot \cos(u)$
- b**  $p+q = t+u + t-u = 2t \Rightarrow t = \frac{p+q}{2}$   
 $p-q = t+u - (t-u) = 2u \Rightarrow u = \frac{p-q}{2}$
- c**  $\sin(t+u) + \sin(t-u) = 2\sin(t) \cdot \cos(u)$ . Substitutie van de uitdrukking bij b geeft  
 $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ .
- d**  $\sin(t+u) - \sin(t-u)$   
 $= \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u) - (\sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u))$   
 $= \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u) - \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$   
 $= 2\cos(t) \cdot \sin(u)$   
 Substitutie van de uitdrukking bij b geeft  
 $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ .
- 18**  $\cos(t+u) + \cos(t-u)$   
 $= \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u) + \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$   
 $= 2\cos(t) \cdot \cos(u)$



Substitutie van de uitdrukkingen

$p = t + u$  en  $q = t - u$  waaruit volgt  $t = \frac{p+q}{2}$  en  $u = \frac{p-q}{2}$  geeft

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

$$\cos(t+u) + \cos(t-u)$$

$$= \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u) - (\cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u))$$

$$= \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u) - \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)$$

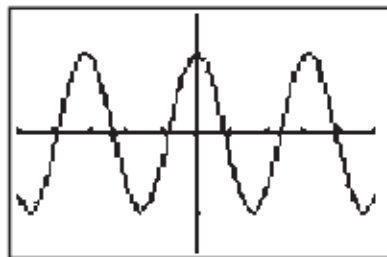
$$= -2\sin(t) \cdot \sin(u)$$

Op dezelfde manier volgt

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

**19a** Invoer:  $Y1 = \sin(2X + \pi/6) - \sin(2X - \pi/6)$

Venster:  $X_{\min} = -5$ ,  $X_{\max} = 5$ ,  $Y_{\min} = -1.5$ ,  $Y_{\max} = 1.5$



De functie is periodiek met periode  $\pi$ .

**b**  $f(x) = \sin(2x + \frac{1}{6}\pi) - \sin(2x - \frac{1}{6}\pi)$

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{2x + \frac{1}{6}\pi - 2x + \frac{1}{6}\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x + \frac{1}{6}\pi + 2x - \frac{1}{6}\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) \cdot \cos(2x)$$

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$$

$$f(x) = \cos(2x)$$

De grafiek is een sinusöide.

**Pagina 125:**

**20a**  $f(t) = \sin(t) + \sin(t - \frac{1}{3}\pi)$

$$f(t) = 2\sin\left(\frac{t + t - \frac{1}{3}\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t - t + \frac{1}{3}\pi}{2}\right)$$

$$f(t) = 2\sin\left(t - \frac{1}{6}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)$$

$$f(t) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin\left(t - \frac{1}{6}\pi\right)$$

$$f(t) = \sqrt{3}\sin\left(t - \frac{1}{6}\pi\right)$$

$$g(t) = \cos(2t) + \cos\left(t + \frac{1}{6}\pi\right)$$

$$g(t) = 2\cos\left(\frac{2t + t + \frac{1}{6}\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2t - t - \frac{1}{6}\pi}{2}\right)$$

$$g(t) = 2\cos\left(1\frac{1}{2}t + \frac{1}{12}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{12}\pi\right)$$

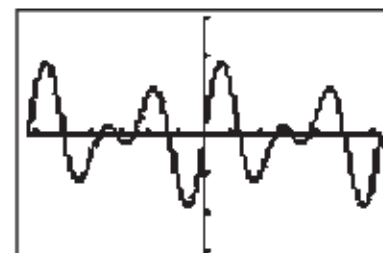
**b** Alleen  $f$  heeft als grafiek een sinusöide, want alleen  $f$  kan in de vorm

$f(x) = a\sin(b(x - c)) + d$  of  $f(x) = a\cos(b(x - c)) + d$  geschreven worden.

**21a** Invoer:  $Y1 = \sin(3X) + \sin(2X)$

Venster:  $X_{\min} = -2\pi$ ,  $X_{\max} = 2\pi$ ,  $Y_{\min} = -3$ ,  $Y_{\max} = 3$

De grafiek is geen sinusöide.



**b**  $f(x) = \sin(2x) + \sin(3x)$

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{2x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x-3x}{2}\right)$$

$$f(x) = 2\sin\left(2\frac{1}{2}x\right) \cdot \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

$$f(x) = 2\sin\left(2\frac{1}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Voor de nulpunten geldt  $\sin\left(2\frac{1}{2}x\right) = 0$  of  $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$ .

Deze vergelijkingen zijn exact op te lossen.

**c**  $\sin\left(2\frac{1}{2}x\right) = 0$  of  $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$

$$2\frac{1}{2}x = 0 + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = k \cdot \frac{2}{5}\pi \quad \text{of} \quad x = \pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op  $[0, 2\pi]$  zijn

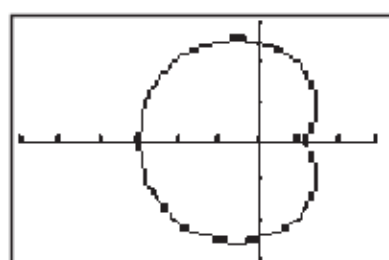
$$x = 0, x = \frac{2}{5}\pi, x = \frac{4}{5}\pi, x = \pi, x = 1\frac{1}{5}\pi, x = 1\frac{3}{5}\pi \quad \text{of} \quad x = 2\pi$$

**22** De formules  $2\sin(q) = 2\sin(q)$ ,  $0 = 0$ ,  $2\cos(q) = 2\cos(q)$  en weer  $0 = 0$ .

**23a** Invoer:  $X1T = 2\cos(T) - \cos(2T)$  en  $Y1T = 2\sin(T) - \sin(2T)$

(TI: via MODE > Par, Casio: via Type, Param)

Venster:  $X_{\min} = -6$ ,  $X_{\max} = 3$ ,  $Y_{\min} = -3$ ,  $Y_{\max} = 3$



Aflezen geeft aan dat het punt  $(1, 0)$  het dichtst bij de oorsprong ligt.

**b**  $\frac{dy}{dt} = 2\cos(t) - 2\cos(2t)$

$$\frac{dy}{dt} = 2(\cos(t) - \cos(2t))$$

$$\frac{dy}{dt} = 2(-2\sin(1\frac{1}{2}t) \cdot \sin(-\frac{1}{2}t))$$

$$\frac{dy}{dt} = 4\sin(1\frac{1}{2}t) \cdot \sin(\frac{1}{2}t)$$

**c** Als de raaklijn aan de kromme horizontaal is, geldt  $\frac{dy}{dt} = 0$ .

$$4\sin(1\frac{1}{2}t) \cdot \sin(\frac{1}{2}t) = 0$$

$$\sin(1\frac{1}{2}t) = 0 \quad \text{of} \quad \sin(\frac{1}{2}t) = 0$$

$$1\frac{1}{2}t = k \cdot \pi \quad \text{of} \quad \frac{1}{2}t = k \cdot \pi$$

$$t = k \cdot \frac{2}{3}\pi \quad \text{of} \quad t = k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op  $[0, 2\pi]$  zijn

$$t = 0 \quad \text{of} \quad t = \frac{2}{3}\pi \quad \text{of} \quad t = 1\frac{1}{3}\pi \quad \text{of} \quad t = 2\pi.$$

Alleen de oplossingen  $t = \frac{2}{3}\pi$  of  $t = 1\frac{1}{3}\pi$  voldoen (zie opdracht e).

**d** Bij  $t = \frac{2}{3}\pi$  hoort  $(-\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\sqrt{3})$  en bij  $t = 1\frac{1}{3}\pi$  hoort  $(-\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\sqrt{3})$ .

**e**  $\frac{dx}{dt} = -2\sin(t) + 2\sin(2t)$

$$\frac{dx}{dt} = -2(\sin(t) - \sin(2t))$$

$$\frac{dx}{dt} = -2(2\sin(-\frac{1}{2}t) \cdot \cos(1\frac{1}{2}t))$$

$$\frac{dx}{dt} = 4\sin(\frac{1}{2}t) \cdot \cos(1\frac{1}{2}t)$$

Als de raaklijn aan de kromme verticaal is geldt  $\frac{dx}{dt} = 0$ .

$$4\sin\left(\frac{1}{2}t\right) \cdot \cos\left(1\frac{1}{2}t\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}t\right) = 0 \text{ of } \cos\left(1\frac{1}{2}t\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}t = k \cdot \pi \text{ of } 1\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = k \cdot \pi \text{ of } t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

De oplossingen op  $[0, 2\pi]$  zijn

$$t = 0 \text{ of } t = \frac{1}{3}\pi \text{ of } t = \pi \text{ of } t = 1\frac{2}{3}\pi \text{ of } t = 2\pi.$$

Voor  $t = 0$  en  $t = 2\pi$  zijn  $\frac{dy}{dt}$  en  $\frac{dx}{dt}$  beide 0, dus bestaat de raaklijn niet.

Bij  $t = \frac{1}{3}\pi$  hoort  $(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ .

Bij  $t = \pi$  hoort  $(-3, 0)$ .

Bij  $t = 1\frac{2}{3}\pi$  hoort  $(1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ .

## 5-4 Formules gebruiken

Pagina 126:

**24a**  $y = \frac{1}{4}x^2$

$$\sin^2(t) = \frac{1}{4}(2\sin(t))^2$$

$$\sin^2(t) = \sin^2(t). \text{ Klopt.}$$

- b** De uiteinden liggen op de maximale uitwijking voor  $2\sin(t)$  en  $\sin^2(t)$ , dus op  $(-2, -1)$  en  $(2, 1)$ . Het domein is dus  $[-2, 2]$ .

**25**  $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$$x = 2\sin(t)$$

Uit  $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$  volgt

$$\cos(2t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 4\sin^2(t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot (2\sin(t))^2, \text{ dus}$$

$$y = \cos(2t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot (2\sin(t))^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

**26**  $y^2 = 4x^2 - 4x^4$

$$y = \sin(2t)$$

Uit  $\sin(2t) = 2\sin(t) \cdot \cos(t)$  volgt  $\sin^2(2t) = 4\sin^2(t) \cdot \cos^2(t)$ .

Uit  $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$  volgt  $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ .

Substitutie geeft

$$\sin^2(2t) = 4(1 - \cos^2(t)) \cdot \cos^2(t) = 4\cos^2(t) - 4\cos^4(t), \text{ dus}$$

$$y^2 = \sin^2(2t) = 4\cos^2(t) - 4\cos^4(t) = 4x^2 - 4x^4$$

Pagina 127:

**27a**  $x = 2\sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right)$

$$x = 2\left(\sin(t) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \cos(t) \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)$$

$$x = 2\left(\sin(t) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \cos(t) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$x = \sqrt{2} \cdot \sin(t) - \sqrt{2} \cdot \cos(t)$$

$$x = \sqrt{2} \cdot (\sin(t) - \cos(t))$$

**b**  $y = \sin(t) + \cos(t)$

$$y^2 = (\sin(t) + \cos(t))^2$$

$$y^2 = \sin^2(t) + 2\sin(t) \cdot \cos(t) + \cos^2(t)$$

$$y^2 = \sin^2(t) + \cos^2(t) + 2\sin(t) \cdot \cos(t)$$

$$y^2 = 1 + \sin(2t)$$

**c**  $x^2 + 2y^2 = 4$

$$(\sqrt{2} \cdot (\sin(t) - \cos(t)))^2 + 2(1 + \sin(2t))$$

$$= 2 \cdot (\sin^2(t) - 2\sin(t) \cdot \cos(t) + \cos^2(t)) + 2 + 2\sin(2t)$$

$$= 2 \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t) - 2\sin(t) \cdot \cos(t)) + 2 + 2\sin(2t)$$

$$= 2 \cdot (1 - \sin(2t)) + 2 + 2\sin(2t)$$

$$= 2 - 2\sin(2t) + 2 + 2\sin(2t)$$

$$= 4$$

**28a**  $f(x) = \sin(3x) + \sin(4x)$

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{3x+4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-4x}{2}\right)$$

$$f(x) = 2\sin\left(3\frac{1}{2}x\right) \cdot \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

$$f(x) = 2\sin\left(3\frac{1}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right).$$

**b**  $\sin\left(3\frac{1}{2}x\right) = 0$  of  $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$

$$3\frac{1}{2}x = 0 + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = k \cdot \frac{2}{7}\pi \quad \text{of} \quad x = \pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op  $[0, 2\pi]$  zijn

$$x = 0, \frac{2}{7}\pi, \frac{4}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi, \pi, 1\frac{1}{7}\pi, 1\frac{3}{7}\pi, 1\frac{5}{7}\pi \quad \text{of} \quad 2\pi.$$

**29a** 
$$\int_{1\frac{1}{2}\pi}^{2\pi} (\cos^2(x) - \sin^2(x)) dx = \int_{1\frac{1}{2}\pi}^{2\pi} \cos(2x) dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{1\frac{1}{2}\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2}\sin(4\pi) - \frac{1}{2}\sin(3\pi) = 0 - 0 = 0$$

**b** 
$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 4\sin(x) \cdot \cos(x) dx = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 2 \cdot 2\sin(x) \cdot \cos(x) dx = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 2 \cdot \sin(2x) dx = \left[-\cos(2x)\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} =$$

$$-\cos(\pi) - (-\cos(\frac{1}{2}\pi)) = -(-1) - 0 = 1$$

**30a** Aflezen van de grafiek geeft als mogelijke combinatie van waarden:

evenwichtsstand is  $1\frac{1}{2} \Rightarrow a = 1\frac{1}{2}$

amplitude is  $\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

periode is  $\pi \Rightarrow c = 2$

de grafiek ziet eruit als een cosinus maar het functievoorschrift is in de vorm van

een sinus, dus verschuiving is  $\frac{1}{4}$  periode naar links  $\Rightarrow d = -\frac{1}{4}\pi$

De grafiek lijkt dus bij  $f_2(x) = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(2(x + \frac{1}{4}\pi))$  te horen.

Omwerken van  $f_2(x) = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(2(x + \frac{1}{4}\pi))$  geeft

$$f_2(x) = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(2x + \frac{1}{2}\pi)$$

$$f_2(x) = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin(2x) \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi) + \cos(2x) \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi))$$

$$f_2(x) = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin(2x) \cdot 0 + \cos(2x) \cdot 1)$$

$$f_2(x) = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \cos(2x)$$

$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2(x)) + \cos(2x)$$

$$f_2(x) = 1 + \sin^2(x) + \cos(2x)$$

Dit voldoet aan het functievoorschrift voor  $f_2$ .

De combinatie van waarden voor  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  is dus juist.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad f_4(x) &= 1 + \sin^2 x + \cos 4x \\ f_4(x) &= 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sin^2 x + \cos 4x \\ f_4(x) &= 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + \cos 4x \\ f_4(x) &= 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \cos 4x \end{aligned}$$

## 5-5 Gemengde opdrachten

Pagina 128:

$$\text{31a} \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} v(x) \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos(x) - \cos^3(x)) \, dx.$$

b Er moet gelden  $V'(x) = v(x)$ .

$$V(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x)$$

$$V'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3\sin^2(x) \cdot \cos(x)$$

$$V'(x) = (1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x)$$

$$V'(x) = \cos(x) - \cos^3(x)$$

Dus  $V$  is een primitieve van  $v$ .

$$\text{c} \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos(x) - \cos^3(x)) \, dx = \left[ \frac{1}{3}\sin^3(x) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \left( \frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{1}{2}\pi\right) \right) - \left( \frac{1}{3}\sin^3(0) \right) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$$

32a De eindpunten van de wijzers zijn cirkels met de lengte van de wijzer als straal.

De periode van de grote wijzer is  $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$  en van de kleine wijzer  $\frac{2\pi}{\frac{1}{6}\pi} = 12$ .

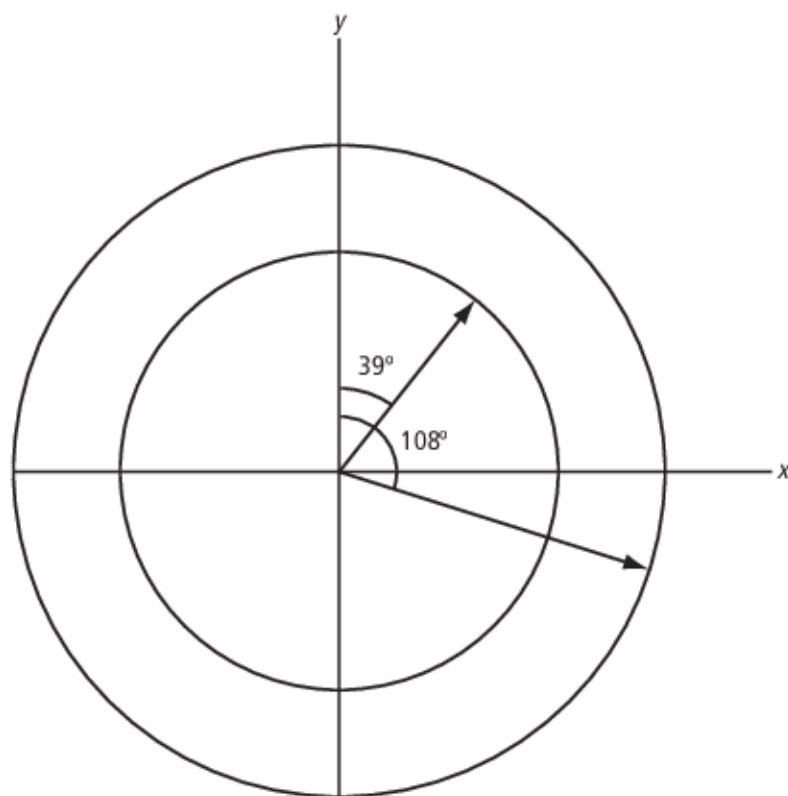
De grote wijzer staat bij  $t = 1,3$  op het  $\frac{1,3-1}{1} = 0,3$  deel van een nieuwe periode.

Eén periode is eenmaal rond, dus 0,3 komt overeen met een hoek van

$$360 \cdot 0,3 = 108^\circ \text{ ten opzichte van de } y\text{-as.}$$

De kleine wijzer staat bij  $t = 1,3$  op het  $\frac{1,3}{12}$  deel van de periode wat overeenkomt

$$\text{met een hoek van } 360 \cdot \frac{1,3}{12} = 39^\circ \text{ ten opzichte van de } y\text{-as.}$$





**b** Manier 1:

Als de wijzers over elkaar heen liggen, zijn de hoeken van de wijzers gelijk.

Dat is voor het eerst het geval nadat de grote wijzer één keer rond geweest is, dus

hoek grote wijzer = hoek kleine wijzer

$$360 \cdot (t - 1) = 360 \cdot \frac{t}{12}$$

$$t - 1 = \frac{t}{12}$$

$$12(t - 1) = t$$

$$12t - 12 = t$$

$$11t = 12, \text{ dus } t = 1\frac{1}{11}.$$

Manier 2:

Geef de grote en kleine wijzer dezelfde lengte 1. De wijzers liggen over elkaar heen als de  $x$ - en  $y$ -coördinaat van het uiteinde van de wijzers samenvallen.

Voor de  $x$ -coördinaat:

$$\sin(2\pi t) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$$

$$2\pi t = \frac{1}{6}\pi t + k \cdot 2\pi \text{ of } 2\pi t = \frac{5}{6}\pi t + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{11}{6}\pi t = k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{7}{6}\pi t = k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{12}{11}k \text{ of } t = \frac{12}{7}k$$

Voor de  $y$ -coördinaat:

$$\cos(2\pi t) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$$

$$2\pi t = \frac{1}{6}\pi t + k \cdot 2\pi \text{ of } 2\pi t = -\frac{1}{6}\pi t + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{11}{6}\pi t = k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{13}{6}\pi t = k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{12}{11}k \text{ of } t = \frac{12}{13}k$$

Alleen  $t = \frac{12}{11}k$  voldoet bij beide, dus  $t = 1\frac{1}{11}$ .

**c**  $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} =$

$$\sqrt{(3\sin(2\pi t) - 2\sin(\frac{1}{6}\pi t))^2 + (3\cos(2\pi t) - 2\cos(\frac{1}{6}\pi t))^2} =$$

$$\sqrt{9\sin^2(2\pi t) - 12\sin(2\pi t) \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi t) + 4\sin^2(\frac{1}{6}\pi t) + 9\cos^2(2\pi t) - 12\cos(2\pi t) \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi t) + 4\cos^2(\frac{1}{6}\pi t)} =$$

$$\sqrt{9(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)) - 12(\cos(2\pi t) \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi t) + \sin(2\pi t) \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi t)) + 4(\sin^2(\frac{1}{6}\pi t) + \cos^2(\frac{1}{6}\pi t))} =$$

$$\sqrt{9 \cdot 1 - 12 \cdot \cos(2\pi t - \frac{1}{6}\pi t) + 4 \cdot 1} =$$

$$\sqrt{13 - 12\cos(\frac{11}{6}\pi t)}$$

**d** Twee zijden van de driehoek zijn dan gelijk. Dat komt voor het eerst voor als de afstand tussen de eindpunten gelijk is aan de lengte van de kleine wijzer.

$$\sqrt{13 - 12\cos(\frac{11}{6}\pi t)} = 2$$

$$13 - 12\cos(\frac{11}{6}\pi t) = 4$$

$$12\cos(\frac{11}{6}\pi t) = 9$$

$$\cos(\frac{11}{6}\pi t) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Oplossen met de rekenmachine door het snijpunt van  $Y1 = \cos(\frac{11}{6}\pi t)$

en  $Y2 = \frac{3}{4}$  te vinden geeft  $t \approx 0,125$ .

**Pagina 129:**

**33a** De richtingscoëfficiënt van de kromme in een punt is  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ .

$$\frac{dx}{dt} = -3\cos^2(t) \cdot \sin(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin^2(t) \cdot \cos(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin^2(t) \cdot \cos(t)}{-3\cos^2(t) \cdot \sin(t)} = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)$$

Voor punten op  $A$  die ook op de lijn  $y = -x$  liggen, geldt  $\sin^3(t) = -\cos^3(t)$ .

$$\sin^3(t) = -\cos^3(t)$$

$$\frac{\sin^3(t)}{\cos^3(t)} = -1$$

$$\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)^3 = -1$$

$$\tan^3(t) = -1$$

$$\tan(t) = -1$$

De exacte richtingscoëfficiënt in de snijpunten is dus  $\frac{dy}{dx} = -\tan(t) = -(-1) = 1$ .

- b** Beide punten moeten dezelfde afstand hebben tot de lijn door  $(0, 1)$  en  $(0, -1)$ .

Het veronderstelde spiegelpunt is  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

De  $x$ -coördinaat van  $P$  is  $\cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

De  $x$ -coördinaat van  $Q$  is  $\cos^3(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ .

Het midden van de  $x$ -coördinaten is  $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{8}\sqrt{2} \neq \frac{1}{2}$ .

Er is dus geen spiegeling.

- c** De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in  $Q$  aan  $A$  is al berekend in opdracht a als  $-\tan(t)$ .

De lijn door de punten  $P(\cos(t), \sin(t))$  en  $Q(\cos^3(t), \sin^3(t))$  heeft richtingscoëfficiënt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(t) - \sin^3(t)}{\cos(t) - \cos^3(t)} = \frac{\sin(t) \cdot (1 - \sin^2(t))}{\cos(t) \cdot (1 - \cos^2(t))} = \frac{\sin(t) \cdot \cos^2(t)}{\cos(t) \cdot \sin^2(t)} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{1}{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}} = \frac{1}{\tan(t)}.$$

Het product van de richtingscoëfficiënten is gelijk aan  $-\tan(t) \cdot \frac{1}{\tan(t)} = -1$ ,

dus de lijn  $PQ$  staat loodrecht op de raaklijn in  $Q$  aan  $A$ .

- d**  $\frac{dx}{dt} = x'(t) = -3\cos^2(t) \cdot \sin(t)$  en  $\frac{dy}{dx} = y'(t) = 3\sin^2(t) \cdot \cos(t)$

Substitutie in  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$  geeft

$$\sqrt{(-3\cos^2(t) \cdot \sin(t))^2 + (3\sin^2(t) \cdot \cos(t))^2} =$$

$$\sqrt{9\cos^4(t) \cdot \sin^2(t) + 9\sin^4(t) \cdot \cos^2(t)} =$$

$$\sqrt{9\cos^2(t) \cdot \sin^2(t) \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t))} =$$

$$3\sqrt{\cos^2(t) \cdot \sin^2(t) \cdot 1} =$$

$$3|\sin(t) \cdot \cos(t)|.$$

- e** Op het integratie-interval  $[0, \frac{1}{2}\pi]$  zijn  $\sin(t)$  en  $\cos(t)$  positief,

dus  $\sin(t) \cdot \cos(t)$  ook. Daaruit volgt

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 3|\sin t \cdot \cos t| dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 3\sin t \cdot \cos t dt = \left[ \frac{3}{2} \sin^2 t \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \left( \frac{3}{2} \cdot 1^2 \right) - \left( \frac{3}{2} \cdot 0^2 \right) = \frac{3}{2}.$$

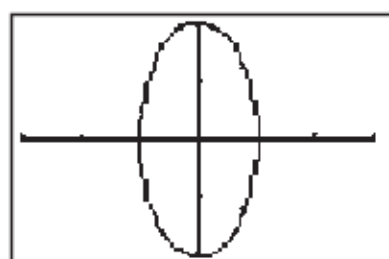
Het antwoord 1,5 is dus de exacte lengte.

## Test jezelf

Pagina 132:

- T-1a**  $f(x) = \cos(x + \frac{1}{4}\pi) + \sin(x - \frac{3}{4}\pi)$   
 $f(x) = \cos(x) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi) - \sin(x) \cdot \sin(\frac{1}{4}\pi) + \sin(x) \cdot \cos(\frac{3}{4}\pi) - \cos(x) \cdot \sin(\frac{3}{4}\pi)$   
 $f(x) = \cos(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sin(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sin(x) \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \cos(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$   
 $f(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin(x)$
- b**  $\sin(2x) = -\sqrt{2} \cdot \sin(x)$   
 $2\sin(x) \cdot \cos(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin(x)$   
 $2\sin(x) \cdot \cos(x) + \sqrt{2} \cdot \sin(x) = 0$   
 $\sin(x) \cdot (2\cos(x) + \sqrt{2}) = 0$   
 $\sin(x) = 0$  of  $2\cos(x) + \sqrt{2} = 0$   
 $\sin(x) = 0$  of  $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$   
 $x = 0 + k \cdot \pi$  of  $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$   
De oplossingen op  $[0, 2\pi]$  zijn  $x = 0, \frac{3}{4}\pi, \pi, 1\frac{1}{4}\pi$  of  $2\pi$ .
- T-2a**  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$   
 $\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$   
 $2\sin^2(2x) = 1 - \cos(4x)$   
 $\sin^2(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)$
- b** Een primitieve van  $f(x) = \sin^2(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)$  is  
 $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sin(4x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)$  want  $F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)$ .
- c**  $\int_0^{\pi} \sin^2(2x) dx = \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x) \right]_0^{\pi} = (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\sin(4\pi)) - (\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{8}\sin(0)) = \frac{1}{2}\pi - 0 = \frac{1}{2}\pi$

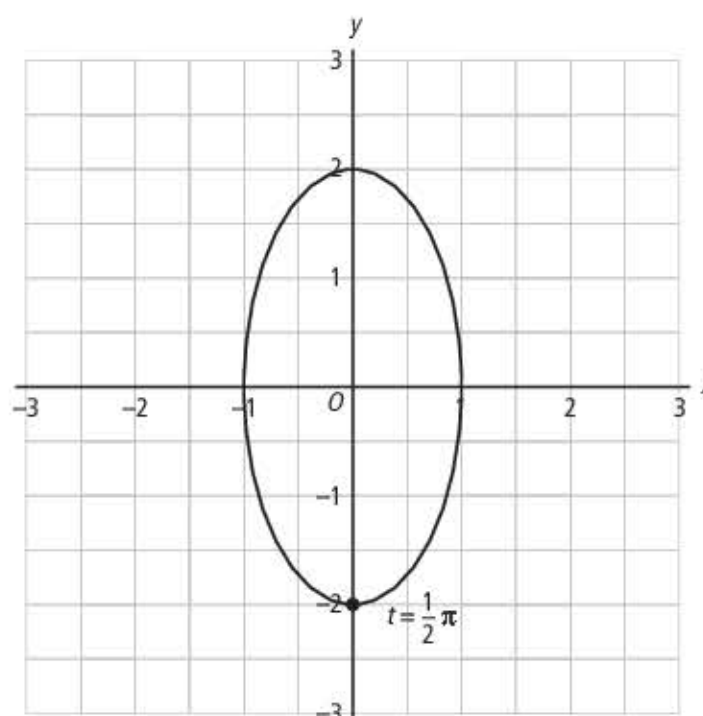
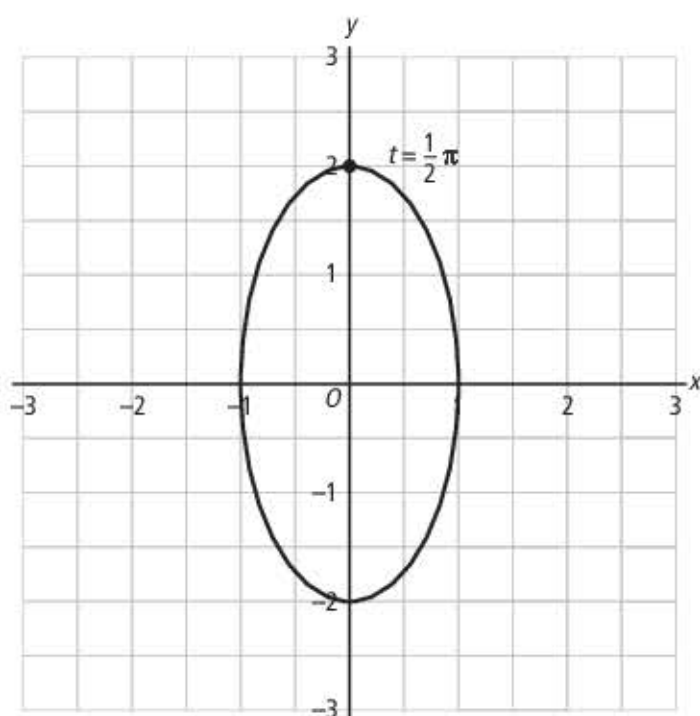
- T-3a** Invoer:  $X1T = \sin(\pi/2 - T)$ ,  $Y1T = 2\sin(T - \pi)$ ,  $X2T = -\cos(T)$  en  $Y2T = 2\sin(T)$   
(TI: via MODE > Par, Casio: via Type, Param)  
Venster:  $X_{\min} = -3$ ,  $X_{\max} = 3$ ,  $Y_{\min} = -2$ ,  $Y_{\max} = 2$



De  $x$ -waarden liggen op het interval  $[-1, 1]$ , de  $y$ -waarden liggen op het interval  $[-2, 2]$ .

- b** Voor de eerste kromme geldt  
 $x = \sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin(\frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(t) - \cos(\frac{1}{2}\pi) \cdot \sin(t) = 1 \cdot \cos(t) - 0 \cdot \sin(t) = \cos(t)$  en  
 $y = 2\sin(t - \pi) = 2\sin(-(\pi - t)) = -2\sin(\pi - t) = -2\sin(t) \Rightarrow \sin(t) = -\frac{1}{2}y$ .  
Substitutie in  $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$  geeft  $(-\frac{1}{2}y)^2 + x^2 = 1$  of  $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ .  
Voor de tweede kromme geldt  
 $x = -\cos(t) \Rightarrow \cos(t) = -x$  en  
 $y = 2\sin(t) \Rightarrow \sin(t) = \frac{1}{2}y$ .  
Substitutie in  $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$  geeft  $(\frac{1}{2}y)^2 + (-x)^2 = 1$  of  $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ .  
De punten van beide krommen voldoen aan dezelfde vergelijkingen, dus de krommen zijn gelijk.

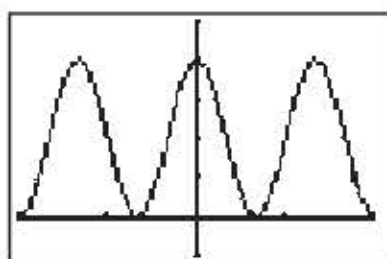
c



De punten zijn puntsymmetrisch in de oorsprong.

- d Voor een willekeurige  $t$  heeft het punt op de eerste kromme de coördinaten  $(x, y)$  en het punt op de tweede kromme de coördinaten  $(-x, -y)$ . De punten zijn dus puntsymmetrisch in de oorsprong. Omdat  $t$  willekeurig gekozen is geldt dat voor elk punt.

**T-4a** Invoer:  $Y1 = (\sin(X) + \sin(4X))^2 + (\cos(X) + \cos(4X))^2$   
 Venster:  $X_{\min} = -\pi$ ,  $X_{\max} = \pi$ ,  $Y_{\min} = -1$ ,  $Y_{\max} = 5$



De periode is  $\frac{2}{3}\pi$ .

- b Voor  $f(x) = d + a\cos(bx)$  ga je uit van de cosinusfunctie.

De evenwichtsstand is 2, dus  $d = 2$ .

De amplitude is 2, dus  $a = 2$ .

Voor periode  $\frac{2}{3}\pi$  wordt  $b = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$ .

De functie is dus  $f(x) = 2 + 2\cos(3x)$ .

- c  $f(x) = (\sin(x) + \sin(4x))^2 + (\cos(x) + \cos(4x))^2$

$$f(x) = \sin^2(x) + 2\sin(x) \cdot \sin(4x) + \sin^2(4x) + \cos^2(x) + 2\cos(x) \cdot \cos(4x) + \cos^2(4x)$$

$$f(x) = 2(\sin(x) \cdot \sin(4x) + \cos(x) \cdot \cos(4x)) + (\sin^2(x) + \cos^2(x)) + (\sin^2(4x) + \cos^2(4x))$$

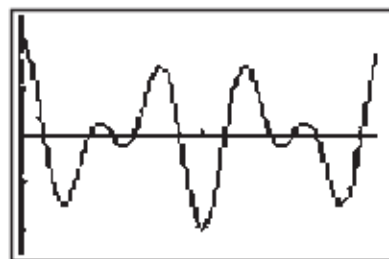
$$f(x) = 2\cos(x - 4x) + 1 + 1$$

$$f(x) = 2 + 2\cos(-3x)$$

$$f(x) = 2 + 2\cos(3x)$$

$f$  is dus exact gelijk aan het voorschrift.

Pagina 133:

**T-5a** Invoer:  $Y1 = \cos(3X) + \cos(5X)$ Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 2\pi$ ,  $Y_{\min} = -2.5$ ,  $Y_{\max} = 2.5$ De grafiek van  $h$  heeft tien snijpunten met de  $x$ -as op  $[0, 2\pi]$ .

**b**  $h(x) = \cos(3x) + \cos(5x)$

$$h(x) = 2\cos\left(\frac{3x+5x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-5x}{2}\right)$$

$$h(x) = 2\cos(4x) \cdot \cos(-x)$$

$$h(x) = 2\cos(4x) \cdot \cos(x)$$

**c** Voor de nulpunten van de grafiek van  $h$  geldt  $h(x) = 0$ .

$$2\cos(4x) \cdot \cos(x) = 0$$

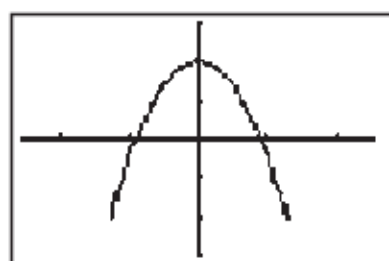
$$\cos(4x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 0$$

$$4x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op  $[0, 2\pi]$  zijn

$$x = \frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, 1\frac{1}{8}\pi, 1\frac{3}{8}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 1\frac{5}{8}\pi \text{ of } 1\frac{7}{8}\pi.$$

**T-6a** Invoer:  $X1T = 2\sin(T)$  en  $Y1T = 2\cos(2T)$  (TI: via MODE > Par, Casio: via Type, Param)Venster:  $X_{\min} = -4$ ,  $X_{\max} = 4$ ,  $Y_{\min} = -3$ ,  $Y_{\max} = 3$ De gemeenschappelijke periode van de functies is  $2\pi$ , dus elk interval met een breedte van  $2\pi$  voldoet, bijvoorbeeld  $[0, 2\pi]$ .

**b**  $x = 2\sin(t) \Rightarrow \sin(t) = \frac{1}{2}x$

$$y = 2\cos(2t) = 2(1 - 2\sin^2(t)) = 2 - 4\sin^2(t) = 2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 2 - x^2$$

Het functievoorschrift van de parabool is  $f(x) = 2 - x^2$ .

**c** De minimale en maximale  $x$ -waarden zijn  $-2$  en  $2$ .

Het domein van  $f$  wordt hierdoor beperkt en is  $[-2, 2]$ .

**T-7a**  $\frac{dx}{dt} = -15\sin(t) - 2\sin(2t)$ . Voor  $t = 0$  is  $\frac{dx}{dt} = 0 - 0 = 0$ .

$$\frac{dy}{dt} = 15\cos(t) + 2\cos(2t)$$
. Voor  $t = 0$  is  $\frac{dy}{dt} = 15 + 2 = 17$ .

De exacte helling op  $t = 0$  is  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{17}{0}$ , dus de raaklijn loopt verticaal.



**b**  $x = \cos(15t) + \cos(2t)$

$$x = 2\cos\left(\frac{15t+2t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{15t-2t}{2}\right)$$

$$x = 2\cos\left(6\frac{1}{2}t\right) \cdot \cos\left(8\frac{1}{2}t\right)$$

$$y = \sin(15t) + \sin(2t)$$

$$y = 2\sin\left(\frac{15t+2t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{15t-2t}{2}\right)$$

$$y = 2\cos\left(6\frac{1}{2}t\right) \cdot \sin\left(8\frac{1}{2}t\right)$$

**c** In het punt (0, 0) zijn zowel de  $x$ - als de  $y$ -coördinaat nul.

Volgens de uitdrukkingen bij opdracht b is dat het geval als  $\cos\left(6\frac{1}{2}t\right) = 0$ .

$$\cos\left(6\frac{1}{2}t\right) = 0$$

$$6\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi, \text{ dus als } t = \frac{1}{13}\pi + k \cdot \frac{2}{13}\pi$$

Oplossingen op  $[0, 2\pi]$  zijn

$$t = \frac{1}{13}\pi, \frac{5}{13}\pi, \frac{9}{13}\pi, \frac{13}{13}\pi, \frac{17}{13}\pi, \frac{21}{13}\pi, \frac{25}{13}\pi \text{ of } t = \frac{3}{13}\pi, \frac{7}{13}\pi, \frac{11}{13}\pi, \frac{15}{13}\pi, \frac{19}{13}\pi, \frac{23}{13}\pi$$

Dat zijn 13 oplossingen. Het punt (0, 0) wordt dus 13 keer gepasseerd.

# Hoofdstuk 6 – Functies onderzoeken

## Voorkennis: Afgeleide functies

Pagina 136:

**V-1a**  $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

**b**  $k(x) = x \cdot \cos(x^{\frac{1}{2}})$   
 $k'(x) = 1 \cdot \cos(x^{\frac{1}{2}}) + x \cdot -\sin(x^{\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$   
 $k'(x) = \cos(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(x^{\frac{1}{2}})$   
 $k'(x) = \cos(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x})$

**c**  $l'(x) = e^{2x} \cdot 2 + 2^x \cdot \ln(2)$   
 $l'(x) = 2e^{2x} + 2^x \cdot \ln(2)$

**V-2a**  $f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x) \cdot 1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

**b**  $k(x) = 2x \cdot (x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}$   
 $k'(x) = 2 \cdot (x^2 - 4)^{\frac{1}{2}} + 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$$k'(x) = 2\sqrt{x^2 - 4} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

**c**  $l'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}$   
 $l'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$

**V-3a**  $f'(x) = 5x^4 - 8x^3$

**b**  $5x^4 - 8x^3 = 0$   
 $x^3(5x - 8) = 0$   
 $x^3 = 0$  of  $5x - 8 = 0$   
 $x = 0$  of  $x = 1\frac{3}{5}$

**c**  $f(0) = 0$  en  $f(1\frac{3}{5}) = -2\frac{1942}{3125}$   
 De coördinaten van de toppen van de grafiek van  $f$  zijn  $(0, 0)$  en  $(1\frac{3}{5}, -2\frac{1942}{3125})$ .

**d**  $f''(x) = 20x^3 - 24x^2$   
 $20x^3 - 24x^2 = 0$   
 $x^2(20x - 24) = 0$   
 $x^2 = 0$  of  $20x - 24 = 0$   
 $x = 0$  of  $x = 1\frac{1}{5}$   
 De grafiek van  $f$  heeft een buigpunt voor  $x = 1\frac{1}{5}$ .

**d**  $m'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot (x+1) - 2\ln(x) \cdot 1}{(x+1)^2}$

$$m'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot (x+1) - 2\ln(x)}{(x+1)^2}$$

**e**  $s'(x) = 3 \cdot \cos^2(4x) \cdot -\sin(4x) \cdot 4$   
 $s'(x) = -12\cos^2(4x) \cdot \sin(4x)$

**d**  $m'(x) = \frac{2e^x \cdot (2 + e^x) - 2e^x \cdot e^x}{(2 + e^x)^2}$

$$m'(x) = \frac{4e^x + 2e^{2x} - 2e^{2x}}{(2 + e^x)^2}$$

$$m'(x) = \frac{4e^x}{(2 + e^x)^2}$$

**e**  $t'(x) = \frac{0 \cdot \sin(x) - 1 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$

$$t'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Pagina 137:

**V-4a**  $g(x) = 2 + \frac{6}{x-2} \quad (x \neq 2)$

$$g(x) = 2 \cdot \frac{x-2}{x-2} + \frac{6}{x-2}$$

$$g(x) = \frac{2x-4}{x-2} + \frac{6}{x-2}$$

$$g(x) = \frac{2x-4+6}{x-2}$$

$$g(x) = \frac{2x+2}{x-2}$$

**b**  $g'(x) = 0 + \frac{0 \cdot (x-2) - 6 \cdot 1}{(x-2)^2}$

$$g'(x) = -\frac{6}{(x-2)^2}$$

**c** Het domein van  $g$  is  $\langle \leftarrow, 2 \rangle$  en  $\langle 2, \rightarrow \rangle$ .

Als  $x \rightarrow \infty$  of  $x \rightarrow -\infty$  dan  $\frac{6}{x-2} \rightarrow 0$ , zodat  $g(x) \rightarrow 2$ .

Het bereik van  $g$  is  $\langle \leftarrow, 2 \rangle$  en  $\langle 2, \rightarrow \rangle$ .

**d** De horizontale asymptoot is  $y = 2$ .

De verticale asymptoot is  $x = 2$ .

**e**  $-\frac{6}{(x-2)^2} = -1$

$$(x-2)^2 = 6$$

$$x-2 = \sqrt{6} \text{ of } x-2 = -\sqrt{6}$$

$$x = 2 + \sqrt{6} \text{ of } x = 2 - \sqrt{6}$$

$$g(2 + \sqrt{6}) = 2 + \frac{6}{\sqrt{6}} = 2 + \sqrt{6}$$

$$g(2 - \sqrt{6}) = 2 + \frac{6}{-\sqrt{6}} = 2 - \sqrt{6}$$

De coördinaten van de punten van de grafiek van  $g$  met helling  $-1$  zijn  $(2 + \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6})$  en  $(2 - \sqrt{6}, 2 - \sqrt{6})$ .

**f** Het snijpunt met de  $y$ -as:

$$(0, g(0)) = (0, -1)$$

$$g'(0) = -\frac{6}{4} = -1\frac{1}{2}$$

De vergelijking van de raaklijn in het snijpunt met de  $y$ -as is  $y = -1\frac{1}{2}x - 1$ .

Het snijpunt met de  $x$ -as:

$$g(x) = 0 \text{ geeft } x - 2 = -3, \text{ dus } x = -1.$$

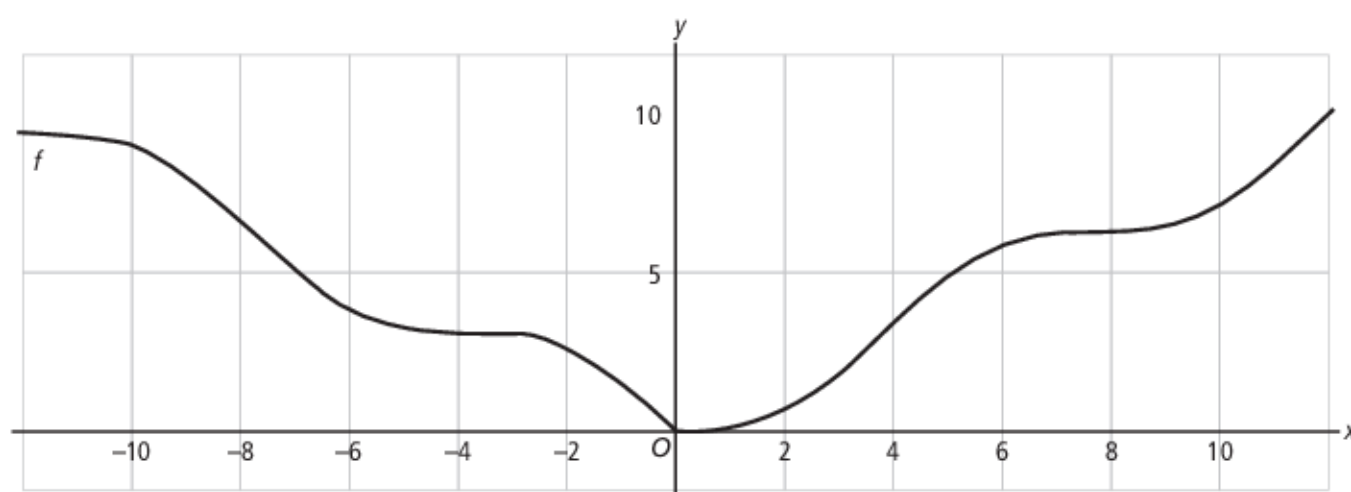
$$g'(-1) = -\frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

$$(-1, 0) \text{ invullen geeft } b = -\frac{2}{3}.$$

De vergelijking van de raaklijn in het snijpunt met de  $x$ -as is  $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ .

V-5a



- b**  $f(x) = x - \sin(x)$  als  $x \geq 0$  en  $f(x) = -x - \sin(x)$  als  $x < 0$ .  
 $f'(x) = 1 - \cos(x)$  als  $x > 0$  en  $f'(x) = -1 - \cos(x)$  als  $x < 0$ .
- c** Als  $x \downarrow 0$  dan  $f'(x) \rightarrow 1 - \cos(0) = 0$  en als  $x \uparrow 0$  dan  $f'(x) \rightarrow -1 - \cos(0) = -2$ .  
 De grafiek van  $f$  heeft dus een knik bij het punt  $(0, 0)$ .
- d**  $1 - \cos(x) = 0$  en  $x > 0$  of  $-1 - \cos(x) = 0$  en  $x < 0$   
 $\cos(x) = 1$  en  $x > 0$  of  $\cos(x) = -1$  en  $x < 0$   
 De oplossingen zijn  $2\pi + k \cdot 2\pi$  en  $-\pi + k \cdot 2\pi$  waarbij  $k = 0, 1, 2, \dots$ .
- e** Uit  $\cos(x) = 1$  en  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  volgt  $\sin(x) = 0$ .  
 Omdat  $x > 0$  is dan  $f(x) = x$ .  
 De punten met een horizontale raaklijn liggen dan dus op de lijn  $y = x$ .  
 Uit  $\cos(x) = -1$  en  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  volgt  $\sin(x) = 0$ .  
 Omdat  $x < 0$  is dan  $f(x) = -x$ .  
 De punten met een horizontale raaklijn liggen dan dus op de lijn  $y = -x$ .

V-6a  $f'_a(x) = 5x^4 - 3ax^2$ 

- b** De grafiek van  $f_a$  is overal stijgend als voor alle  $x$  geldt  $5x^4 - 3ax^2 > 0$ .  
 Voor alle  $x$  moet dus gelden  $3ax^2 < 5x^4$  dus  $a < \frac{5x^4}{3x^2} = \frac{5}{3}x^2$ .

Omdat  $x^2 \geq 0$  voor alle  $x$  volgt hieruit  $a < 0$ .

- c**  $f''_a(x) = 20x^3 - 6ax$   
 $f''_a(3) = 0$   
 $20 \cdot 3^3 - 6a \cdot 3 = 0$   
 $540 - 18a = 0$   
 $a = 30$

V-7a  $f(x) = px$  omdat het raakpunt zowel op de grafiek van  $f$  als een lijn uit de bundel ligt. $f'(x) = p$  omdat in het raakpunt  $f'(x)$  gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.

- b**  $f'(x) = \frac{1}{x}$

Substitutie van  $\frac{1}{x} = p$  in  $\ln(x) = px$  geeft  $\ln(x) = 1$  dus  $x = e$ . $R$  is het punt  $(e, \ln(e)) = (e, 1)$  en  $p = \frac{1}{e}$ .

## 6-1 Uiterste waarden

Pagina 138:

1a  $f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$

$$3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = 0$$

$$x^2 \cdot e^x(3 + x) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ of } e^x = 0 \text{ of } 3 + x = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3 \quad (e^x = 0 \text{ levert geen oplossing})$$

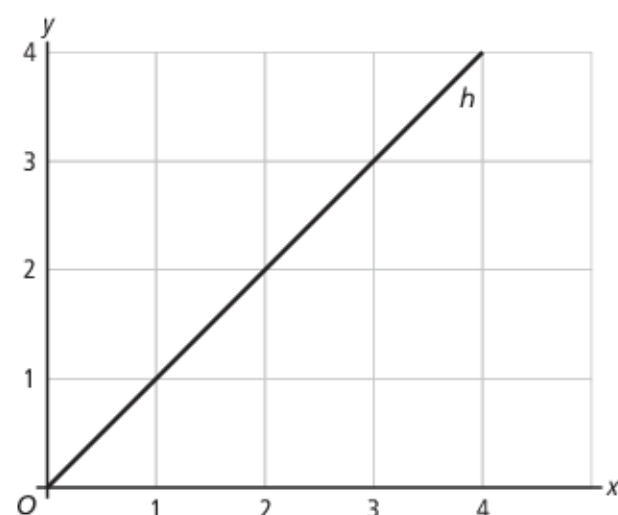
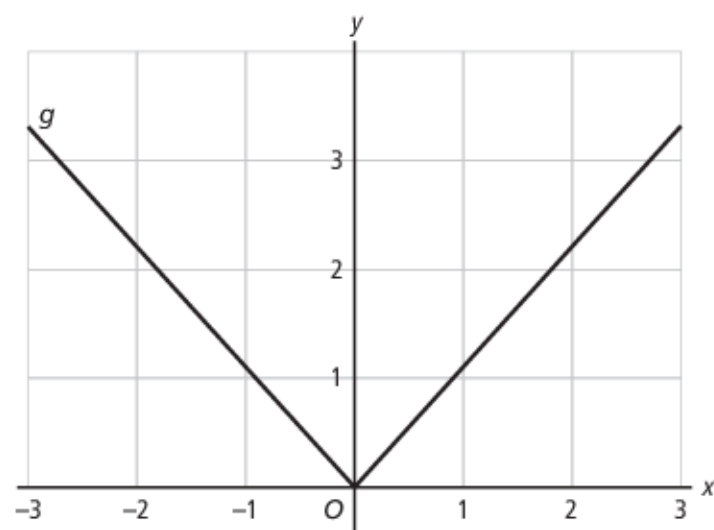
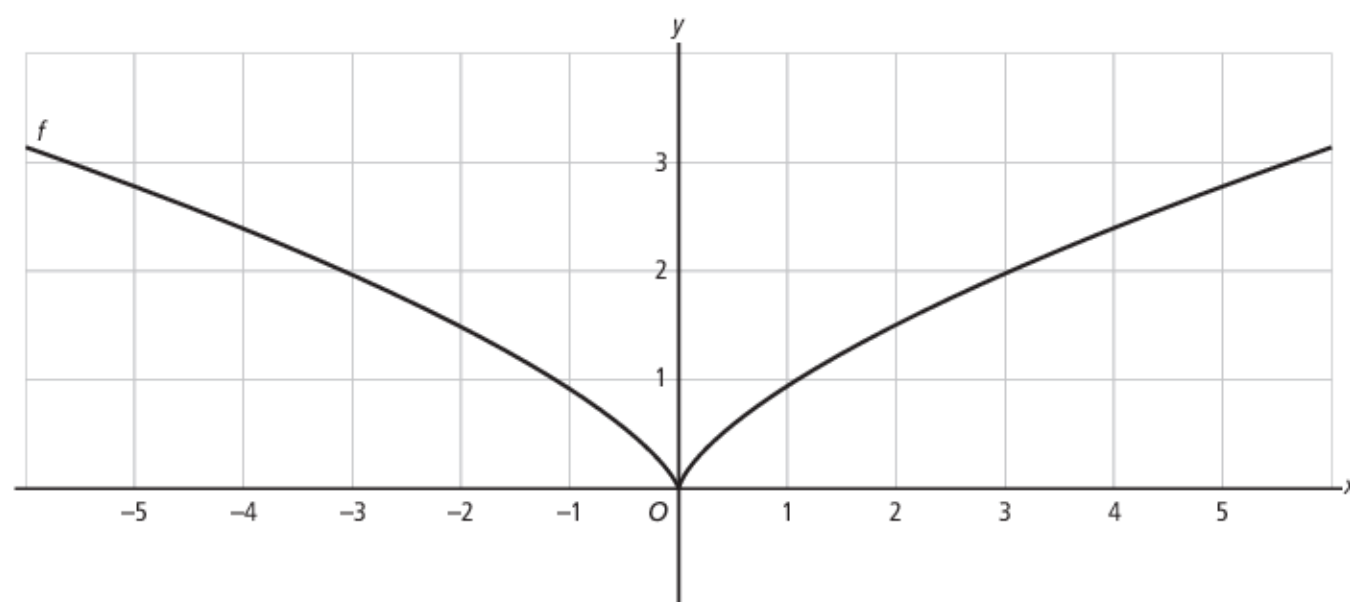
b  $f(0) = 0$

In  $(0, 0)$  is de raaklijn aan de grafiek van  $f$  horizontaal, maar er is hier geen sprake van een uiterste waarde.

$$f(-3) = -\frac{27}{e^3}$$

In  $\left(-3, -\frac{27}{e^3}\right)$  is de raaklijn aan de grafiek van  $f$  horizontaal, hier is sprake van een minimum.

2a

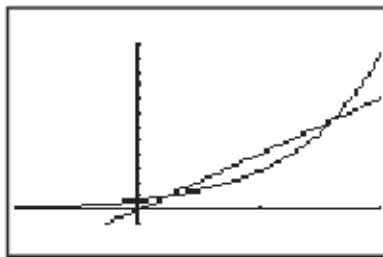




- b** Bij  $(0, 0)$  zit er een knik in de grafiek van  $f$  en  $g$ .  
 Bij  $(0, 0)$  heeft de grafiek van  $h$  een randpunt.  
 $f'(0)$ ,  $g'(0)$  en  $h'(0)$  bestaan dus niet.
- c**  $f$  heeft een minimum  $f(0) = 0$ ,  $g$  heeft een minimum  $g(0) = 0$  en  $h$  heeft een randminimum  $h(0) = 0$ .

**Pagina 139:**

- 3a** In twee punten van de grafiek is er een overgang van stijgen naar dalen of andersom.
- b**  $f'(x) = 2x - 2^x \cdot \ln(2)$
- c** Invoer:  $Y1 = \ln(2) \cdot 2^X$  en  $Y2 = 2X$   
 Venster:  $X_{\min} = -2$ ,  $X_{\max} = 4$ ,  $Y_{\min} = -1$ ,  $Y_{\max} = 12$



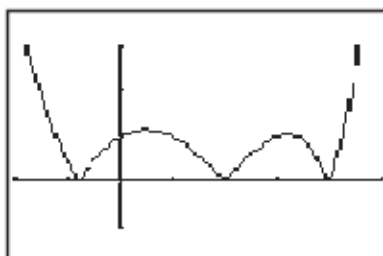
$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2x = 2^x \cdot \ln(2).$$

Uit de plot blijkt dat er twee snijpunten zijn.

De vergelijking  $2x - 2^x \cdot \ln(2) = 0$  heeft dus twee oplossingen.

De grafiek van  $f$  heeft daarom twee toppen.

- d** Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solv, ISCT  
 De oplossingen zijn  $x \approx 0,485\,089\,6$  en  $x \approx 3,212\,432\,5$ .  
 $f(0,485\,089\,6) \approx -1,164\,360\,9$   
 $f(3,212\,432\,5) \approx 1,050\,601\,8$   
 De coördinaten van de toppen van de grafiek van  $f$  zijn  $(0,49; -1,16)$  en  $(3,21; 1,05)$ .
- e** Invoer:  $Y1 = \text{abs}(X^2 - 2^X)$   
 Venster:  $X_{\min} = -2$ ,  $X_{\max} = 5$ ,  $Y_{\min} = -1$ ,  $Y_{\max} = 3$



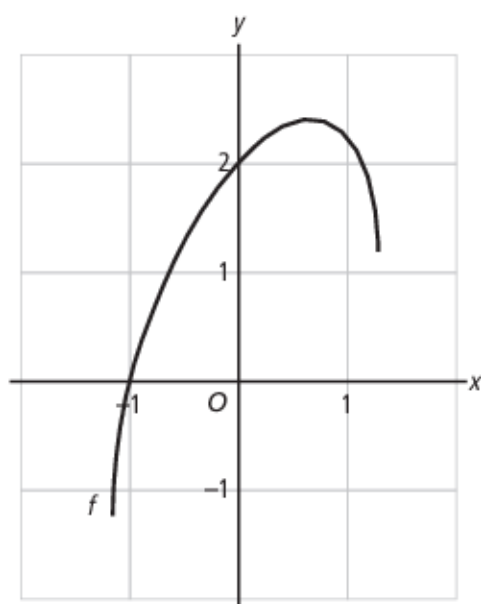
Optie: CALC, zero (TI) of G-Solv, ROOT (Casio).

De nulpunten zijn  $x \approx -0,77$ ,  $x = 2$  en  $x = 4$ .

Uit deze nulpunten en uit opdracht d volgen de coördinaten van de toppen van de grafiek van  $g$ :  $(-0,77; 0)$ ,  $(0,49; 1,16)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3,21; 1,05)$  en  $(4, 0)$ .

- 4a**  $4 - 3x^2 \geq 0$   
 $-3x^2 \geq -4$   
 $x^2 \leq \frac{4}{3}$   
 $x \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$  of  $x \geq -\sqrt{\frac{4}{3}}$   
 $x \leq \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$  of  $x \geq -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$   
 $x \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}$  of  $x \geq -\frac{2}{3}\sqrt{3}$   
 Het domein is  $[-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}]$ .

b



c  $f(x) = x + (4 - 3x^2)^{\frac{1}{2}}$   
 $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}(4 - 3x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -6x$   
 $f'(x) = 1 - \frac{3x}{\sqrt{4 - 3x^2}}$

d Er moet gelden  $f'(x) = 0$ .

$$1 - \frac{3x}{\sqrt{4 - 3x^2}} = 0$$

$$\frac{3x}{\sqrt{4 - 3x^2}} = 1$$

$$3x = \sqrt{4 - 3x^2}$$

$$9x^2 = 4 - 3x^2$$

$$12x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

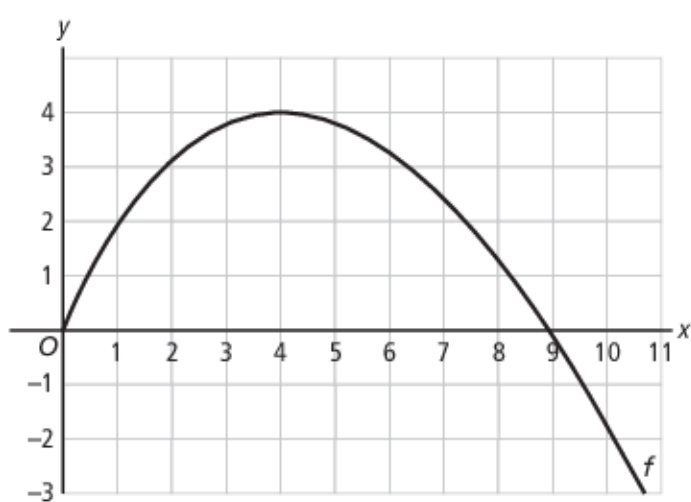
$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad (x = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ voldoet niet})$$

Het maximum is  $f(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3} = 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$ .

Het randminimum is  $f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ .

Het randminimum is  $f(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ .

5a



b  $f(x) = 3x - x^{\frac{1}{2}}$   
 $f'(x) = 3 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$   
 $f'(x) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$   
 $3 - \frac{1}{2}\sqrt{x} = 0$   
 $3 = \frac{1}{2}\sqrt{x}$   
 $2 = \sqrt{x}$   
 $x = 4$

$f$  heeft een maximum  $f(4) = 4$ .

$f$  heeft een randminimum  $f(0) = 0$ .

- c**  $3x - x\sqrt{x} = 0$   
 $x(3 - \sqrt{x}) = 0$   
 Hieruit volgt  $x = 0$  of  $x = 9$ .  
 $f'(0) = 3 - 1\frac{1}{2} \cdot 0 = 3$   
 De vergelijking van de raaklijn in  $(0, 0)$  is  $y = 3x$ .  
 $f'(9) = -1\frac{1}{2}$   
 $y = -1\frac{1}{2}x + b$   
 $(9, 0)$  invullen geeft  $b = 13\frac{1}{2}$ .  
 De vergelijking van de raaklijn in  $(9, 0)$  is  $y = -1\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{2}$ .
- d**  $3x = -1\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{2}$  geeft  $4\frac{1}{2}x = 13\frac{1}{2}$ , dus  $x = 3$ .  
 Het snijpunt is  $(3, 9)$ .

**6a**  $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}}$  als  $x \geq 4$  en  $f(x) = \frac{4-x}{\sqrt{x}}$  als  $x < 4$ .

**b**  $f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-4)}{x}$  als  $x > 4$

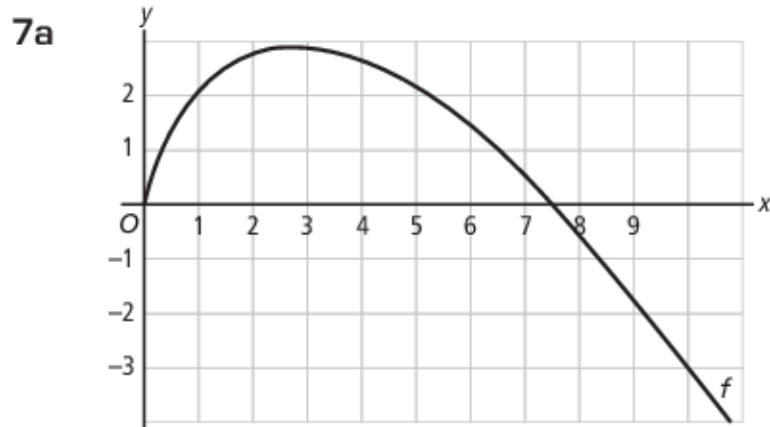
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}}{x} \text{ als } x > 4 \text{ en}$$

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (4-x)}{x} \text{ als } x < 4$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}{x} \text{ als } x < 4$$

Als  $x \downarrow 4$  dan  $f'(x) \rightarrow \frac{1}{2}$  en als  $x \uparrow 4$  dan  $f'(x) \rightarrow -\frac{1}{2}$ .

De grafiek van  $f$  heeft dus een knik bij het punt  $(4, 0)$ .



**b**  $f'(x) = 2 - \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = 2 - \ln(x) - 1$$

$$f'(x) = 1 - \ln(x)$$

- c** Er moet gelden  $f'(x) = 0$ .

$$1 - \ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

$f$  heeft een maximum  $f(e) = e$ .

- d** Voor een snijpunt met de  $x$ -as geldt  $f(x) = 0$ .

$$2x - x \cdot \ln(x) = 0$$

$$x(2 - \ln(x)) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } \ln(x) = 2$$

$$x = 0 \text{ of } x = e^2$$

$$f'(e^2) = 1 - \ln(e^2) = -1$$

De scherpe hoek waaronder de grafiek van  $f$  de  $x$ -as snijdt is  $45^\circ$ .

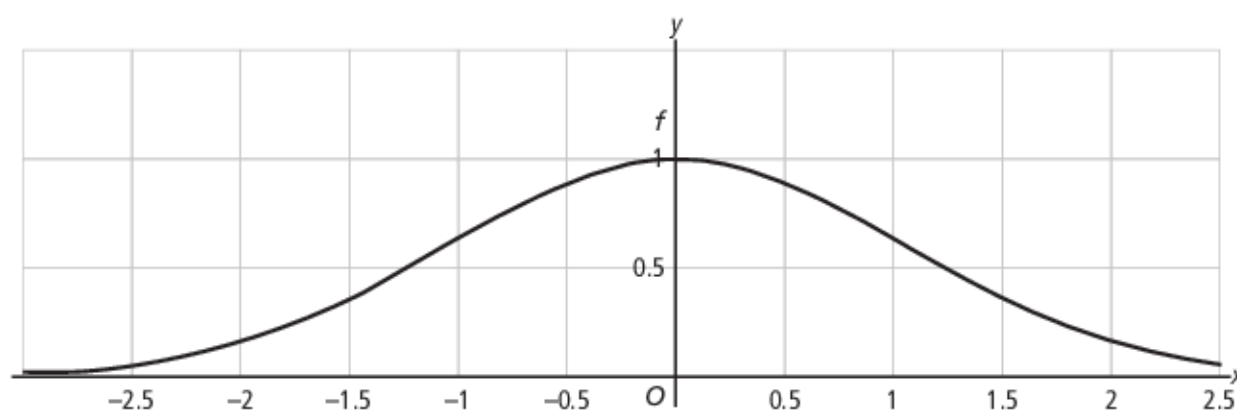
## 6-2 Buigpunten

Pagina 140:

- 8a** De grafieken 1 en 4 kunnen bij een lineair verband horen.
- b** Grafiek 2 – Bijvoorbeeld een kwadratische functie waarbij de coëfficiënt van  $x^2$  positief is, op een interval waar de grafiek stijgt.  
 Grafiek 3 – Bijvoorbeeld een kwadratische functie waarbij de coëfficiënt van  $x^2$  negatief is, op een interval waar de grafiek stijgt.  
 Grafiek 5 – Bijvoorbeeld een kwadratische functie waarbij de coëfficiënt van  $x^2$  negatief is, op een interval waar de grafiek daalt.  
 Grafiek 6 – Bijvoorbeeld een kwadratische functie waarbij de coëfficiënt van  $x^2$  positief is, op een interval waar de grafiek daalt.
- c** Grafiek 1 – De afgeleide is positief en constant.  
 Grafiek 2 – De afgeleide is positief en stijgend.  
 Grafiek 3 – De afgeleide is positief en dalend.  
 Grafiek 4 – De afgeleide is negatief en constant.  
 Grafiek 5 – De afgeleide is negatief en dalend.  
 Grafiek 6 – De afgeleide is negatief en stijgend.
- d** Grafiek 1 – De tweede afgeleide is nul.  
 Grafiek 2 – De tweede afgeleide is positief.  
 Grafiek 3 – De tweede afgeleide is negatief.  
 Grafiek 4 – De tweede afgeleide is nul.  
 Grafiek 5 – De tweede afgeleide is negatief.  
 Grafiek 6 – De tweede afgeleide is positief.
- 9a** Er is sprake van een afnemende stijging bij het deel van de grafiek links van de y-as.
- b** Het andere deel van de grafiek is toenemend stijgend.
- c**  $f'(x) = 3x^2 + 2$  en  $f''(x) = 6x$
- d** De grafiek van  $f$  is voor elke waarde van  $x$  stijgend, omdat  $f'(x)$  positief is voor elke waarde van  $x$ , want  $3x^2 + 2 \geq 2$ .
- e** De helling en dus de waarde van  $f'(x)$  is het kleinst als  $f''(x) = 0$ , dus als  $x = 0$ .

Pagina 141:

10



$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot -x = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f''(x) = -1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot -x = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Voor een buigpunt geldt  $f''(x) = 0$ .

$$-e^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

$$e^{-\frac{1}{2}x^2}(-1 + x^2) = 0$$

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0 \text{ of } x^2 = 1$$

geen oplossing of  $x = 1$  of  $x = -1$

De buigpunten zijn  $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$  en  $\left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ .

**11a**  $f'(x) = (4x + 3) \cdot e^{-x} + (2x^2 + 3x) \cdot e^{-x} \cdot -1$

$$f'(x) = (4x + 3) \cdot e^{-x} - (2x^2 + 3x) \cdot e^{-x}$$

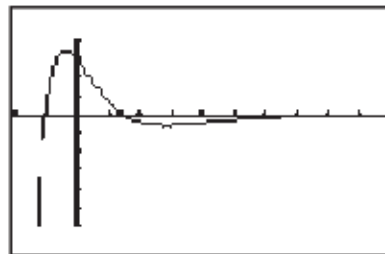
$$f'(x) = (4x + 3 - (2x^2 + 3x)) \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = (4x + 3 - 2x^2 - 3x) \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = (-2x^2 + x + 3) \cdot e^{-x}$$

**b** Invoer:  $Y1 = (-2X^2 + X + 3)e^{(-X)}$

Venster:  $X_{\min} = -2$ ,  $X_{\max} = 10$ ,  $Y_{\min} = -6$ ,  $Y_{\max} = 4$



Als  $x \rightarrow \infty$  dan  $f'(x) \uparrow 0$ , dus de helling van de raaklijn is negatief en nadert tot nul.

Voor grote waarden van  $x$  daalt de grafiek afnemend en gaat steeds vlakker lopen, maar nooit helemaal horizontaal.

Als  $x \rightarrow -\infty$  dan  $f'(x) \rightarrow -\infty$ , dus de helling van de raaklijn is negatief en wordt (naar links toe) steeds kleiner.

Voor kleine waarden van  $x$  daalt de grafiek afnemend.

**c** Voor de uiterste waarden van  $f$  geldt  $f'(x) = 0$ .

$$(-2x^2 + x + 3) \cdot e^{-x} = 0$$

$$-2x^2 + x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot -2 \cdot 3}}{-4} \text{ of } x = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot -2 \cdot 3}}{-4}$$

$$x = \frac{-1 + 5}{-4} = -1 \text{ of } x = \frac{-1 - 5}{-4} = 1\frac{1}{2}$$

Het minimum is  $f(-1) = -e$ .

$$\text{Het maximum is } f(1\frac{1}{2}) = 9 \cdot e^{-1\frac{1}{2}} = \frac{9}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{(e^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{9}{\sqrt{e^3}}$$

**d**  $f''(x) = (-4x + 1) \cdot e^{-x} + (-2x^2 + x + 3) \cdot e^{-x} \cdot -1$

$$f''(x) = (-4x + 1) \cdot e^{-x} + (2x^2 - x - 3) \cdot e^{-x}$$

$$f''(x) = (-4x + 1 + 2x^2 - x - 3) \cdot e^{-x}$$

$$f''(x) = (2x^2 - 5x - 2) \cdot e^{-x}$$

$$(2x^2 - 5x - 2) \cdot e^{-x} = 0$$

$$2x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2}}{4} \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2}}{4}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{41}}{4} \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{41}}{4}$$

$$x = 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{41} \text{ of } x = 1\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41}$$

**e** Bij  $x = 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{41}$  en  $x = 1\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41}$  heeft de grafiek van  $f$  een buigpunt.



- f De grafiek heeft een maximale helling tussen  $x = -1$  en  $x = 1\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} f'(1\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41}) &= (-2(1\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41})^2 + 1\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41} + 3) \cdot e^{-(1\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41})} \\ &= (-2(\frac{25}{16} - \frac{5}{8}\sqrt{41} + \frac{41}{16}) + 4\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41}) \cdot e^{-1\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{41}} \\ &= (-4 + \sqrt{41}) \cdot e^{\frac{1}{4}(-5 + \sqrt{41})} \\ &= (-4 + \sqrt{41}) \cdot \sqrt[4]{e^{-5 + \sqrt{41}}} \end{aligned}$$

- 12a Het domein van  $f$  is  $\langle 0, \rightarrow \rangle$ .

Het domein van  $g$  is  $[0, \rightarrow \rangle$ .

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x$$

Het domein van  $f'$  is  $\langle 0, \rightarrow \rangle$ .

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Het domein van  $g'$  is  $\langle 0, \rightarrow \rangle$ .

- b Voor de top van de grafiek van  $f$  geldt  $f'(x) = 0$ .

$$2x \cdot \ln(x) + x = 0$$

$$x(2\ln(x) + 1) = 0$$

$$2\ln(x) + 1 = 0 \quad (x = 0 \text{ behoort niet tot het domein van } f)$$

$$\ln(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

De top van de grafiek van  $f$  is  $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ .

- c Voor het buigpunt van de grafiek van  $f$  geldt  $f''(x) = 0$ .

$$f''(x) = 2\ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2\ln(x) + 3$$

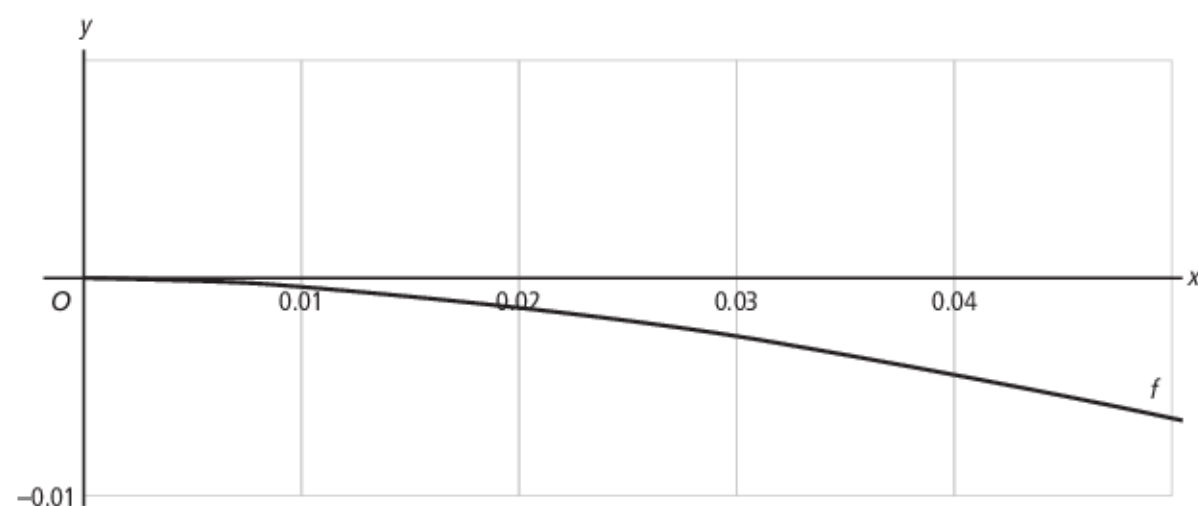
$$2\ln(x) + 3 = 0$$

$$\ln(x) = -1\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

Het buigpunt van de grafiek van  $f$  is  $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$ .

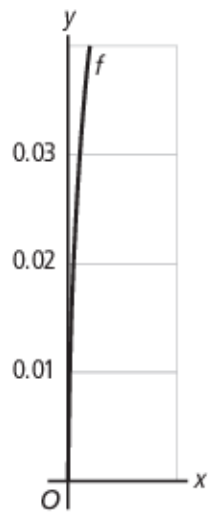
- d De grafiek van  $f$ :



$$f'(0,000\,001) \approx -0,000\,002\,7$$

In de buurt van  $(0, 0)$  loopt de grafiek van  $f$  vrijwel horizontaal.

De grafiek van  $g$ :



$$g'(0,000\,001) = 500$$

In de buurt van  $(0, 0)$  verloopt de grafiek van  $g$  vrijwel verticaal.

### 6-3 Asymptoten

Pagina 142:

- 13a** Als  $x \rightarrow \infty$  dan  $e^x \rightarrow \infty$  dus  $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \rightarrow 0$ .
- b** Als  $x \rightarrow -\infty$  dan  $e^x \rightarrow 0$  dus  $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \rightarrow \frac{1}{0 - 1} = -1$ .

De vergelijking van de andere verticale asymptoot is  $y = -1$ .

- c**  $e^x - 1 = 0$  geeft  $x = 0$ .

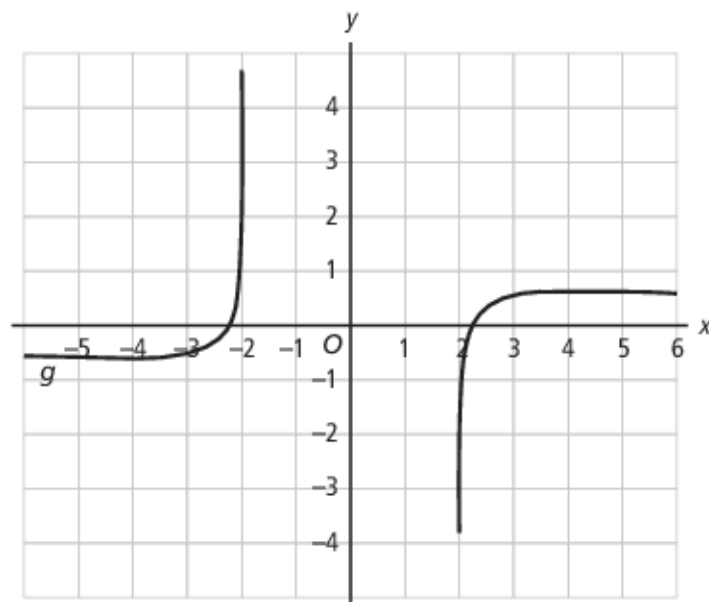
De vergelijking van de verticale asymptoot is  $x = 0$ .

- d** Als  $x > 0$  dan  $e^x - 1 > 0$  dus  $\frac{1}{e^x - 1} > 0$ .

Als  $x < 0$  dan  $-1 < e^x - 1 < 0$  dus  $\frac{1}{e^x - 1} < -1$ .

Het bereik van  $f$  is  $\langle \leftarrow, -1 \rangle$  en  $\langle 0, \rightarrow \rangle$ .

**14a**



Als  $x \rightarrow \infty$  of  $x \rightarrow -\infty$  dan  $g(x) \rightarrow 0$ .

De vergelijking van de horizontale asymptoot van de grafiek van  $g$  is  $y = 0$ .

- b** Als  $x \uparrow -2$  dan  $x^2 - 4 \downarrow 0$  en  $g(x) = \frac{\ln(x^2 - 4)}{x} \rightarrow \infty$  want de teller en de noemer zijn dan allebei negatief.  
 Als  $x \downarrow 2$  dan  $x^2 - 4 \downarrow 0$  en  $g(x) = \frac{\ln(x^2 - 4)}{x} \rightarrow -\infty$  want de teller is dan negatief en de noemer positief.  
 Dus  $x = -2$  en  $x = 2$  zijn verticale asymptoten van de grafiek van  $g$ .
- c** Uit  $x^2 - 4 > 0$  volgt dat  $[-2, 2]$  niet tot het domein van de functie  $g$  behoort.  
 $x = 0$  kan dus geen verticale asymptoot van de grafiek van  $g$  zijn.

**Pagina 143:**

- 15a** Het domein van  $f$  is  $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ ,  $\langle -1, 1 \rangle$  en  $\langle 1, \rightarrow \rangle$ .  
 Als  $x \rightarrow -\infty$  dan  $e^x \rightarrow 0$  en  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 - 1} \uparrow 0$ , omdat de teller naar  $-1$  nadert en de noemer steeds groter wordt.  
 De lijn  $y = 0$  is een horizontale asymptoot.  
 Uit  $x^2 - 1 = 0$  volgt dat  $x = -1$  en  $x = 1$  verticale asymptoten zijn.
- b** Het domein van  $g$  is  $\langle \leftarrow, -1 \rangle$  en  $\langle -1, \rightarrow \rangle$ .

$$\text{Als } x \rightarrow \infty \text{ dan } g(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{\frac{1}{x} \cdot (x + 1)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}}{\frac{1}{x} \cdot (x + 1)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{\sqrt{1}}{1} = 1.$$

De lijn  $y = 1$  is een horizontale asymptoot.

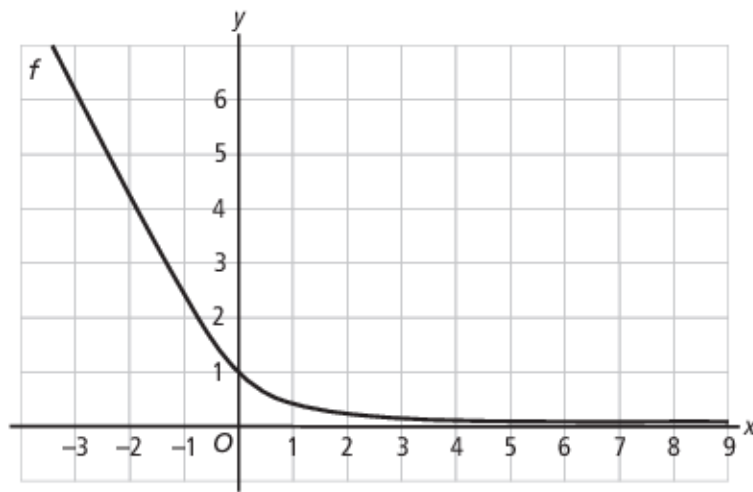
$$\text{Als } x \rightarrow -\infty \text{ dan } g(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{\frac{1}{x} \cdot (x + 1)} = \frac{-\sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}}{\frac{1}{x} \cdot (x + 1)} = \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{-\sqrt{1}}{1} = -1.$$

De lijn  $y = -1$  is een horizontale asymptoot.

Uit  $x + 1 = 0$  volgt dat  $x = -1$  een verticale asymptoot is.

- c** Het domein van  $h$  is  $\langle \leftarrow, -1 \rangle$  en  $\langle -1, \rightarrow \rangle$ .  
 De grafiek van  $h$  heeft geen horizontale asymptoot.  
 Uit  $x + 1 = 0$  volgt dat  $x = -1$  een verticale asymptoot is.
- d** Het domein van  $m$  is  $\mathbb{R}$ .  
 Als  $x \rightarrow \infty$  dan  $m(x) = \frac{2}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \rightarrow \frac{2}{1 + 0} = 2$ .  
 De lijn  $y = 2$  is een horizontale asymptoot.  
 Als  $x \rightarrow -\infty$  dan  $m(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}} \rightarrow 0$ .  
 De lijn  $y = 0$  is een horizontale asymptoot.  
 De grafiek van  $m$  heeft geen verticale asymptoot.

16a



b  $f(x) = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} - x$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

c Als  $x < 0$  dan is de teller  $x - \sqrt{x^2 + 1}$  negatief.

Als  $x \geq 0$  dan is de teller ook negatief, want dan geldt  $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = x$ .

Voor elke waarde van  $x$  is de noemer  $\sqrt{x^2 + 1}$  positief.

Hieruit volgt dat voor elke waarde van  $x$  de afgeleide negatief is, en dat  $f$  dus een dalende functie is.

d  $\sqrt{x^2 + 1} - x < 0,001$

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = 0,001$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + 0,001$$

$$x^2 + 1 = x^2 + 0,002x + 0,000\,001$$

$$1 = 0,002x + 0,000\,001$$

$$0,999\,999 = 0,002x$$

$$x = 499,999\,5$$

$f$  is een dalende functie, dus  $x > 499,999\,5$ .

De oplossing is  $\langle 499,999\,5; \rightarrow \rangle$ .

e Als  $x \rightarrow \infty$  nadert de waarde van  $\sqrt{x^2 + 1}$  naar de waarde van  $\sqrt{x^2} = x$ .

Het verschil  $\sqrt{x^2 + 1} - x$  nadert dan naar nul.

De grafiek van  $f$  heeft dus de lijn  $y = 0$  als horizontale asymptoot.

17a Voor grote positieve waarden van  $x$  is de waarde van  $e^x - 1$  een zeer groot positief getal in verhouding tot de waarde van  $x$ . De breuk in het functievoorschrift is dan dus een zeer klein positief getal.

b Omdat voor grote positieve waarden van  $x$  de breuk  $\frac{x}{e^x - 1}$  steeds dichterbij nul nadert, lijkt de grafiek van  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{e^x - 1}$  steeds meer op de lijn  $y = \frac{1}{2}x$ .

c Als de grafiek van  $f$  symmetrisch is in de  $y$ -as moet gelden  $f(-x) = f(x)$ .

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\frac{1}{2}x(e^x - 1)}{e^x - 1} + \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\frac{1}{2}x \cdot e^x + \frac{1}{2}x}{e^x - 1}$$

$$f(-x) = \frac{-\frac{1}{2}x \cdot e^{-x} - \frac{1}{2}x}{e^{-x} - 1} = \frac{-\frac{1}{2}x \cdot e^{-x} - \frac{1}{2}x}{e^{-x} - 1} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \cdot e^x}{1 - e^x} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \cdot e^x}{e^x - 1}$$

Conclusie: de grafiek van  $f$  is symmetrisch in de  $y$ -as.

d Als  $x \rightarrow \infty$  komen de punten van de grafiek van  $f$  steeds dichterbij de lijn  $y = \frac{1}{2}x$  te liggen. De grafiek van  $f$  is symmetrisch in de  $y$ -as, dus als  $x \rightarrow -\infty$  komen de punten van de grafiek van  $f$  dus steeds dichterbij de lijn  $y = -\frac{1}{2}x$  te liggen, want die lijn ontstaat door de lijn  $y = \frac{1}{2}x$  te spiegelen in de  $y$ -as.

e Je kunt hier niet concluderen dat  $x = 0$  een verticale asymptoot van de grafiek van  $f$  is, omdat de teller ook nul wordt als  $x = 0$  invult.

- f Als  $x$  negatieve waarden dicht bij nul aanneemt, neemt de breuk in het functievoorschrift waarden dicht boven de één aan.

18a  $\ln(x) + 1 = 0$  geeft  $\ln(x) = -1$ , dus  $x = \frac{1}{e}$ .

Het domein van  $f$  is  $\left\langle 0, \frac{1}{e} \right\rangle$  en  $\left\langle \frac{1}{e}, \rightarrow \right\rangle$ .

- b  $x = \frac{1}{e}$  is een verticale asymptoot van de grafiek van  $f$  (zie opdracht a).  
Als  $x \downarrow 0$  dan geldt niet  $f(x) \rightarrow -\infty$ , dus er is maar één verticale asymptoot.

c Als  $x \rightarrow \infty$  dan  $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} \rightarrow \frac{1}{1 + 0} = 1$ .

De horizontale asymptoot is  $y = 1$ .

d  $f(0,01) \approx 1,27$

$f(0,0001) \approx 1,12$

$f(0,000001) \approx 1,08$

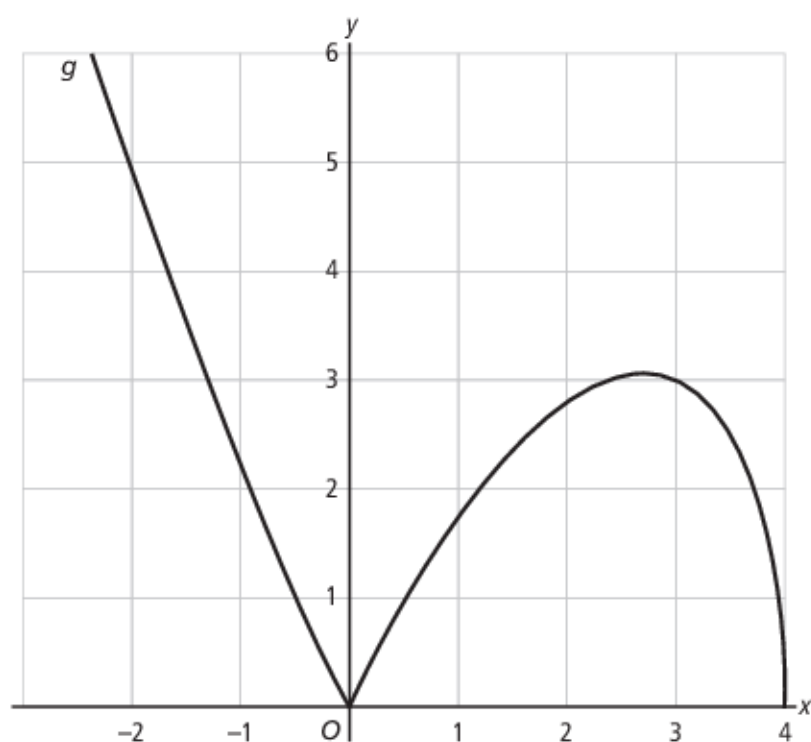
$f(0,0000000001) \approx 1,05$

e Als  $x \downarrow 0$  dan  $\ln(x) \rightarrow -\infty$  dus  $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} \downarrow 1$ .

## 6-4 Redeneren met functies

Pagina 144:

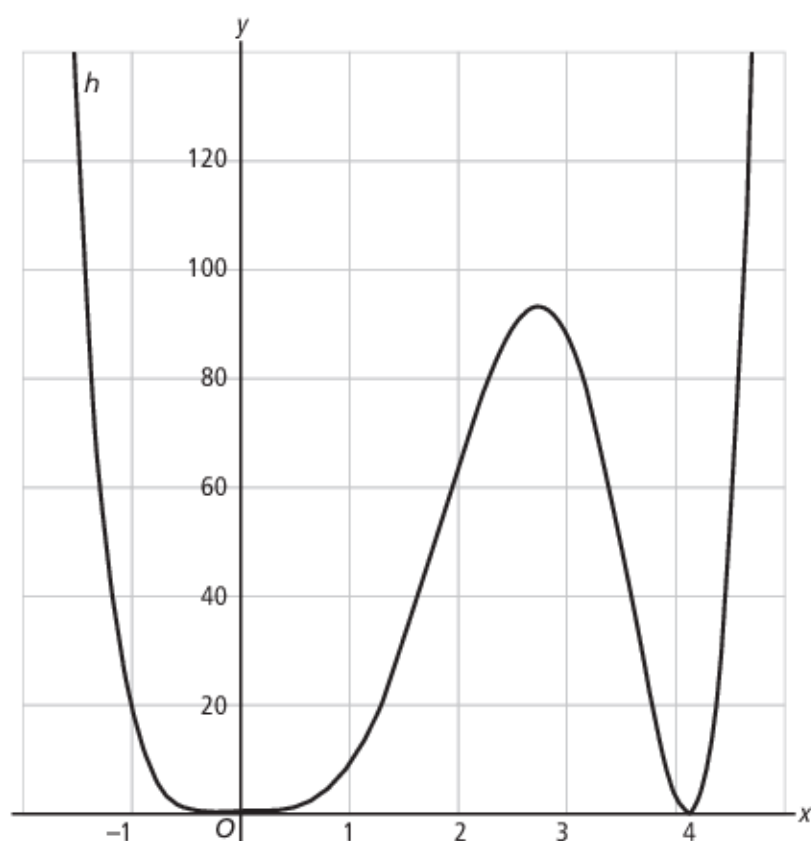
- 19a Uit  $4x^2 - x^3 = 0$  volgt  $x^2(4 - x) = 0$ , dus  $x = 0$  of  $x = 4$ .  
Het domein van  $g$  is  $\langle \leftarrow, 4 \rangle$ .  
(4, 0) is een randpunt.



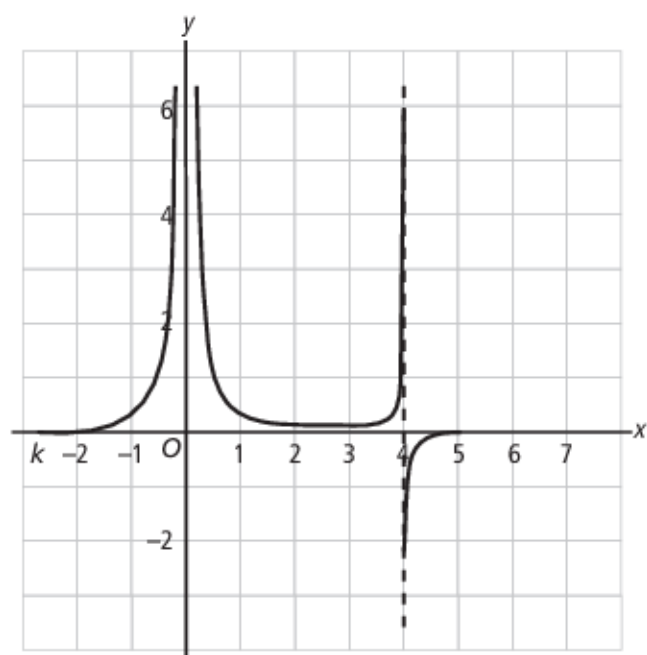
- b  $f'(x) = 8x - 3x^2$   
 $8x - 3x^2 = 0$   
 $x(8 - 3x) = 0$   
 $x = 0$  of  $x = 2\frac{2}{3}$   
 $g(2\frac{2}{3}) \approx 3,079$  is een maximum.  
 $g(0) = 0$  is een minimum.  
 $g(4) = 0$  is een randminimum.



- c Het domein van  $h$  is  $\mathbb{R}$ .

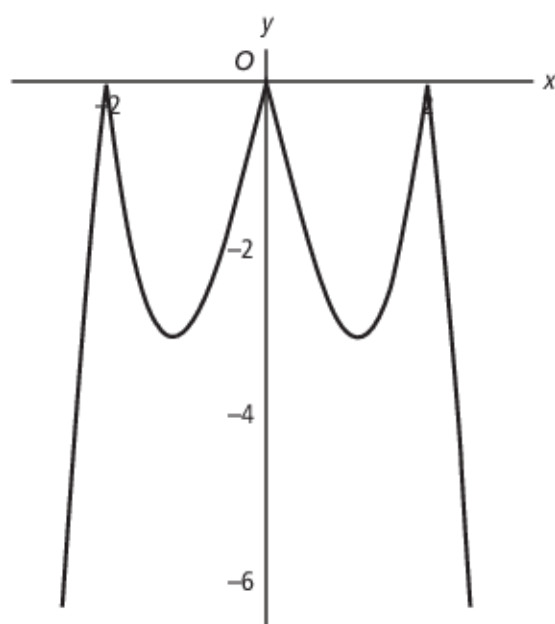


- d  $h(2\frac{2}{3}) = 89\frac{655}{729}$  is een maximum.  
 $h(0) = 0$  is een minimum.  
 $h(4) = 0$  is een minimum.
- e Het domein van  $k$  is  $\langle \leftarrow, 0 \rangle$  en  $\langle 0, 4 \rangle$  en  $\langle 4, \rightarrow \rangle$ .  
 De horizontale asymptoot is  $y = 0$ .  
 De verticale asymptoten zijn  $x = 0$  en  $x = 4$ .

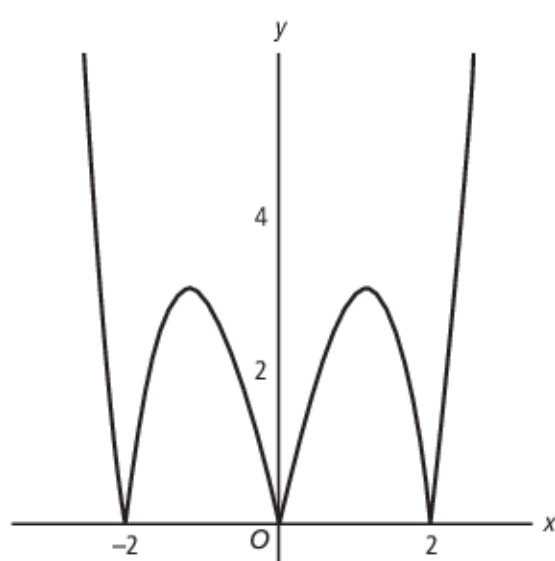


- f  $k(2\frac{2}{3}) = \frac{27}{256}$  is een minimum.

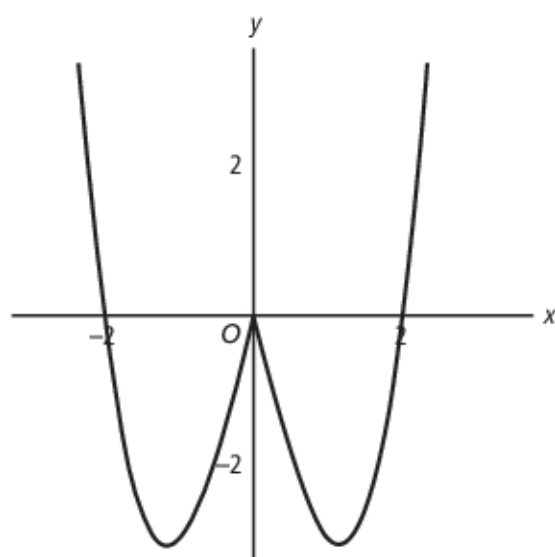
- 20a** De grafiek van  $-|f(x)|$  krijg je door eerst het deel van de grafiek van  $f$  onder de  $x$ -as te spiegelen in de  $x$ -as, en daarna de grafiek te spiegelen in de  $x$ -as.



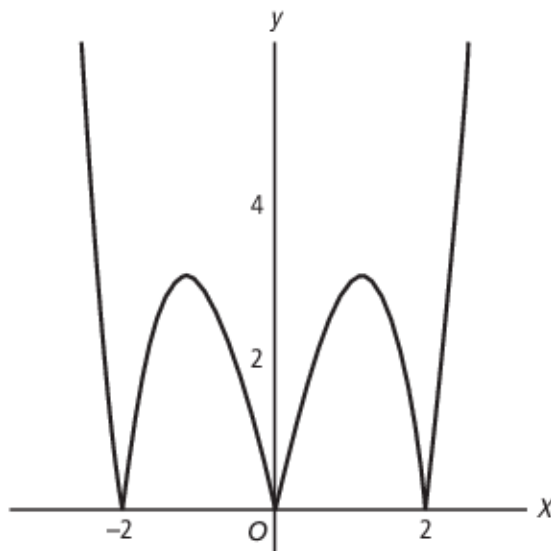
- b** De grafiek van  $|f(-x)|$  krijg je door eerst de grafiek van  $f$  te spiegelen in de  $y$ -as, en daarna het deel van de grafiek onder de  $x$ -as te spiegelen in de  $x$ -as,



- c** De grafiek van  $f(|x|)$  krijg je door het deel van de grafiek van  $f$  rechts van de  $y$ -as te spiegelen in de  $y$ -as.



- d De grafiek van  $|f(|x|)|$  krijg je door eerst het deel van de grafiek van  $f$  rechts van de  $y$ -as te spiegelen in de  $y$ -as, en daarna het deel van de grafiek onder de  $x$ -as te spiegelen in de  $x$ -as.



Pagina 145:

21a  $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{3x}{x^2} = \frac{1-3x}{x^2}$

Het andere nulpunt van  $f$  is  $x = 3$ .

$g(3)$  bestaat, dus  $x = 3$  is geen verticale asymptoot van  $g$ .

b  $g(1) = f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1)$  en  $g(-1) = f\left(\frac{1}{-1}\right) = f(-1)$

c Voor de snijpunten geldt  $f(x) = g(x)$ .

$$\frac{1-3x}{x^2} = x^2 - 3x$$

$$1-3x = x^2 \cdot (x^2 - 3x)$$

$$1-3x = x^4 - 3x^3$$

$$x^4 - 3x^3 + 3x - 1 = 0$$

d  $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 1) = x^4 - x^2 - 3x^3 + 3x + x^2 - 1 = x^4 - 3x^3 + 3x - 1$

$$(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ of } x^2 - 1 = 0$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} \text{ of } x^2 = 1$$

$$x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ of } x = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ of } x = 1 \text{ of } x = -1$$

- 22a De grafiek van  $f$  heeft geen verticale asymptoot, want de vergelijking  $1 + \sqrt{x} = 0$  heeft geen oplossing.

De grafiek van  $g$  heeft een verticale asymptoot  $x = -1$ .

b Voor elke  $x \geq 0$  geldt:

$$\sqrt{x} \leq 1 + \sqrt{x} \quad (1 + \sqrt{x} > 0)$$

$$\frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} < 1 \quad (\text{links en rechts } : (1 + \sqrt{x}))$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} < 2 \quad (\text{links en rechts } \times 2)$$

c Het domein van  $f$  is  $[0, \rightarrow)$ .

$$\text{Als } x \neq 0 \text{ dan } f(x) = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}$$

Als  $x \rightarrow \infty$  dan  $f(x) \rightarrow \frac{2}{0+1} = 2$ .

Het bereik van  $f$  is  $[0, 2)$ .

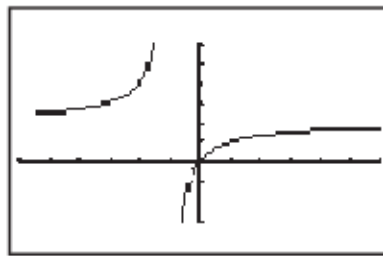
Het domein van  $g$  is  $\langle \leftarrow, -1 \rangle$  en  $\langle -1, \rightarrow \rangle$ .

Als  $x \neq 0$  dan  $g(x) = \frac{2}{\frac{1}{x} + 1}$ .

Als  $x \rightarrow \infty$  of  $x \rightarrow -\infty$  dan  $g(x) \rightarrow \frac{2}{0+1} = 2$ .

Het bereik van  $g$  is  $\langle \leftarrow, 2 \rangle$  en  $\langle 2, \rightarrow \rangle$ .

d

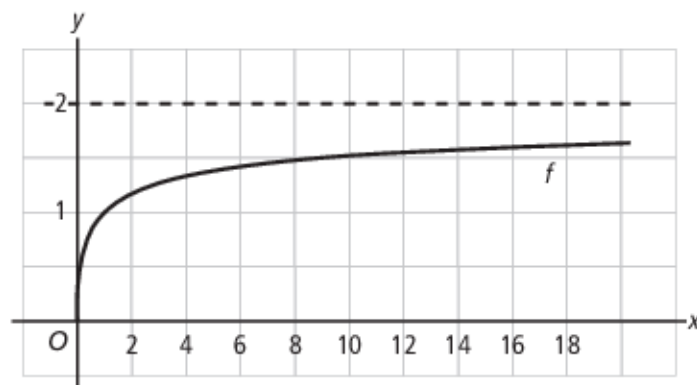


Het domein van  $f$  is  $[0, \rightarrow)$  en het bereik van  $f$  is  $[0, 2)$ .

De grafiek van  $f$  heeft een horizontale asymptoot  $y = 2$ .

$(0, 0)$  is een randpunt.

Er geldt  $f(x) = g(\sqrt{x})$ , dus bijvoorbeeld  $f(\frac{1}{4}) = g(\frac{1}{2})$ ,  $f(1) = g(1)$  en  $f(9) = g(3)$ .



**23a** Het domein van  $g$  is  $\langle 0, \rightarrow \rangle$ .

**b**  $g'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

$\ln(x) + 1 = 0$  geeft  $\ln(x) = -1$ , dus  $x = \frac{1}{e}$

$g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$  is een minimum.

$g(1) = 0$  en als  $x \downarrow 0$  dan  $g(x) \uparrow 0$

Op het interval  $\langle 0, 1 \rangle$  is  $-\frac{1}{e} \leq g(x) < 0$ .

**c** Op het interval  $\langle 0, 1 \rangle$  is  $0^2 < (g(x))^2 \leq \left(-\frac{1}{e}\right)^2$ , dus  $0 < h(x) \leq \frac{1}{e^2}$ .

**d** De grafiek van  $f$  heeft geen snijpunt met de horizontale as omdat de vergelijking

$$\frac{1}{(x \cdot \ln(x))^2} = 0 \text{ geen oplossing heeft.}$$

**e** Als  $x \rightarrow \infty$  dan  $x \cdot \ln(x) \rightarrow \infty$  dus  $\frac{1}{(x \cdot \ln(x))^2} \downarrow 0$ .

De grafiek van  $f$  heeft een horizontale asymptoot  $y = 0$ .

**f** Uit  $(x \cdot \ln(x))^2 = 0$  volgt  $x = 0$  of  $x = 1$ .

Er zijn twee verticale asymptoten  $x = 0$  en  $x = 1$ .

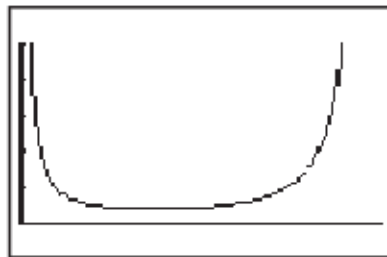
- g** De grafiek van  $h$  heeft op het interval  $\langle 0, 1 \rangle$  een maximum  $\frac{1}{e^2}$ ,  
dus de grafiek van  $f$  heeft daar een minimum  $\frac{1}{\frac{1}{e^2}} = e^2$ .

Als  $x \downarrow 0$  dan  $g(x) \uparrow 0$  dus  $(g(x))^2 \downarrow 0$  en  $f(x) = \frac{1}{(g(x))^2} \rightarrow \infty$ .

Als  $x \uparrow 1$  dan  $g(x) \uparrow 0$  dus  $(g(x))^2 \downarrow 0$  en  $f(x) = \frac{1}{(g(x))^2} \rightarrow \infty$ .

Invoer:  $Y1 = 1/(X \ln(X))^2$

Venster:  $X_{\min} = 0, X_{\max} = 1, Y_{\min} = 0, Y_{\max} = 100$



## 6-5 Families van functies

Pagina 146:

- 24a** Voor de top geldt  $f'_{-2}(x) = 0$ .

$$f_{-2}(x) = \ln^2(x) - 2\ln(x)$$

$$f'_{-2}(x) = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x) - 2}{x}$$

$$\frac{2\ln(x) - 2}{x} = 0$$

$$2\ln(x) - 2 = 0$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

De top van de grafiek van  $f_{-2}$  is  $(e, f_{-2}(e)) = (e, -1)$ .

- b** Voor het buigpunt geldt  $f''_{-2}(x) = 0$ .

$$f''_{-2}(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (2\ln(x) - 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln(x) + 2}{x^2} = \frac{-2\ln(x) + 4}{x^2}$$

$$\frac{-2\ln(x) + 4}{x^2} = 0$$

$$-2\ln(x) + 4 = 0$$

$$2\ln(x) = 4$$

$$\ln(x) = 2$$

$$x = e^2$$

Het buigpunt van de grafiek van  $f_{-2}$  is  $(e^2, f_{-2}(e^2)) = (e^2, 0)$ .

- c** Voor een nulpunt geldt  $f_p(x) = 0$ .

$$\ln^2(x) + p \cdot \ln(x) = 0$$

$$\ln(x) \cdot (\ln(x) + p) = 0$$

$$\ln(x) = 0 \text{ of } \ln(x) = -p$$

$$x = 1 \text{ of } x = e^{-p}$$

Er zijn twee verschillende nulpunten als  $p \neq 0$ .



- d Voor de top van de grafiek geldt  $f'_p(x) = 0$ .

$$f'_p(x) = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} + p \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x) + p}{x}$$

$$\frac{2\ln(x) + p}{x} = 0$$

$$2\ln(x) + p = 0$$

$$\ln(x) = -\frac{1}{2}p$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}p} \text{ ofwel } p = 2\ln(x)$$

Alle toppen liggen op de grafiek van  $g(x) = f_{2\ln(x)} = \ln^2(x) - 2\ln(x) \cdot \ln(x) = -\ln^2(x)$ .

- 25a Er moet gelden  $f_p(\frac{1}{4}\pi) = 0$ .

$$p \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi) + (p+1) \cdot \sin(\frac{1}{4}\pi) = 0$$

$$p \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + (p+1) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot p + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot p = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

- b Er moet gelden  $f_p(\frac{1}{2}\pi) = 0$ .

$$p \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi) + (p+1) \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi) = 0$$

$$p \cdot 0 + (p+1) \cdot 1 = 0$$

$$p+1 = 0$$

$$p = -1$$

Samen met opdracht a volgt: als  $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$  dan  $-1 < p < -\frac{1}{2}$

- 26a De afgeleide nul stellen:

$$f'_p(x) = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x) + p \cdot \cos(x)$$

$$3\sin^2(x) \cdot \cos(x) + p \cdot \cos(x) = 0$$

$$\cos(x) \cdot (3\sin^2(x) + p) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } 3\sin^2(x) = -p$$

$$x = \frac{1}{2}\pi \text{ of } \sin^2(x) = -\frac{p}{3}$$

$$x = \frac{1}{2}\pi \text{ of } \sin(x) = \sqrt{-\frac{p}{3}} \quad (\sin(x) = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ heeft geen oplossing op } \langle 0, \pi \rangle)$$

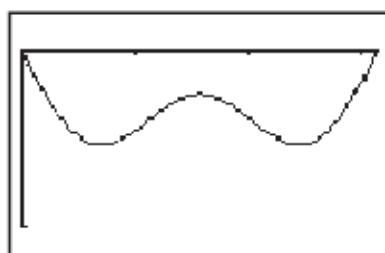
De eerste oplossing uitwerken:

$$\text{Als } x = \frac{1}{2}\pi \text{ dan moet gelden } \sin^3(\frac{1}{2}\pi) + p \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Dit geeft } 1 + p = -\frac{1}{4}, \text{ dus } p = -1\frac{1}{4}.$$

$$\text{Invoer: } Y1 = (\sin(X))^3 - 1,25\sin(X)$$

$$\text{Venster: } X_{\min} = 0, X_{\max} = \pi, Y_{\min} = -1, Y_{\max} = 0$$



$p = -1\frac{1}{4}$  voldoet niet, want dan is er voor  $x = \frac{1}{2}\pi$  een *maximum*  $-\frac{1}{4}$ .

De tweede oplossing uitwerken:

$\sin(x) = \sqrt{-\frac{p}{3}}$  substitueren in  $\sin^3(x) + p \cdot \sin(x) = -\frac{1}{4}$  geeft

$$\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} = -\frac{1}{4}$$

Invoer:  $Y1 = (\sqrt{-X/3})^3 + X\sqrt{-X/3}$  en  $Y2 = -0,25$

Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 2$ ,  $Y_{\min} = -2$ ,  $Y_{\max} = 0$

Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solv, ISCT (Casio).

De oplossing geeft  $x = -0,75$ . Controleren met een plot laat zien dat voor  $p = -0,75$  het minimum van  $f_p(x)$  gelijk is aan  $-\frac{1}{4}$ .

**b** De tweede afgeleide berekenen:

$$f'_p(x) = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x) + p \cdot \cos(x)$$

$$f''_p(x) = 6\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + 3\sin^2(x) \cdot (-\sin(x)) - p \cdot \sin(x)$$

$$f''_p(x) = 6\sin(x) \cdot \cos^2(x) - 3\sin^3(x) - p \cdot \sin(x)$$

$$f''_p(x) = \sin(x) \cdot (6\cos^2(x) - 3\sin^2(x) - p)$$

$$f''_p(x) = \sin(x) \cdot (6\cos^2(x) - 3(1 - \cos^2(x)) - p)$$

$$f''_p(x) = \sin(x) \cdot (9\cos^2(x) - 3 - p)$$

De tweede afgeleide nul stellen:

$$\sin(x) \cdot (9\cos^2(x) - 3 - p) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } 9\cos^2(x) - 3 - p = 0$$

$$9\cos^2(x) - 3 - p = 0 \quad (\sin(x) > 0 \text{ op het domein } \langle 0, \pi \rangle)$$

$$\cos^2(x) = \frac{3+p}{9}$$

Deze vergelijking heeft één oplossing als  $p = -3$  en twee oplossingen als

$$0 < \frac{3+p}{9} < 1 \text{ dus als } -3 < p < 6.$$

De eerste oplossing,  $p = -3$ , uitwerken:

Als  $p = -3$  dan geldt  $f''_p(x) = \sin(x) \cdot 9\cos^2(x) \geq 0$  op het domein  $\langle 0, \pi \rangle$ , dus dan heeft de grafiek van  $f$  geen buigpunt.

De tweede oplossing,  $-3 < p < 6$ , uitwerken:

Het bereik van  $9\cos^2(x)$  op het domein  $\langle 0, \pi \rangle$  is  $[0, 9]$ .

Het bereik van  $9\cos^2(x) - 3 - p$  op het domein  $\langle 0, \pi \rangle$  is

$$[0 - 3 - p, 9 - 3 - p] = [-3 - p, 6 - p].$$

Als  $-3 < p < 6$  dan  $-3 - p < 0$  en  $6 - p > 0$ .

Omdat  $\sin(x) > 0$  op het domein  $\langle 0, \pi \rangle$  heeft  $f''$  dan zowel positieve als negatieve waarden.

Voor  $-3 < p < 6$  heeft de grafiek van  $f$  dus minstens één buigpunt.

**Pagina 147:**

**27a**  $f'_p(x) = 2(x-p) \cdot e^x + (x-p)^2 \cdot e^x$

**b** Voor de top van een grafiek geldt  $f'_p(x) = 0$ .

$$2(x-p) \cdot e^x + (x-p)^2 \cdot e^x = 0$$

$$(x-p) \cdot e^x \cdot (2+x-p) = 0$$

$$x-p=0 \text{ of } 2+x-p=0$$

$$x=p \text{ of } x=p-2$$

Er ligt een top van de grafiek op de y-as als  $p=0$  of als  $p=2$ .

**c** De toppen zijn  $(p, f(p)) = (p, 0)$  en  $(p-2, f(p-2)) = (p-2, 4e^{p-2})$ .

**d**  $g(p-2) = 4e^{p-2}$  dus alle toppen van de vorm  $(p-2, 4e^{p-2})$  liggen op de grafiek van  $g$ .

$g(p) = 4e^p \neq 0$ , dus de top  $(p, 0)$  ligt niet op de grafiek van  $g$ .

**28a** 
$$f_p'(0) = \frac{4 + p \sin(0)}{p + 2 \cos(0)} = \frac{4}{p+2} \quad (\text{merk op: } p \neq -2)$$

De raaklijn gaat door  $\left(0, \frac{4}{p+2}\right)$  en  $(p, p)$ , dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p - f_p'(0)}{p - 0} = \frac{p - \frac{4}{p+2}}{p} = \frac{p(p+2) - 4}{p(p+2)}$$

De afgeleide van  $f_p(x)$ :

$$f_p'(x) = \frac{p \cos(x)(p + 2 \cos(x)) - (4 + p \sin(x)) \cdot -2 \sin(x)}{(p + 2 \cos(x))^2}$$

$$f_p'(0) = \frac{p \cdot (p+2) - 4 \cdot 0}{(p+2)^2} = \frac{p}{p+2}$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is gelijk aan  $f_p'(0)$ .

$$\frac{p(p+2) - 4}{p(p+2)} = \frac{p}{p+2}$$

$$\frac{p(p+2) - 4}{p} = \frac{p}{1}$$

$$p^2 + 2p - 4 = p^2$$

$$2p - 4 = 0, \text{ hieruit volgt } p = 2.$$

**29a** De afstand van elk punt  $A$  tot de oorsprong is

$$\sqrt{x^2 + (\sqrt{16 - x^2})^2} = \sqrt{x^2 + 16 - x^2} = \sqrt{16} = 4.$$

**b** Voor elke waarde van  $p$  is de afstand van een willekeurig punt  $B(x, \sqrt{16 + px - x^2})$  op de grafiek van  $f_p(x)$  tot het middelpunt  $M(\frac{1}{2}p, 0)$  gelijk aan

$$\sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + (\sqrt{16 + px - x^2} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 + 16 + px - x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + 16} = \text{constant}$$

Voor elke waarde van  $p$  is  $M(\frac{1}{2}p, 0)$  dus het middelpunt van die halve cirkel.

**c** 
$$f_6(x) = \sqrt{16 + 6x - x^2}$$

$$16 + 6x - x^2 \geq 0$$

$$16 + 6x - x^2 = 0$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x-8)(x+2) = 0$$

$$x = 8 \text{ of } x = -2$$

De grafiek van  $f(x) = \sqrt{16 + 6x - x^2}$  is een bergparabool, dus het domein van  $f_6$  is  $[-2, 8]$ .

**d** 
$$\text{inhoud} = \int_{-2}^8 \pi (f_6(x))^2 dx = \pi \int_{-2}^8 (16 + 6x - x^2) dx = \pi \left[ 16x + 3x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^8$$

$$= \pi (128 + 192 - 170\frac{2}{3} - (-32 + 12 + 2\frac{2}{3})) = \pi (149\frac{1}{3} + 17\frac{1}{3}) = 166\frac{2}{3}\pi.$$

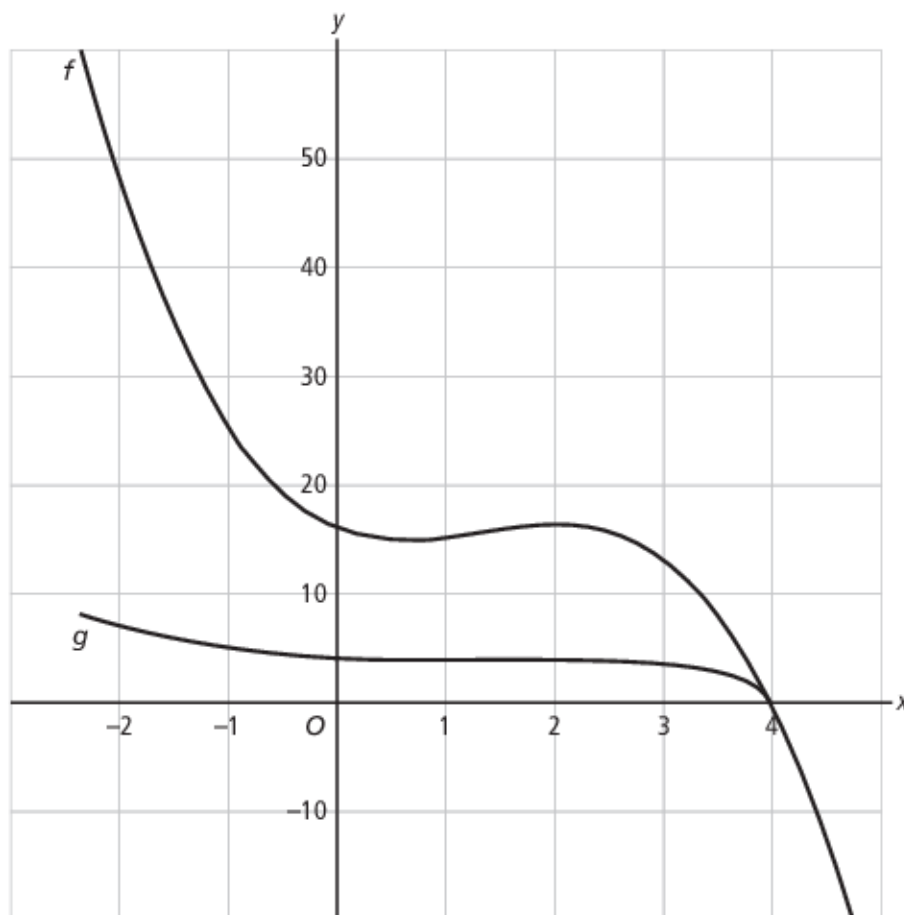
- e De  $x$ -coördinaat van  $M(\frac{1}{2}p, 0)$  is  $\frac{-1+16}{2} = 7\frac{1}{2}$ .  
 $\frac{1}{2}p = 7\frac{1}{2}$ , dus  $p = 15$
- f De grafieken van  $f_p$  hebben een maximum voor  $x = \frac{1}{2}p$  (de  $x$ -coördinaat van  $M$ ).  
 Dan geldt  $p = 2x$ .

De toppen van de grafieken van  $f_p$  liggen op de grafiek van  
 $g(x) = f_{2x}(x) = \sqrt{16 + 2x^2 - x^2} = \sqrt{16 + x^2}$ .

## 6-6 Gemengde opdrachten

Pagina 148:

30ac



- b  $(x^2 + 4)(4 - x) \geq 0$   
 $4 - x \geq 0$   $(x^2 + 4 \geq 4)$   
 $x \leq 4$   
 Het domein van  $g$  is  $\langle -\infty, 4 \rangle$ .
- d  $f'(x) = 2x \cdot (4 - x) + (x^2 + 4) \cdot -1$   
 $f'(x) = 8x - 2x^2 - x^2 - 4$   
 $f'(x) = -3x^2 + 8x - 4$   
 $g'(x) = \frac{1}{2}((x^2 + 4)(4 - x))^{-\frac{1}{2}} \cdot (-3x^2 + 8x - 4)$   
 $g'(x) = -\frac{3x^2 - 8x + 4}{2\sqrt{(x^2 + 4)(4 - x)}}$
- e Er moet gelden  $f'(x) = 0$ .  
 $-3x^2 + 8x - 4 = 0$   
 $x = \frac{-8 + \sqrt{8^2 - 4 \cdot -3 \cdot -4}}{2 \cdot -3}$  of  $x = \frac{-8 - \sqrt{8^2 - 4 \cdot -3 \cdot -4}}{2 \cdot -3}$   
 $x = \frac{-8 + \sqrt{16}}{-6}$  of  $x = \frac{-8 - \sqrt{16}}{-6}$   
 $x = \frac{2}{3}$  of  $x = 2$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 14\frac{22}{27} \text{ en } f(2) = 16$$

De punten op de grafiek van  $f$  met een horizontale raaklijn zijn  $\left(\frac{2}{3}, 14\frac{22}{27}\right)$  en  $(2, 16)$ .

- f** Er moet gelden  $g'(x) = 0$ .

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{14\frac{22}{27}} \text{ en } g(2) = 4$$

De punten op de grafiek van  $g$  met een horizontale raaklijn zijn  $\left(\frac{2}{3}, \sqrt{14\frac{22}{27}}\right)$  en  $(2, 4)$ .

- 31a** Er moet gelden  $f'(x) = 0$ .

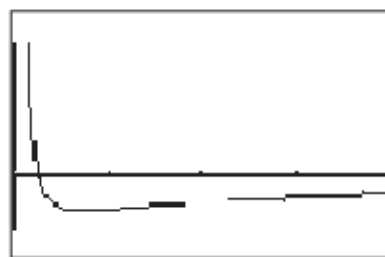
$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - (1 - \ln(x)) \cdot 1}{x^2} = \frac{\ln(x) - 2}{x^2}$$

$$\frac{\ln(x) - 2}{x^2} = 0$$

$$\ln(x) = 2, \text{ dus } x = e^2$$

Invoer:  $Y1 = (1 - \ln(X))/X$

Venster:  $X_{\min} = 0, X_{\max} = 40, Y_{\min} = -0.2, Y_{\max} = 0.5$



$$f(e^2) = -\frac{1}{e^2} \text{ is een minimum.}$$

$$\text{b } g(x) = \frac{1 - \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x \cdot (1 - (\ln(1) - \ln(x))) = x \cdot (1 + \ln(x)) = x + x \cdot \ln(x)$$

- c** De grafiek van  $f$  heeft een verticale asymptoot  $x = 0$  en een horizontale asymptoot  $y = 0$ .  
De grafiek van  $g$  heeft geen asymptoten.

- d**  $f(x) \cdot g(x) \leq \frac{3}{4}$

$$\frac{1 - \ln(x)}{x} \cdot (x + x \cdot \ln(x)) \leq \frac{3}{4}$$

$$\frac{1 - \ln(x)}{x} \cdot (x + x \cdot \ln(x)) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x + x \cdot \ln(x) - x \cdot \ln(x) - x \cdot \ln^2(x)}{x} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x \cdot (1 - \ln^2(x))}{x} = \frac{3}{4}$$

$$1 - \ln^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\ln^2(x) = \frac{1}{4}$$

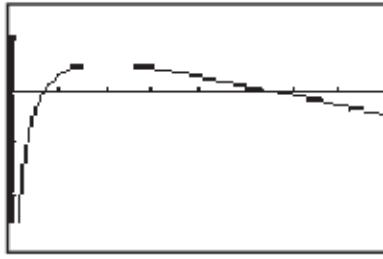
$$\ln(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \ln(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{e} \text{ of } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Invoer:  $Y1 = 1 - \ln(X)^2$

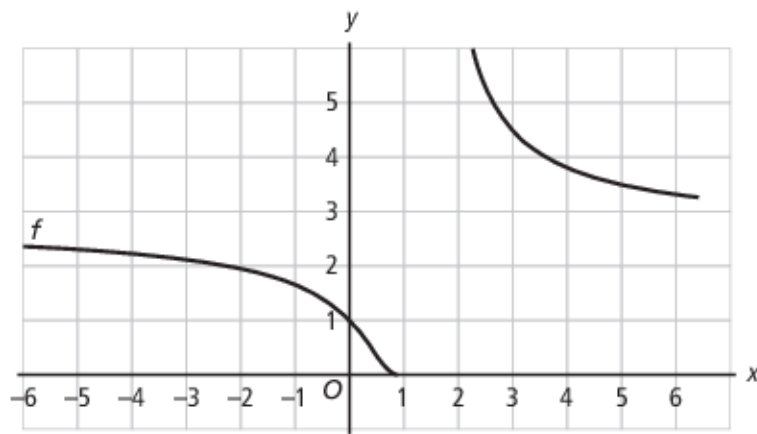
Venster:  $X_{\min} = 0, X_{\max} = 4, Y_{\min} = -5, Y_{\max} = 2$





De oplossing is  $\left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{e}} \right\rangle$  en  $[\sqrt{e}, \rightarrow)$ .

**32a**



- b** Als  $x \uparrow 1$  dan  $g(x) \rightarrow -\infty$  dus  $f(x) \downarrow 0$ .  
 Als  $x \downarrow 1$  dan  $g(x) \rightarrow \infty$  dus  $f(x) \rightarrow \infty$ .
- c** Als  $x \rightarrow \infty$  of  $x \rightarrow -\infty$  dan  $g(x) \rightarrow 1$  dus  $f(x) \rightarrow e$ .  
 De horizontale asymptoot is  $y = e$ .

**d** 
$$f'(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{-\frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2} \cdot (x-1)^2 - e^{\frac{x}{x-1}} \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{-e^{\frac{x}{x-1}} - 2x \cdot e^{\frac{x}{x-1}} + 2e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x \cdot e^{\frac{x}{x-1}} - e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-1) \cdot e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^4}$$

- e** Voor het buigpunt geldt  $f''(x) = 0$ .  
 $\frac{(2x-1) \cdot e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^4} = 0$  geeft  $2x-1=0$ , dus  $x = \frac{1}{2}$ .  
 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{e}$ , dus het buigpunt is  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e}\right)$ .

**33a** In het punt  $P$  geldt  $g(x) = 0$ .

$$2 + \ln\left(\frac{x-a}{4}\right) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x-a}{4}\right) = -2$$

$$\frac{x-a}{4} = e^{-2}$$

$$x = 4e^{-2} + a$$

$P$  is het punt  $\left(\frac{4}{e^2} + a, 0\right)$ .

$$f_a\left(\frac{4}{e^2} + a\right) = \sqrt{\frac{4}{e^2}} = \frac{2}{e}$$

$Q$  is het punt  $\left(\frac{4}{e^2} + a, \frac{2}{e}\right)$ .

$$\text{De afstand } PQ = \frac{2}{e} - 0 = \frac{2}{e}$$

- b** In het raakpunt geldt  $f'(x) = g'(x)$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-a}} \quad (x \neq a)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x-a} \cdot \frac{1 \cdot 4}{16} = \frac{1}{x-a} \quad (x \neq a)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x-a}} = \frac{1}{x-a}$$

$$x-a = 2\sqrt{x-a}$$

$$(x-a)^2 = 4(x-a) \quad (\text{links en rechts gekwadrateerd})$$

$$x-a = 0 \text{ of } x-a = 4$$

$$x = a + 4 \quad (x = a \text{ vervalt})$$

$$f_a(a+4) = \sqrt{4} = 2 \text{ en } g_a(a+4) = 2 + \ln(1) = 2$$

Dus de grafieken van  $f_a$  en  $g_a$  raken elkaar voor elke waarde van  $a$ .

- c** Het raakpunt is  $(a+4, 2)$ .

De verzameling raakpunten heeft als vergelijking  $y = 2$ .

**Pagina 149:**

- 34a** Er moet gelden  $f_p\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 0$ .

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - p \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 0$$

$$1 - p \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$$

$$p = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

- b** Er moet gelden  $f_p'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0$ .

$$f_p'(x) = 2\cos(2x) - p \cdot \cos(x)$$

$$2\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) - p \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0$$

$$2 \cdot -\frac{1}{2} - p \cdot -\frac{1}{2} = 0$$

$$-1 + \frac{1}{2}p = 0$$

$$p = 2$$

- c Er moet gelden  $f'_p(\frac{1}{2}\pi) \neq 0$ .

$$f'_p(\frac{1}{2}\pi) = 2\cos(\pi) - p \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi) = 2 \cdot -1 - p \cdot 0 = -2$$

$f'_p(\frac{1}{2}\pi)$  is voor geen enkele waarde van  $p$  gelijk aan nul.

Dus voor geen enkele waarde van  $p$  heeft de functie  $f$  een extreme waarde voor  $x = \frac{1}{2}\pi$ .

- d Er moet gelden  $f''_p(\frac{1}{3}\pi) = 0$ .

$$f''_p(x) = -4\sin(2x) + p \cdot \sin(x)$$

$$-4\sin(\frac{2}{3}\pi) + p \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi) = 0$$

$$-4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + p \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}(-4 + p) = 0$$

$$-4 + p = 0$$

$$p = 4$$

- 35a Er moet gelden  $f'_1(x) = 0$ .

$$f_1(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f'_1(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$\frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

$$f_1(e) = \frac{1}{e}$$

De top van de grafiek van  $f_1$  is  $(e, \frac{1}{e})$ .

b 
$$f'_k(x) = \frac{\frac{k}{kx} \cdot x - \ln(kx) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(kx)}{x^2}$$

$$\frac{1 - \ln(kx)}{x^2} = 0$$

$$\ln(kx) = 1$$

Voor de toppen geldt  $\ln(kx) = 1$ , dus de toppen liggen op de lijn  $y = \frac{\ln(kx)}{x} = \frac{1}{x}$

- c Er moet gelden  $f_2(x) = 0$ .

$$f_2(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$$

$$\frac{\ln(2x)}{x} = 0$$

$$\ln(2x) = 0$$

$$2x = 1, \text{ dus } x = \frac{1}{2}$$

- d Er moet gelden  $f_k(x) = 0$ .

$$\frac{\ln(kx)}{x} = 0$$

$$\ln(kx) = 0$$

$$kx = 1, \text{ dus } x = \frac{1}{k}$$

- e Er moet gelden  $f_3''(x) = 0$ .

$$f_3'(x) = \frac{1 - \ln(3x)}{x^2}$$

$$f_3''(x) = \frac{-3 \cdot \frac{1}{3x} \cdot x^2 - (1 - \ln(3x)) \cdot 2x}{x^4}$$

$$f_3''(x) = \frac{-x - 2x + 2x \cdot \ln(3x)}{x^4}$$

$$f_3''(x) = \frac{-3x + 2x \cdot \ln(3x)}{x^4}$$

$$f_3''(x) = \frac{2\ln(3x) - 3}{x^3}$$

$$\frac{2\ln(3x) - 3}{x^3} = 0$$

$$2\ln(3x) - 3 = 0$$

$$\ln(3x) = \frac{3}{2} \text{ geeft } 3x = e^{\frac{3}{2}}, \text{ dus } x = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{e^3}$$

$$f_3\left(\frac{1}{3}\sqrt{e^3}\right) = \frac{\ln\left(3 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{e^3}\right)}{\frac{1}{3}\sqrt{e^3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}\sqrt{e^3}} = \frac{4\frac{1}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{2e^2}\sqrt{e}$$

Het buigpunt van de grafiek van  $f_3$  is  $\left(\frac{1}{3}\sqrt{e^3}, \frac{9}{2e^2}\sqrt{e}\right)$ .

- f Er moet gelden  $F_k'(x) = f_k(x)$ .

$$F_k'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\ln(kx) \cdot \frac{1}{kx} \cdot k + 0 = \frac{\ln(kx)}{x} = f_k(x)$$

g  $\int_{0,5e}^6 f_2(x) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \ln^2(2x)\right]_{0,5e}^6 = \frac{1}{2} \cdot \ln^2(12) - \frac{1}{2} \cdot \ln^2(e) = \frac{1}{2}\ln^2(12) - \frac{1}{2}$

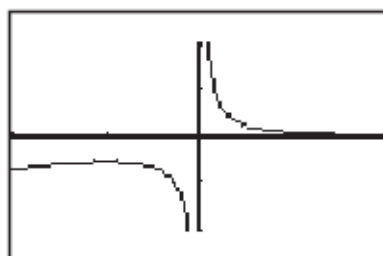
## Test jezelf

Pagina 152:

T-1a  $f'(x) = \frac{0 - (1 \cdot e^x + xe^x) \cdot 1}{(x \cdot e^x)^2} = -\frac{e^x \cdot (1+x)}{x^2 \cdot e^{2x}} = -\frac{x+1}{x^2 \cdot e^x}$

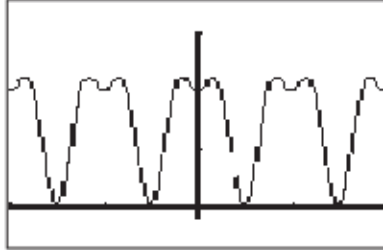
$$-\frac{x+1}{x^2 \cdot e^x} = 0$$

$$x = -1$$



$$f(-1) = \frac{1}{-e^{-1}} = -e \text{ is een maximum.}$$

**b**  $g(x) = -\cos^2(x) + \cos(x) + 2$   
 $g'(x) = -2\cos(x) \cdot -\sin(x) - \sin(x) = \sin(x) \cdot (2\cos(x) - 1)$   
 $\sin(x) \cdot (2\cos(x) - 1) = 0$   
 $\sin(x) = 0$  of  $\cos(x) = \frac{1}{2}$   
 $x = 0 + k \cdot \pi$  of  $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  ( $k$  geheel)



$g(0 + k \cdot 2\pi) = -1 + 1 + 2 = 2$  zijn minima. ( $k$  geheel)  
 $g(\pi + k \cdot 2\pi) = -1 - 1 + 2 = 0$  zijn minima. ( $k$  geheel)  
 $g(\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{4}$  zijn maxima. ( $k$  geheel)  
 $g(-\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{4}$  zijn maxima. ( $k$  geheel)

**c**  $h'(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 5} - 2x \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 4)}{(\sqrt{x^2 + 4x + 5})^2}$

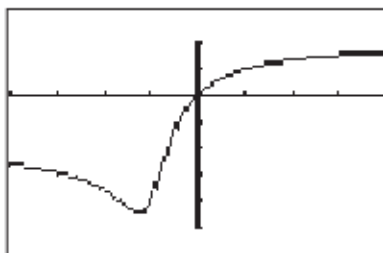
$$h'(x) = \frac{2x^2 + 8x + 10}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} - \frac{2x^2 + 4x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$$

$$h'(x) = \frac{2x^2 + 8x + 10 - 2x^2 - 4x}{(x^2 + 4x + 5) \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 5}}$$

$$h'(x) = \frac{4x + 10}{(x^2 + 4x + 5) \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 5}}$$

$$h'(x) = \frac{4x + 10}{(x^2 + 4x + 5) \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 5}}$$

$$\frac{4x + 10}{(x^2 + 4x + 5) \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 5}} = 0 \text{ geeft } x = -2\frac{1}{2}.$$



$$h(-2\frac{1}{2}) = \frac{-5}{\sqrt{6\frac{1}{4} - 10 + 5}} = -\frac{5}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = -\frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{5}} = -2\sqrt{5} \text{ is een minimum.}$$

**d**  $k(x) = (x-4)\sqrt{x}$  als  $x \geq 4$  en  $k(x) = (4-x)\sqrt{x}$  als  $0 \leq x < 4$ .  
 $k'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}}$  als  $x \geq 4$  en  $k'(x) = -\sqrt{x} + \frac{4-x}{2\sqrt{x}}$  als  $0 \leq x < 4$ .

$$\sqrt{x} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{3x-4}{2\sqrt{x}} = 0$$

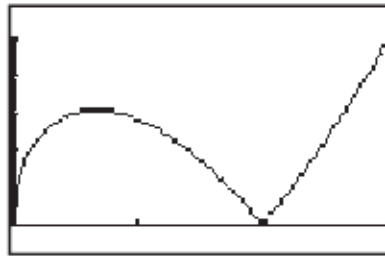


Geen oplossing. ( $x = 1\frac{1}{3}$  voldoet niet)

$$-\sqrt{x} + \frac{4-x}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}} = 0 \quad (\text{links en rechts} \times -1)$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$



$$k(1\frac{1}{3}) = 2\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = 5\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 5\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1\frac{7}{9}\sqrt{3} \text{ is een maximum.}$$

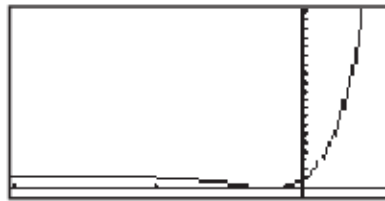
$k(0) = 0$  is een randminimum.

$k(4) = 0$  is een minimum.

**T-2a**  $f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 1$

**b** Invoer:  $Y1 = 2X * e^{(0.5X)} + 0.5X^2 * e^{(0.5X)} + 1$

Venster:  $X_{\min} = -10$ ,  $X_{\max} = 3$ ,  $Y_{\min} = -1$ ,  $Y_{\max} = 20$



De optie minimum (TI) of MIN (Casio) geeft  $x \approx -1,172$  en  $y \approx 0,777$ .

De optie maximum (TI) of MAX (Casio) geeft  $x \approx -6,828$  en  $y \approx 1,318$ .

De grafiek van  $f$  heeft geen uiterste waarde want de grafiek van  $f'$  snijdt de  $x$ -as niet.

De grafiek van  $f$  heeft twee buigpunten want de grafiek van  $f'$  heeft een minimum en een maximum.

**c** Er moet gelden  $f''(x) = 0$ .

$$f''(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = (\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$(\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2 = 0 \quad (e^{\frac{1}{2}x} = 0 \text{ heeft geen oplossing})$$

$$x^2 + 8x + 8 = 0 \quad (\text{links en rechts} \times 4)$$

$$x = \frac{-8 + \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} \text{ of } x = \frac{-8 - \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2}$$

$$x = \frac{-8 + \sqrt{32}}{2} \text{ of } x = \frac{-8 - \sqrt{32}}{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

De  $x$ -coördinaten van de buigpunten zijn  $-4 + 2\sqrt{2}$  en  $-4 - 2\sqrt{2}$ .

**T-3a** Het domein van  $f$  is  $\langle 0, \rightarrow \rangle$ .

$$\text{Als } x \rightarrow \infty \text{ dan } f(x) = \frac{1}{\frac{4}{\ln(x)} - 1} \rightarrow \frac{1}{0 - 1} = -1$$

De lijn  $y = -1$  is een horizontale asymptoot.

Uit  $4 - \ln(x) = 0$  volgt dat de lijn  $x = e^4$  een verticale asymptoot is.

- b** Het domein van  $g$  is  $\mathbb{R}$ .

Als  $x \rightarrow \infty$  dan  $g(x) \rightarrow 0$ .

De lijn  $y = 0$  is een horizontale asymptoot.

Als  $x \rightarrow -\infty$  dan  $g(x) \rightarrow \frac{4}{2+0} = 2$ .

De lijn  $y = 2$  is een horizontale asymptoot.

Uit  $2 - e^x = 0$  volgt dat  $x = \ln(2)$  een verticale asymptoot is.

- c** Het domein van  $h$  is  $\langle \leftarrow, -2 \rangle$  en  $\langle -2, \rightarrow \rangle$ .

Als  $x \rightarrow \infty$  dan  $h(x) = \frac{x-2}{x+2} = \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow \frac{1-0}{1+0} = 1$

De lijn  $y = 1$  is een horizontale asymptoot.

Als  $x \rightarrow -\infty$  dan  $h(x) = \frac{-x+2}{x+2} = \frac{-1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow \frac{-1-0}{1+0} = -1$

De lijn  $y = -1$  is een horizontale asymptoot.

Uit  $x+2=0$  volgt dat  $x=-2$  een verticale asymptoot is.

- d** Het domein van  $k$  is  $\langle \leftarrow, -1 \rangle$  en  $\langle -1, \rightarrow \rangle$ .

Als  $x \rightarrow \infty$  of  $x \rightarrow -\infty$  dan  $k(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{\sin(x)}{x+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{\sin(x)}{x+1} \rightarrow \frac{1}{1+0} + 0 = 1$

De lijn  $y = 1$  is een horizontale asymptoot.

Uit  $x+1=0$  volgt dat  $x=-1$  een verticale asymptoot is.

- e** Het domein van  $l$  is  $\mathbb{R}$ .

Als  $x \rightarrow \infty$  dan  $l(x) = \frac{4 + \frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \frac{4 + \frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{4 + \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{4+0}{\sqrt{1+0}} = 4$

De lijn  $y = 4$  is een horizontale asymptoot.

Als  $x \rightarrow -\infty$  dan  $l(x) = \frac{4 + \frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{4 + \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{4+0}{-\sqrt{1+0}} = -4$

De lijn  $y = -4$  is een horizontale asymptoot.

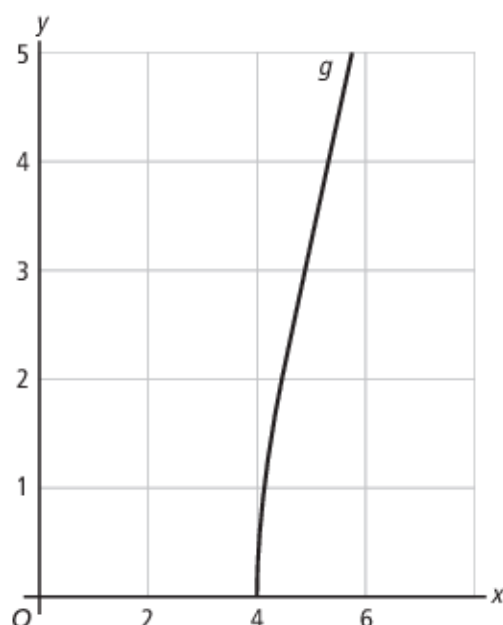
- f** Het domein van  $m$  is  $\langle \leftarrow, -2 \rangle$  en  $[0, \rightarrow)$ .

Als  $x \rightarrow \infty$  of  $x \rightarrow -\infty$  dan  $m(x) = \sqrt{\frac{4x}{x+2}} = \sqrt{\frac{4}{1 + \frac{2}{x}}} \rightarrow \sqrt{\frac{4}{1+0}} = 2$

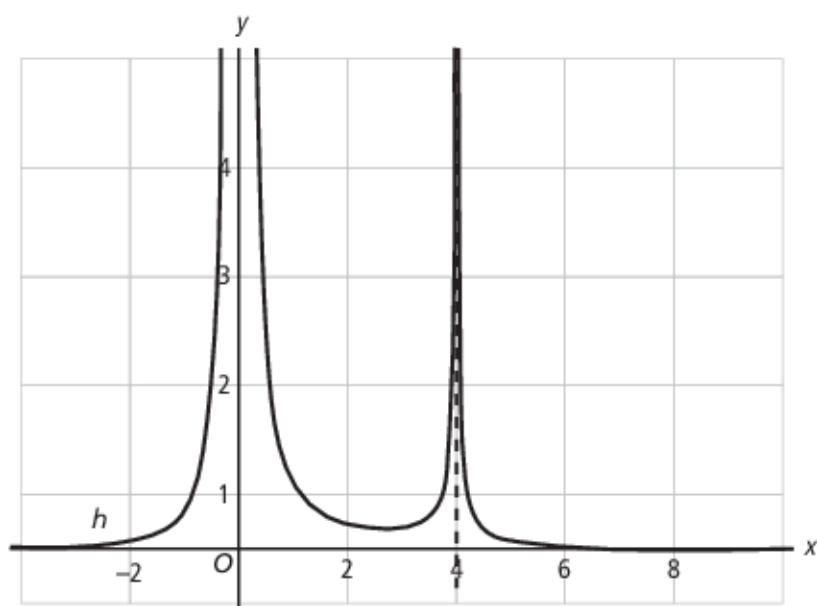
De lijn  $y = 2$  is een horizontale asymptoot.

Uit  $x+2=0$  volgt dat  $x=-2$  een verticale asymptoot is.

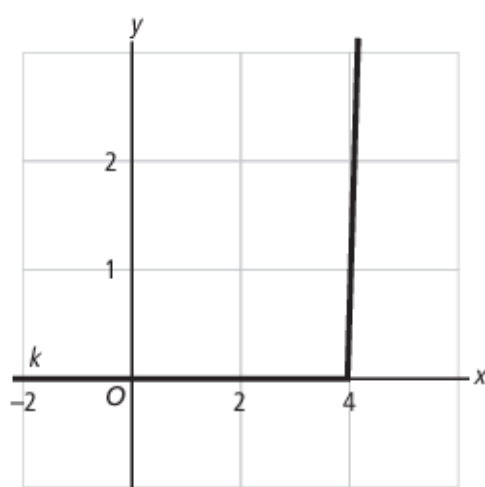
- T-4a** De grafiek van  $y = -f(x)$  krijg je door de grafiek van  $f$  in de  $x$ -as te spiegelen.  
 Het domein van  $g$  is  $(0, 0)$  en  $[4, \rightarrow)$ .  
 Op dit interval pas je op  $y = -f(x)$  de bewerking  $\sqrt{\dots}$  toe.



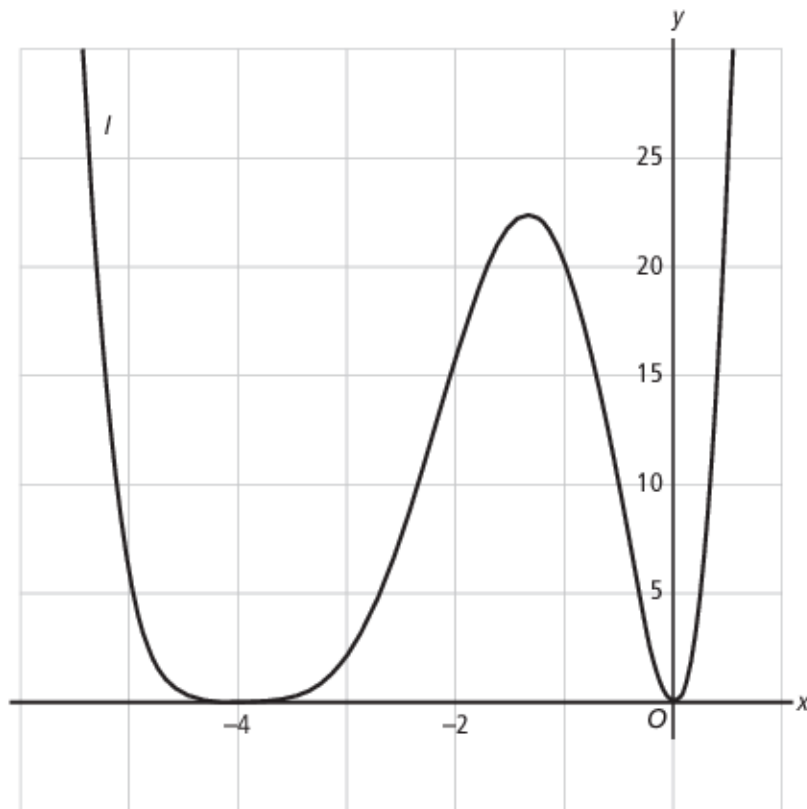
- b** De grafiek van  $|f(x)|$  krijg je door het deel van de grafiek van  $f$  onder de  $x$ -as te spiegelen in de  $x$ -as.  
 Het domein van  $h$  is  $\langle \leftarrow, 0 \rangle$ ,  $\langle 0, 4 \rangle$  en  $[4, \rightarrow)$ .  
 Op dit interval pas je op  $y = |f(x)|$  de bewerking  $\frac{1}{\dots}$  toe.  
 Als  $x \rightarrow \infty$  of  $x \rightarrow -\infty$  dan  $|f(x)| \rightarrow \infty$  dus  $h(x) \downarrow 0$ .  
 $y = 0$  is een verticale asymptoot.  
 $f(x) = 0$  geeft  $x = 0$  of  $x = 4$ .  
 $x = 0$  en  $x = 4$  zijn verticale asymptoten.



- c**  $k(x) = 0$  als  $f(x) \geq 0$  dus als  $x \leq 4$ .  
 $k(x) = -2 \cdot f(x)$  als  $f(x) < 0$  dus als  $x > 4$ .



- d De grafiek van  $f(x+4)$  krijg je door de grafiek van  $f$  vier naar links te schuiven. Daarna pas je op  $f(x+4)$  de bewerking  $\dots^2$  toe.



Pagina 153:

**T-5a**  $f_a'(0) = 0 \cdot e^{a \cdot 0} = 0$

De grafieken van al deze functies gaan door het punt  $(0, 0)$ .

$$f_a'(x) = 1 \cdot e^{ax} + x \cdot e^{ax} \cdot a = e^{ax} + ax \cdot e^{ax}$$

$$f_a'(0) = e^{a \cdot 0} + a \cdot 0 \cdot e^{a \cdot 0} = 1$$

De grafieken van al deze functies hebben in het punt  $(0, 0)$  dezelfde helling.

Dus de grafieken van al deze functies raken elkaar in het punt  $(0, 0)$ .

- b** Er moet gelden  $f'(x) = 0$ .

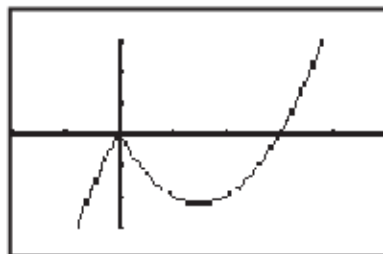
$$e^{ax} + ax \cdot e^{ax} = 0$$

$$e^{ax}(1 + ax) = 0$$

$$1 + ax = 0 \text{ ofwel } ax = -1$$

Voor de toppen geldt  $ax = -1$ , dus de toppen liggen op de lijn  $y = x \cdot e^{-1} = \frac{x}{e}$

**T-6a**



Als  $x \geq 0$  dan  $f(x) = x \cdot (x - 3) = x^2 - 3x$  en  $f'(x) = 2x - 3$ .

$f(0) = 0$  is een maximum.

$$2x - 3 = 0 \text{ geeft } x = 1\frac{1}{2}.$$

$f(1\frac{1}{2}) = -2\frac{1}{4}$  is een minimum.

Als  $x < 0$  dan  $f(x) = -x \cdot (x - 3) = -x^2 + 3x$  en  $f'(x) = -2x + 3$ .

$-2x + 3 = 0$  geeft  $x = 1\frac{1}{2}$  en deze oplossing voldoet niet.

Er is dus geen extreme waarde als  $x < 0$ .

- b** Er moet gelden  $f(x) = g(x)$ .

Eerst voor  $x \geq 0$  de vergelijking oplossen.

$$x(x-3) = px$$

$$x = 0 \text{ of } x - 3 = p$$

$$x = 0 \text{ of } x = p + 3$$

Als  $x \geq 0$  zijn er twee oplossingen als  $p + 3 > 0$ , dus als  $p > -3$  en is er één oplossing als  $p \leq -3$ .

Dan voor  $x < 0$  de vergelijking oplossen.

$$-x(x-3) = px$$

$$x - 3 = -p \quad (x = 0 \text{ voldoet niet})$$

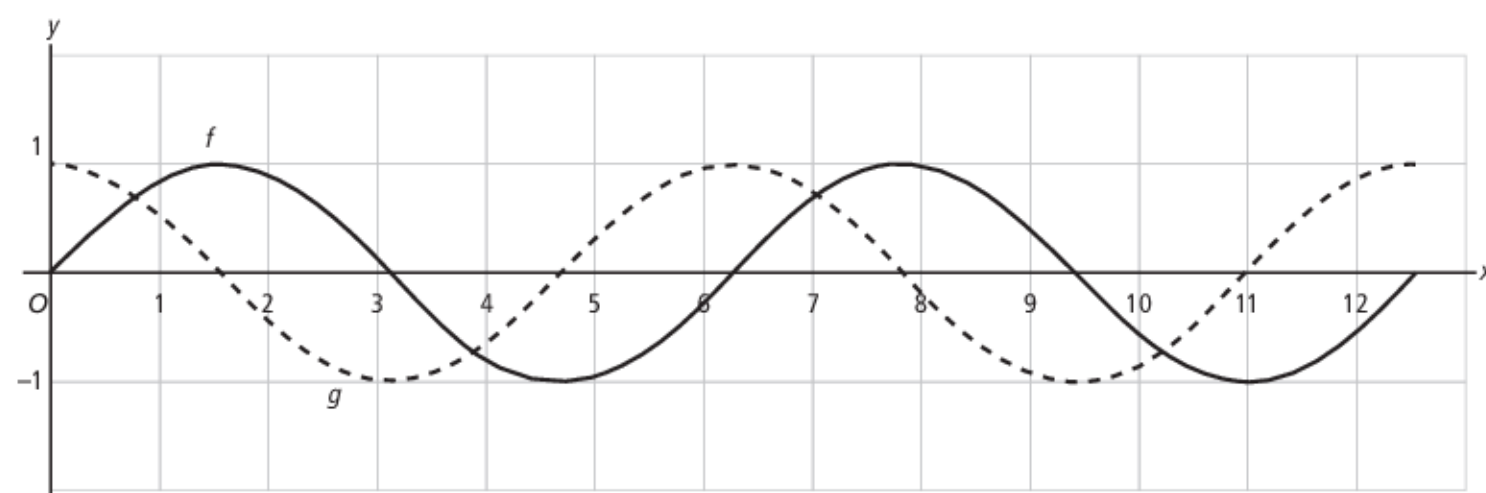
$$x = 3 - p$$

Als  $x < 0$  is er één oplossing als  $3 - p < 0$  dus als  $p > 3$  en is er geen oplossing als  $p \leq 3$ .

Conclusie: de grafiek van een functie  $g_p(x) = px$  heeft precies twee punten gemeenschappelijk met de grafiek van  $f$  als  $-3 < p < 3$ .

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \int_{-2}^4 f(x) dx &= \int_{-2}^0 (-x^2 + 3x) dx + \int_0^4 (x^2 - 3x) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^4 = -(2\frac{2}{3} + 6) + 21\frac{1}{3} - 24 = -11\frac{1}{3} \end{aligned}$$

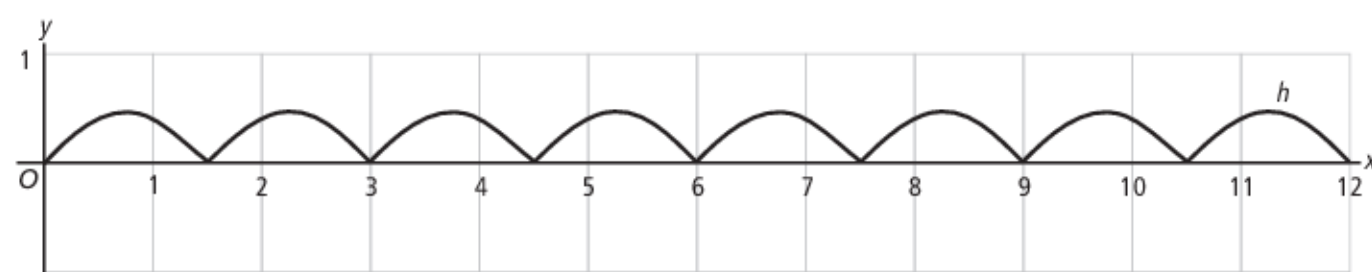
T-7a



$$\text{b} \quad h(x) = |\sin(x)| \cdot |\cos(x)|$$

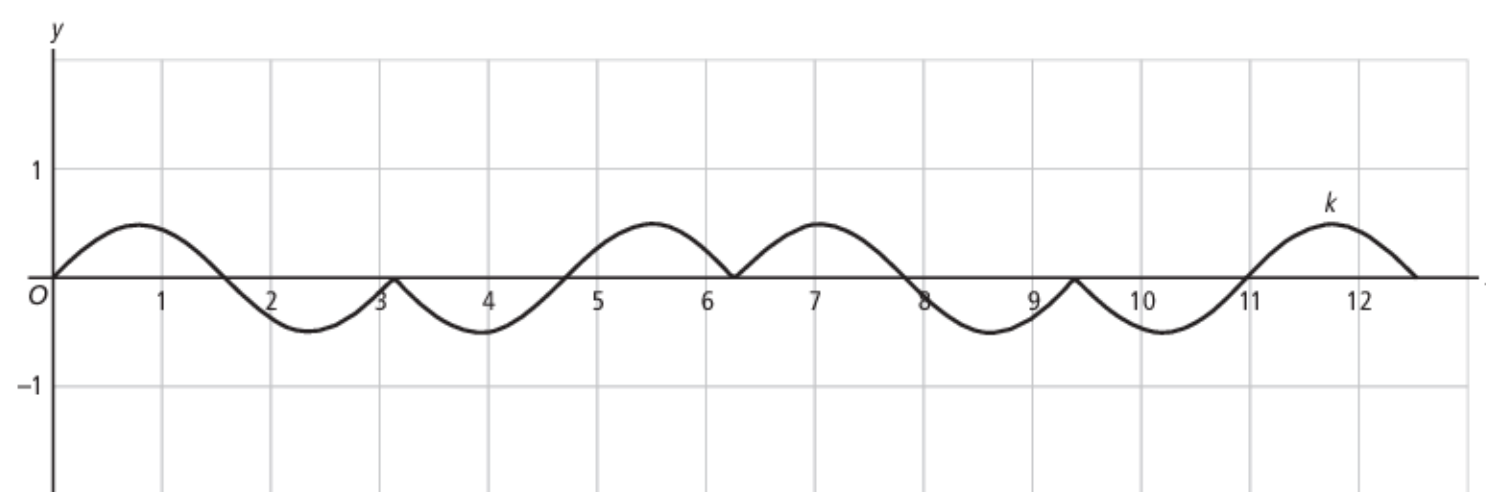
Nulpunten als  $\sin(x) = 0$  of  $\cos(x) = 0$ .

Maxima  $\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}$  als  $\sin(x) = \cos(x)$ .



$$k(x) = |\sin(x)| \cdot \cos(x)$$

Op de intervallen waar  $\cos(x) < 0$  wordt de grafiek van  $h$  gespiegeld in de  $x$ -as.





**T-8a** Er moet gelden  $f_2'(x) = 0$

$$f_2(x) = \frac{1 - 2\cos(x)}{2 + \cos(x)}$$

$$f_2'(x) = \frac{2\sin(x) \cdot (2 + \cos(x)) - (-\sin(x) \cdot (1 - 2\cos(x)))}{(2 + \cos(x))^2}$$

$$f_2'(x) = \frac{4\sin(x) + 2\sin(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) - 2\sin(x) \cdot \cos(x)}{(2 + \cos(x))^2}$$

$$f_2'(x) = \frac{5\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$$

$$\frac{5\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2} = 0$$

$$5\sin(x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \pi \text{ of } x = 2\pi$$

$$\text{De uiterste waarden zijn } f_2(0) = \frac{1-2}{2+1} = -\frac{1}{3}, f_2(\pi) = \frac{1+2}{2-1} = 3 \text{ en } f_2(2\pi) = -\frac{1}{3}.$$

- b** Alle punten van de grafiek van  $f_a$  liggen op één horizontale lijn, betekent dat er een getal  $c$  is zodat  $\frac{1 - 2\cos(x)}{a + \cos(x)} = c$ .

$$\text{Hieruit volgt } 1 - 2\cos(x) = c(a + \cos(x)).$$

$$1 - 2\cos(x) = ca + c \cdot \cos(x)$$

$$\text{Dus } c = -2 \text{ en } a = -\frac{1}{2}.$$

Voor  $a = -\frac{1}{2}$  liggen alle punten van de grafiek van  $f_a$  op één horizontale lijn.

**c** 
$$f_a'(x) = \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot (a + \cos(x)) - (1 - 2\cos(x)) \cdot (-\sin(x))}{(a + \cos(x))^2}$$

$$f_a'(x) = \frac{2a\sin(x) + 2\sin(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) - 2\sin(x) \cdot \cos(x)}{(a + \cos(x))^2}$$

$$f_a'(x) = \frac{(2a + 1) \sin(x)}{(a + \cos(x))^2}$$

$$\frac{(2a + 1) \sin(x)}{(a + \cos(x))^2} = 0 \text{ geeft } x = 0 \text{ of } x = \pi \text{ of } x = 2\pi.$$

$$f_a(0) = f_a(2\pi) = \frac{1-2}{a+1} = -\frac{1}{a+1}$$

$$-\frac{1}{a+1} = 1 \text{ geeft } a+1 = -1, \text{ dus } a = -2$$

$$f_a(\pi) = \frac{1+2}{a-1} = \frac{3}{a-1}$$

$$\frac{3}{a-1} = 1 \text{ geeft } a-1 = 3, \text{ dus } a = 4$$

Voor  $a = -2$  en  $a = 4$  heeft  $f_a(x)$  een uiterste waarde gelijk aan 1.

**T-9a** Voor elk waarde van  $x$  geldt  $x^2 \geq 0$ .

Als  $p \leq 0$  dan geldt voor elke waarde van  $x$

$$x^2 - p \geq 0 \text{ en } px^2 \leq 0 \text{ dus } px^2 - 1 \leq -1.$$

Voor elke waarde van  $x$  is dan  $\frac{x^2 - p}{px^2 - 1} \leq 0$ , dus  $f_p(x)$  is dan voor geen enkele waarde van  $x$  gedefinieerd.

**b**  $\frac{x^2 - p}{px^2 - 1} > 0$

Een breuk heeft een positieve uitkomst als de teller en de noemer allebei positief zijn of allebei negatief zijn.

$$x^2 - p > 0 \text{ en } px^2 - 1 > 0 \text{ en } p > 0 \text{ geeft } x > \sqrt{p} \text{ en } x < -\sqrt{p} \text{ en } x > \sqrt{\frac{1}{p}} \text{ en } x < -\sqrt{\frac{1}{p}}.$$

$$x^2 - p < 0 \text{ en } px^2 - 1 < 0 \text{ en } p > 0 \text{ geeft } -\sqrt{p} < x < \sqrt{p} \text{ en } -\sqrt{\frac{1}{p}} < x < \sqrt{\frac{1}{p}}.$$

Als  $0 < p \leq 1$  dan  $\sqrt{p} \leq \sqrt{\frac{1}{p}}$  en het domein van  $f_p$  is dan

$$\left\langle \leftarrow, -\sqrt{\frac{1}{p}} \right\rangle, \langle -\sqrt{p}, \sqrt{p} \rangle \text{ en } \left\langle \sqrt{\frac{1}{p}}, \rightarrow \right\rangle.$$

Als  $p > 1$  dan  $\sqrt{\frac{1}{p}} < \sqrt{p}$  en het domein van  $f_p$  is dan

$$\langle \leftarrow, -\sqrt{p} \rangle, \left\langle -\sqrt{\frac{1}{p}}, \sqrt{\frac{1}{p}} \right\rangle \text{ en } \langle \sqrt{p}, \rightarrow \rangle.$$

**c** Merk op:  $f_1(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}\right) = \ln(1) = 0$ .

De grafiek van  $f_1$  heeft geen asymptoten.

In het vervolg is  $p \neq 1$ .

$$\text{Als } x \rightarrow \infty \text{ of } x \rightarrow -\infty \text{ dan } f_p(x) = \ln\left(\frac{1 - \frac{p}{x^2}}{p - \frac{1}{x^2}}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{1}{p}\right).$$

$y = \ln\left(\frac{1}{p}\right)$  is een horizontale asymptoot van de grafiek van  $f_p$ .

$$\frac{x^2 - p}{px^2 - 1} = 0 \text{ en } p > 0 \text{ geeft } x = \sqrt{p} \text{ of } x = -\sqrt{p}.$$

$x = \sqrt{p}$  en  $x = -\sqrt{p}$  zijn verticale asymptoten van de grafiek van  $f_p$ .

$$px^2 - 1 = 0 \text{ en } p > 0 \text{ geeft } x = \sqrt{\frac{1}{p}} \text{ of } x = -\sqrt{\frac{1}{p}}.$$

$x = \sqrt{\frac{1}{p}}$  en  $x = -\sqrt{\frac{1}{p}}$  zijn verticale asymptoten van de grafiek van  $f_p$ .

**d** 
$$f_p\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - p}{p\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{px^2}{x^2}}{\frac{p}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1 - px^2}{x^2}}{\frac{p - x^2}{x^2}}\right) = \ln\left(\frac{1 - px^2}{p - x^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{px^2 - 1}{x^2 - p}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{x^2 - p}{px^2 - 1}}\right) = \ln(1) - \ln\left(\frac{x^2 - p}{px^2 - 1}\right) = -\ln\left(\frac{x^2 - p}{px^2 - 1}\right) = -f_p(x)$$

# Vaardigheden 3

## Pagina 156:

- 1a** Amplitude 3; evenwichtsstand  $y = 1$ ; periode is  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ; een horizontale verschuiving is  $\frac{1}{6}\pi$ .
- b** Amplitude 7; evenwichtsstand  $y = 5$ ; periode is  $2\pi$ ; een horizontale verschuiving is  $-\frac{1}{2}\pi$ .
- c** Amplitude 4; evenwichtsstand  $y = 0$ ; periode is  $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ ;  
 $h(x) = 4\sin(3x - \frac{1}{4}\pi) = 4\sin(3(x - \frac{1}{12}\pi))$ , dus een horizontale verschuiving is  $\frac{1}{12}\pi$ .
- d** Amplitude  $\frac{1}{2}$ ; evenwichtsstand  $y = 0$ ; periode is  $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$ ;  
 $j(x) = \frac{1}{2}\sin(4x - 5) = \frac{1}{2}\sin(4(x - \frac{5}{4}))$ , dus een horizontale verschuiving is  $1\frac{1}{4}$ .
- 2** Bij de eerste grafiek is de amplitude  $a = 3$  en de evenwichtsstand  $d = 2$ .  
De periode is  $2\pi$ , dus  $b = 1$ . De verschuiving naar rechts is  $\frac{1}{2}\pi$ .  
Een voorschrift is  $f(x) = 2 + 3 \cdot \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$ .  
Bij de middelste grafiek is de amplitude  $a = 2\frac{1}{2}$  en de evenwichtsstand  $d = -\frac{1}{2}$ .  
Er gaan drie perioden in  $2\pi$ , dus één periode is  $\frac{2}{3}\pi$ . Dan is  $b = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$ .  
Er is geen verschuiving naar rechts. Een voorschrift is  $f(x) = -\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} \cdot \sin(3x)$ .  
Bij de rechtse grafiek is de amplitude  $a = 2$  en de evenwichtsstand  $d = 0$ .  
Er gaan drie perioden in 2, dus één periode is  $\frac{2}{3}$ . Dan is  $b = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$ .  
De verschuiving naar rechts is  $\frac{1}{2}$ . Een voorschrift is  $f(x) = 2 \cdot \sin(3\pi(x - \frac{1}{2}))$ .
- 3a**  $\sin(x) = -\frac{1}{2}$   
 $x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$   
Op het gegeven interval zijn de oplossingen  $x = -\frac{5}{6}\pi, x = -\frac{1}{6}\pi, x = 1\frac{1}{6}\pi$  of  $x = 1\frac{5}{6}\pi$ .
- b**  $\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$   
 $2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $2x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$  of  $x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \pi$   
Op het gegeven interval zijn de oplossingen  
 $x = \frac{1}{8}\pi, x = \frac{3}{8}\pi, x = 1\frac{1}{8}\pi, x = 1\frac{3}{8}\pi, x = 2\frac{1}{8}\pi$  of  $x = 2\frac{3}{8}\pi$ .
- c**  $\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$   
 $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$   
Op het gegeven interval zijn de oplossingen  $x = \frac{1}{6}\pi$  of  $x = \frac{1}{2}\pi$ .
- d**  $\tan(2x) = -\sqrt{3}$   
 $2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$   
 $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$   
Op het gegeven interval zijn de oplossingen  $x = -\frac{2}{3}\pi, x = -\frac{1}{6}\pi, x = \frac{1}{3}\pi$  of  $x = \frac{5}{6}\pi$ .

## Pagina 157:

- 4a**  $2\sin(x) = \sqrt{3}$   
 $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$   
 $x = \frac{1}{3}\pi$  of  $x = \frac{2}{3}\pi$
- b**  $3\tan^2(x) = 1$   
 $\tan^2(x) = \frac{1}{3}$   
 $\tan(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$  of  $\tan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$   
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$  of  $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$   
 $x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{5}{6}\pi, x = \frac{1}{6}\pi$  of  $x = \frac{5}{6}\pi$
- c**  $2\cos^2(x) + 5\cos(x) - 3 = 0$   
 Stel  $\cos(x) = a$ .  
 $2a^2 + 5a - 3 = 0$   
 $a^2 + 2\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{2} = 0$   
 $(a+3)(a-\frac{1}{2}) = 0$   
 $a = -3$  of  $a = \frac{1}{2}$   
 $\cos(x) = -3$  geeft geen oplossing en  $\cos(x) = \frac{1}{2}$  geldt voor  $x = \frac{1}{3}\pi$  en  $x = \frac{2}{3}\pi$ .  
 De oplossing is  $x = \frac{1}{3}\pi$  of  $x = \frac{2}{3}\pi$ .
- d**  $\cos(2x) = \cos(\frac{1}{7}\pi)$   
 $2x = \frac{1}{7}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $2x = -\frac{1}{7}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{14}\pi + k \cdot \pi$  of  $x = -\frac{1}{14}\pi + k \cdot \pi$   
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = \frac{1}{14}\pi, x = \frac{13}{14}\pi, x = \frac{1}{14}\pi$  of  $x = \frac{13}{14}\pi$ .
- e**  $2\sin^2(x) = \cos(x) + 1$   
 $2(1 - \cos^2(x)) = \cos(x) + 1$   
 $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$   
 Stel  $\cos(x) = a$ .  
 $2a^2 + a - 1 = 0$   
 $a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = 0$   
 $(a+1)(a-\frac{1}{2}) = 0$   
 $a = -1$  of  $a = \frac{1}{2}$   
 $\cos(x) = -1$  of  $\cos(x) = \frac{1}{2}$   
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = \frac{1}{3}\pi, x = \pi$  of  $x = \frac{2}{3}\pi$ .
- f**  $(1 + \cos(x))^2 = (2 + \sin(x))(2 - \sin(x))$   
 $1 + 2\cos(x) + \cos^2(x) = 4 - \sin^2(x)$   
 $\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 4 - (1 - \cos^2(x))$   
 $\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 3 + \cos^2(x)$   
 $2\cos(x) = 2$ , dus  $\cos(x) = 1$   
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = 0$  of  $x = 2\pi$ .
- 5a**  $\sin(2x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$   
 $2x = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $2x = \pi - (x + \frac{1}{3}\pi) + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$   
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = \frac{2}{9}\pi, x = \frac{1}{3}\pi, x = \frac{8}{9}\pi$  of  $x = \frac{5}{9}\pi$ .
- b**  $\sin(x - \frac{1}{6}\pi) = \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$   
 $x - \frac{1}{6}\pi = x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x - \frac{1}{6}\pi = \pi - (x + \frac{1}{4}\pi) + k \cdot 2\pi$   
 Het eerste deel geeft geen oplossing.  
 Voor het tweede deel geldt  $2x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ . Dan is  $x = \frac{11}{24}\pi + k \cdot \pi$   
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = \frac{11}{24}\pi, x = \frac{11}{24}\pi$  of  $x = \frac{23}{24}\pi$ .



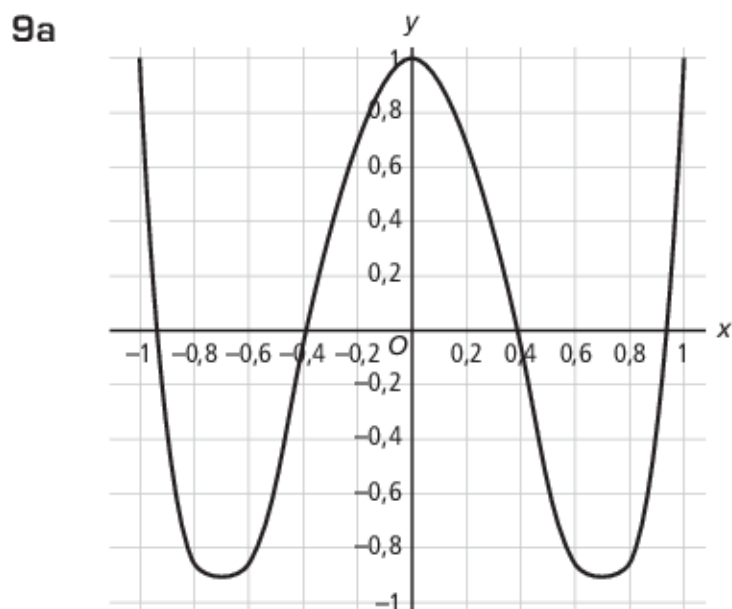
- c**  $\cos(2x) = \cos(x + \frac{1}{6}\pi)$   
 $2x = x + \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $2x = -(x + \frac{1}{6}\pi) + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $3x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = -\frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$   
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{11}{18}\pi, x = 1\frac{5}{18}\pi$  of  $x = 1\frac{17}{18}\pi$ .
- d**  $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$   
 $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \cos(\frac{1}{2}\pi - (x + \frac{1}{4}\pi))$   
 $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi - x)$   
 $x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4}\pi - x + k \cdot 2\pi$  of  $x - \frac{1}{6}\pi = -(\frac{1}{4}\pi - x) + k \cdot 2\pi$   
 $2x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ , dus  $x = \frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi$   
 Het tweede deel geeft geen oplossing.  
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = -\frac{19}{24}\pi$  of  $x = \frac{5}{24}\pi$ .
- e**  $\sin(2x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$   
 $\sin(2x + \frac{1}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi - (x - \frac{1}{3}\pi))$   
 $\sin(2x + \frac{1}{4}\pi) = \sin(-x + \frac{5}{6}\pi)$   
 $2x + \frac{1}{4}\pi = -x + \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $2x + \frac{1}{4}\pi = \pi - (-x + \frac{5}{6}\pi) + k \cdot 2\pi$   
 $3x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = -1\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{7}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$  of  $x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$   
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = \frac{7}{36}\pi$  of  $x = \frac{31}{36}\pi$ .
- f**  $\tan(3x) = \tan(x + \frac{1}{2}\pi)$   
 $3x = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$   
 $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$   
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$   
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{3}{4}\pi, x = 1\frac{1}{4}\pi, x = 1\frac{3}{4}\pi, x = 2\frac{1}{4}\pi$  of  $x = 2\frac{3}{4}\pi$ .
- 6a**  $\sin(2x) = \sqrt{3}\cos(x)$   
 $2\sin(x) \cdot \cos(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x)$   
 $\cos(x) = 0$  of  $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$   
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = \frac{1}{3}\pi, x = \frac{1}{2}\pi, x = \frac{2}{3}\pi$  of  $x = 1\frac{1}{2}\pi$
- b**  $\cos(2x) = 5\cos(x) + 2$   
 $2\cos^2(x) - 1 = 5\cos(x) + 2$   
 $2\cos^2(x) - 5\cos(x) - 3 = 0$   
 Stel  $\cos(x) = a$ .  
 $2(a^2 - 2\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{2}) = 0$   
 $2(a - 3)(a + \frac{1}{2}) = 0$   
 $a = 3$  of  $a = -\frac{1}{2}$   
 $\cos(x) = 3$  heeft geen oplossing.  
 $\cos(x) = -\frac{1}{2}$  geldt op het gegeven interval voor  $x = \frac{2}{3}\pi$  of  $x = 1\frac{1}{3}\pi$ .
- c**  $\cos(2x) = 2 - 3\sin(x)$   
 $1 - 2\sin^2(x) = 2 - 3\sin(x)$   
 $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$   
 Stel  $\sin(x) = a$ .  
 $2(a^2 - 1\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}) = 0$   
 $2(a - 1)(a - \frac{1}{2}) = 0$   
 $a = 1$  of  $a = \frac{1}{2}$   
 $\sin(x) = 1$  voor  $x = \frac{1}{2}\pi$  en  $\sin(x) = \frac{1}{2}$  voor  $x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{5}{6}\pi$   
 De oplossing is  $x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{1}{2}\pi$  of  $x = \frac{5}{6}\pi$ .



- 7a**  $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$   
 $\sin^2(u) + (\frac{3}{5})^2 = 1$   
 $\sin^2(u) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$   
 Op het interval  $[0, \pi]$  is  $\sin(u) = \frac{4}{5}$ .
- b**  $\sin(t+u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u) = \frac{3}{5} \cdot \sin(t) + \frac{4}{5} \cdot \cos(t)$

**Pagina 158:**

- 8a** De periode van  $f(x)$  is  $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$  en de periode van  $g(x)$  is  $2\pi$ .  
 De gemeenschappelijke periode is dus  $6\pi$ .
- b**  $g(x) = \sin(x) + \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$   
 $g(x) = 2\sin\left(\frac{2x + \frac{1}{3}\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-\frac{1}{3}\pi}{2}\right)$   
 $g(x) = 2\sin(x + \frac{1}{6}\pi) \cdot \cos(-\frac{1}{6}\pi)$   
 $g(x) = \sqrt{3} \cdot \sin(x + \frac{1}{6}\pi)$
- c**  $\sqrt{3} \cdot \sin(\frac{2}{3}x) = \sqrt{3} \cdot \sin(x + \frac{1}{6}\pi)$   
 $\frac{2}{3}x = x + \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $\frac{2}{3}x = \pi - (x + \frac{1}{6}\pi) + k \cdot 2\pi$   
 $-\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $\frac{1}{3}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 6\pi$  of  $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$   
 Op het gegeven interval is de oplossing  $x = \frac{1}{2}\pi, x = 1\frac{7}{10}\pi$  of  $x = 2\frac{9}{10}\pi$ .



- b**  $y = \cos(4t) = 2\cos^2(t) - 1 =$   
 $2(1 - 2\sin^2(t))^2 - 1 =$   
 $2(1 - 4\sin^2(t) + 4\sin^4(t)) - 1 =$   
 $2(1 - 4x^2 + 4x^4) - 1 =$   
 $8x^4 - 8x^2 + 1$   
 Dan is  $a = 8$ ,  $b = -8$  en  $c = 1$ .
- 10a**  $f'(x) = 2\cos(2x) \cdot 2$   
 $f'(x) = 4\cos(2x)$
- b**  $g'(x) = -\sin(3x - \frac{1}{3}\pi) \cdot 3$   
 $g'(x) = -3\sin(3x - \frac{1}{3}\pi)$
- c**  $h'(x) = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x)$
- d**  $k'(x) = 3(1 - 2\tan(x))^2 \cdot \frac{-2}{\cos^2(x)}$   
 $k'(x) = -\frac{6(1 - 2\tan(x))^2}{\cos^2(x)}$
- e**  $m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin^2(x)}} \cdot -2\sin(x)\cos(x)$   
 $m'(x) = -\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{1 - \sin^2(x)}}$
- f**  $n'(x) = -\sin(\sqrt{1-x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot -1$   
 $n'(x) = \frac{\sin(\sqrt{1-x})}{2\sqrt{1-x}}$

$$11a \quad f'(x) = \cos(x - \frac{1}{3}\pi) \cdot \sin(2x + \frac{1}{4}\pi) + 2\sin(x - \frac{1}{3}\pi) \cdot \cos(2x + \frac{1}{4}\pi)$$

$$b \quad g(x) = \cos^{-1}(2x)$$

$$g'(x) = -\cos^{-2}(2x) \cdot -\sin(2x) \cdot 2$$

$$g'(x) = \frac{2\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$$

$$c \quad h'(x) = 2x \cdot \tan(3x) + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3$$

$$h'(x) = 2x \cdot \tan(3x) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x)}$$

$$d \quad k'(x) = \frac{\cos(x) \cdot (\cos(x) + 1) - (\sin(x) - 1) \cdot -\sin(x)}{(\cos(x) + 1)^2}$$

$$k'(x) = \frac{\cos^2(x) + \cos(x) + \sin^2(x) - \sin(x)}{(\cos(x) + 1)^2}$$

$$k'(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x) + 1}{(\cos(x) + 1)^2}$$

$$12a \quad 4\sin^2(x) - 8\sin(x) - 5 = 0$$

$$\text{Stel } \sin(x) = a.$$

$$4a^2 - 8a - 5 = 0$$

$$a = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot -5}}{8} = \frac{8 \pm 12}{8}$$

$$a = 2\frac{1}{2} \text{ of } a = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = 2\frac{1}{2} \text{ geeft geen oplossing.}$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \text{ geeft op het gegeven interval de oplossing } x = 1\frac{1}{6}\pi \text{ of } x = 1\frac{5}{6}\pi.$$

$$b \quad \text{Er moet gelden } f'(x) = 0.$$

$$f'(x) = 8\cos(x) \cdot \sin(x) - 8\cos(x) = 8\cos(x) \cdot (\sin(x) - 1)$$

$$8\cos(x) \cdot (\sin(x) - 1) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = 1$$

$$x = \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{2}\pi$$

$$f(\frac{1}{2}\pi) = 4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 5 = -9 \text{ is een minimum.}$$

$$f(1\frac{1}{2}\pi) = 4 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot -1 - 5 = 7 \text{ is een maximum.}$$

$$c \quad \text{Er moet gelden } f''(x) = 0.$$

$$f''(x) = -8\sin(x) \cdot (\sin(x) - 1) + 8\cos(x) \cdot \cos(x)$$

$$f''(x) = -8\sin^2(x) + 8\sin(x) + 8\cos^2(x)$$

$$f''(x) = -8\sin^2(x) + 8\sin(x) + 8(1 - \sin^2(x))$$

$$f''(x) = -16\sin^2(x) + 8\sin(x) + 8$$

$$-16\sin^2(x) + 8\sin(x) + 8 = 0$$

$$\sin^2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$$

$$(\sin(x) - 1)(\sin(x) + \frac{1}{2}) = 0$$

$$\sin(x) = 1 \text{ of } \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Op het gegeven interval is de oplossing } x = \frac{1}{2}\pi, x = 1\frac{1}{6}\pi \text{ of } x = 1\frac{5}{6}\pi.$$

$$\text{Voor } x = \frac{1}{2}\pi \text{ is er een minimum, dus geen buigpunt.}$$

$$f(1\frac{1}{6}\pi) = 4 \cdot (-\frac{1}{2})^2 - 8 \cdot -\frac{1}{2} - 5 = 0 \text{ en } f(1\frac{5}{6}\pi) = 4 \cdot (-\frac{1}{2})^2 - 8 \cdot -\frac{1}{2} - 5 = 0$$

$$\text{De coördinaten van de buigpunten zijn } (1\frac{1}{6}\pi, 0) \text{ en } (1\frac{5}{6}\pi, 0).$$

$$13a \quad f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$$

$$f(x) = 2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x)$$

$$f(x) = 2\sin(x) \cdot (\cos(x) - 1)$$

$$f(x) = 0 \text{ als } \sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 1$$

$$\text{Op het gegeven interval is de oplossing } x = -\pi, x = 0, x = \pi, x = 2\pi \text{ en } x = 3\pi.$$

- b** Er moet gelden  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x)$$

$$2\cos(2x) + 2\cos(x) = 0$$

$$\cos(2x) = \cos(x)$$

$$2x = x + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = -x + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 2\pi \text{ of } x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Op het gegeven interval is de oplossing

$$x = -\frac{2}{3}\pi, x = 0, x = \frac{2}{3}\pi, x = 1\frac{1}{3}\pi, x = 2\pi \text{ of } x = 2\frac{2}{3}\pi.$$

Dat geeft  $(-\frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{2}\sqrt{3})$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\frac{2}{3}\pi, -1\frac{1}{2}\sqrt{3})$ ,  $(1\frac{1}{3}\pi, 1\frac{1}{2}\sqrt{3})$ ,  $(2\pi, 0)$  en  $(2\frac{2}{3}\pi, -1\frac{1}{2}\sqrt{3})$ .

- c** Voor de buigpunten geldt  $f''(x) = 0$ .

$$f''(x) = 2\sin(x)(1 - 4\cos(x))$$

$$f''(x) = -4\sin(2x) + 2\sin(x)$$

$$f''(x) = -8\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)$$

$$2\sin(x)(1 - 4\cos(x)) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = \frac{1}{4}$$

Als  $\sin(x) = 0$  dan is  $\cos(x) = -1$  of  $\cos(x) = 1$ .

Voor de punten met  $\cos(x) = -1$  geldt  $f'(x) = 2(2\cos^2(x) - 1) - 2\cos(x) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ .

Voor de punten met  $\cos(x) = 1$  geldt  $f'(x) = 2(2\cos^2(x) - 1) - 2\cos(x) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$ .

Als  $\cos(x) = \frac{1}{4}$  geldt  $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 2 \cdot (\frac{1}{4})^2 - 1 = -\frac{7}{8}$ .

In deze punten geldt  $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x) = 2 \cdot -\frac{7}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} = -2\frac{1}{4}$ .

In de buigpunten kan de helling de waarden  $-2\frac{1}{4}$ ,  $0$  of  $4$  aannemen.

- 14a** De grafiek heeft een verticale asymptoten als  $\sin(x) - \cos(x) = 0$ .

$$\sin(x) = \cos(x)$$

$$\tan(x) = 1$$

$x = \frac{1}{4}\pi$  en  $x = 1\frac{1}{4}\pi$  zijn de vergelijkingen van de verticale asymptoten.

- b** Voor punten met een horizontale raaklijn geldt  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = \frac{(\cos(x) - \sin(x))(\sin(x) - \cos(x)) - (\sin(x) + \cos(x))(\cos(x) + \sin(x))}{(\sin(x) - \cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos^2(x) - \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) - (\sin^2(x) + \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x))}{(\sin(x) - \cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 + 2\sin(x)\cos(x) - 1 - 2\sin(x)\cos(x)}{(\sin(x) - \cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(\sin(x) - \cos(x))^2}$$

$f'(x) \neq 0$  voor elke waarde van het domein, dus heeft  $f(x)$  geen punten met een horizontale raaklijn.

**Pagina 159:**

- 15a**  $F(x) = -\frac{2}{3}\cos(3x) + c$

**b**  $G(x) = -\cos(x) + \sin(x) + c$

**c**  $h(x) = 2\cos^2(x) = (2\cos^2(x) - 1) + 1 = \cos(2x) + 1$

$$H(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + x + c$$

**d**  $k(x) = 6\sin(x)\cos(x) = 3\sin(2x)$

$$K(x) = -1\frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

**16a**  $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = 0 - -\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

**b**  $\int_0^{\pi} (x + \cos(2x)) dx = [\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\sin(2x)]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^2$

**c**  $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} (4\sin(3x) - 3\cos(4x)) dx = [-\frac{4}{3}\cos(3x) - \frac{3}{4}\sin(4x)]_0^{\frac{1}{3}\pi} = (\frac{4}{3} + \frac{3}{8}\sqrt{3}) - (-\frac{4}{3} - 0) = 2\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\sqrt{3}$

**d**  $\int_0^{2\pi} (1 + \sin(x))^2 dx = \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin(x) + \sin^2(x)) dx = \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin(x) - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2(x)) + \frac{1}{2}) dx =$   
 $\int_0^{2\pi} (1 + 2\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}) dx = [1\frac{1}{2}x - 2\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(2x)]_0^{2\pi} = (3\pi - 2) - -2 = 3\pi$

**17** De evenwichtsstand is  $y = 0$  en de nulpunten zijn  $x = \frac{1}{3}\pi$  en  $x = 1\frac{1}{3}\pi$ .

$$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{1}{3}\pi} (\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x)) dx = [-\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)]_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{1}{3}\pi} = (\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}) = 4$$

**18a**  $\int_0^{\pi} (\sin(x) - \sin^3(x)) dx$

**b**  $H'(x) = -3a \cdot \cos^2(x) \cdot \sin(x)$   
 $H'(x) = -3a(1 - \sin^2(x)) \cdot \sin(x)$   
 $H'(x) = -3a \cdot \sin(x) + 3a\sin^3(x)$   
 $H'(x) = f(x) - g(x)$  voor  $a = -\frac{1}{3}$

**c**  $\int_0^{\pi} (\sin(x) - \sin^3(x)) dx = [-\frac{1}{3}\cos^3(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{3} - -\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

**d**  $g(x) = \sin^3(x) = \sin^2(x) \cdot \sin(x) = (1 - \cos^2(x)) \cdot \sin(x) = \sin(x) - \cos^2(x) \cdot \sin(x)$   
 Een primitieve is  $G(x) = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + c$ .

**19a** De nulpunten zijn te vinden bij  $\sin(x) = 0$  of  $\cos(2x) = 0$ .

Op het gegeven interval is de oplossing  $x = 0, x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{3}{4}\pi, x = \pi, x = 1\frac{1}{4}\pi, x = 1\frac{3}{4}\pi, x = 2\pi$ .

**b** De grafiek is puntsymmetrisch in punt  $(\pi, 0)$ .

Te bewijzen:  $-f(\pi + x) = f(\pi - x)$ .

$$-f(\pi + x) = -\sin(\pi + x) \cdot \cos(2\pi + 2x) = \sin(x) \cdot \cos(2x) =$$

$$\sin(\pi - x) \cdot \cos(2\pi - 2x) = f(\pi - x)$$

**c**  $f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(2x) - 2\sin(x) \cdot \sin(2x)$   
 $f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(2x) - 2\sin(x) \cdot 2\sin(x) \cdot \cos(x)$   
 $f'(x) = \cos(x) \cdot (\cos(2x) - 4\sin^2(x))$   
 $f'(x) = \cos(x) \cdot (1 - 2\sin^2(x) - 4\sin^2(x))$   
 $f'(x) = \cos(x) \cdot (1 - 6\sin^2(x))$

**d** Er moet gelden  $f'(x) = 0$   
 $\cos(x) \cdot (1 - 6\sin^2(x)) = 0$   
 $\cos(x) = 0$  of  $\sin^2(x) = \frac{1}{6}$   
 $\cos(x) = 0, \sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{6}}$  of  $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}$



Het eerste deel van de oplossing uitwerken:

$$\cos(x) = 0 \text{ voor } x = \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{2}\pi$$

$$f(\frac{1}{2}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(\pi) = 1 \cdot -1 = -1$$

$$f(1\frac{1}{2}\pi) = \sin(1\frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(3\pi) = -1 \cdot -1 = 1$$

Het tweede deel van de oplossing uitwerken:

$$\text{Voor } \sin(x) = -\frac{1}{6}\sqrt{6} \text{ of } \sin(x) = \frac{1}{6}\sqrt{6} \text{ geldt } \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(2x) = -\frac{1}{6}\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}\sqrt{6} \text{ of } f(x) = \sin(x) \cdot \cos(2x) = \frac{1}{6}\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}\sqrt{6}.$$

De minima zijn dus  $-1$  en  $-\frac{1}{9}\sqrt{6}$  en de maxima zijn dus  $1$  en  $\frac{1}{9}\sqrt{6}$ .

- e Bij opdracht b is bewezen dat de grafiek puntsymmetrisch is in punt  $(\pi, 0)$ .

Dat betekent dat de ingesloten gebieden boven en onder de  $x$ -as gelijk zijn.

De oppervlakte is dus  $0$ .

- f  $F'(x) = 3a\cos^2(x) \cdot -\sin x + 2b\cos(x) \cdot -\sin(x) - c\sin(x)$

$$F'(x) = \sin x \cdot (-3a \cdot \cos^2(x) - 2b \cdot \cos(x) - c)$$

$$\text{Omdat } F'(x) = f(x) \text{ geldt } -3a \cdot \cos^2(x) - 2b \cdot \cos(x) - c = \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1.$$

Hieruit volgt  $a = -\frac{2}{3}$ ,  $b = 0$  en  $c = 1$ .

- g  $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} f(x) dx = \left[ -\frac{2}{3}\cos^3(x) + \cos(x) \right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} = (-\frac{1}{3}\sqrt{2}) - (\frac{1}{3}\sqrt{2}) = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$

## Extra oefening – Basis

Pagina 160:

B-1a  $2\sin(t) \cdot \cos(t) = \frac{1}{2}$

$$\sin(2t) = \frac{1}{2}$$

$$2t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \text{ of } t = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$$

Op het gegeven interval is de oplossing  $t = \frac{1}{12}\pi$ ,  $t = \frac{5}{12}\pi$ ,  $t = 1\frac{1}{12}\pi$  of  $t = 1\frac{5}{12}\pi$ .

b  $2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 1$

$$2\cos(2t) = 1$$

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}$$

$$2t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2t = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ of } t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$$

Op het gegeven interval is de oplossing  $t = \frac{1}{6}\pi$ ,  $t = \frac{5}{6}\pi$ ,  $t = 1\frac{1}{6}\pi$  of  $t = 1\frac{5}{6}\pi$ .

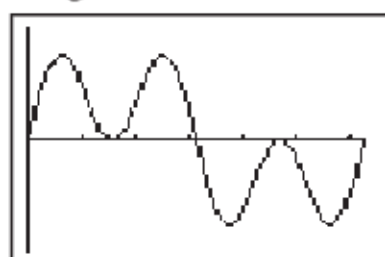
B-2a  $\sin^3(x) = \sin(x) \cdot \sin^2(x) = \sin(x)(1 - \cos^2(x)) = \sin(x) - \sin(x) \cdot \cos^2(x)$

b  $F'(x) = \sin(x) + 3 \cdot \frac{1}{3}\cos^2(x) \cdot -\sin(x) = \sin(x) - \sin(x) \cdot \cos^2(x) = f(x)$

(zie opdracht a).

c  $\int_0^{\pi} \sin^3(x) dx = \left[ -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) \right]_0^{\pi} = (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) = 1\frac{1}{3}$

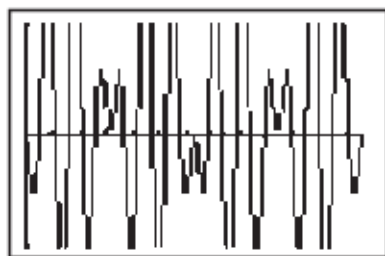
B-3a De grafieken vallen samen.



b  $f(x) = \sin(x) - \sin^3(x) = \sin(x)(1 - \sin^2(x)) = \sin(x) \cdot \cos^2(x) = g(x)$



**B-4a** De grafiek heeft 25 nulpunten.



**b**  $f(x) = \cos(7x) - \cos(5x) = -2\sin\left(\frac{7x+5x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{7x-5x}{2}\right) = -2\sin(6x) \cdot \sin(x)$

**c** Er moet gelden  $f(x) = 0$ .

$$\sin(6x) = 0 \text{ of } \sin(x) = 0$$

$$6x = k \cdot \pi \text{ of } x = k \cdot \pi$$

$$x = k \cdot \frac{1}{6}\pi \text{ of } x = k \cdot \pi$$

De nulpunten op het gegeven interval zijn

$$x = 0, x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{1}{3}\pi, x = \frac{1}{2}\pi, x = \frac{2}{3}\pi, x = \frac{5}{6}\pi \text{ en } x = \pi.$$

**d**  $\cos(7x) - \cos(5x) = 0$

$$\cos(7x) = \cos(5x)$$

$$7x = 5x + k \cdot 2\pi \text{ of } 7x = -5x + k \cdot 2\pi$$

$$2x = k \cdot 2\pi \text{ of } 12x = k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot \pi \text{ of } x = k \cdot \frac{1}{6}\pi$$

Dit geeft inderdaad dezelfde antwoorden.

**B-5**  $4 - \frac{1}{4}y^2 = 4 - \frac{1}{4}(4\cos(t))^2 = 4 - \frac{1}{4} \cdot 16\cos^2(t) = 4 - 4\cos^2(t) = 4 - 4(1 - \sin^2(t)) = 4\sin^2(t) = x$

**Pagina 161:**

**B-6a**  $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$

$$f'(x) = 0 \text{ voor } e^x = 0 \text{ (geen oplossing) of } e^x = 2, \text{ dus } x = \ln(2).$$

$$\text{Er is een minimum } f(\ln(2)) = 4 - 8 = -4.$$

**b**  $g'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln(x) - 1)$

$$g'(x) = 0 \text{ voor } \ln(x) = 1, \text{ dus } x = e.$$

$$\text{Er is een minimum } g(e) = 1 - 2 = -1.$$

**c**  $h'(x) = 2x\sqrt{9-x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot -2x$

$$h'(x) = 2x\sqrt{9-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$h'(x) = \frac{2x(9-x^2)}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$h'(x) = \frac{18x - 3x^3}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$h'(x) = 0 \text{ als } 18x - 3x^3 = 0$$

$$18x - 3x^3 = 0$$

$$x(18 - 3x^2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 18 = 3x^2$$

$$x = 0, x = -\sqrt{6} \text{ of } x = \sqrt{6}$$

$$h(0) = 0 \text{ is een minimum.}$$

$$h(-\sqrt{6}) = h(\sqrt{6}) = 6\sqrt{3} \text{ zijn maxima.}$$

- d**  $k'(x) = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x) + 6\sin(x) \cdot \cos(x) = 3\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot (\sin(x) + 2)$   
 $k'(x) = 0$  voor  $\sin(x) = 0$  of  $\cos(x) = 0$ .  
 Dit geldt voor  $x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$ .  
 $k(0) = k(\pi) = k(2\pi) = 0$  zijn minima.  
 $k(\frac{1}{2}\pi) = 4$  en  $k(1\frac{1}{2}\pi) = 2$  zijn maxima.

**B-7** Er moet gelden  $f''(x) = 0$ .

$$f'(x) = 4 \cdot e^{-x} - 4x \cdot e^{-x} = 4e^{-x}(1 - x)$$

$$f''(x) = -4e^{-x} \cdot (1 - x) + 4e^{-x} \cdot -1$$

$$f''(x) = -8e^{-x} + 4xe^{-x}$$

$$f''(x) = 4e^{-x}(x - 2)$$

$$f''(x) = 0 \text{ voor } x = 2 \text{ en } f(2) = 8e^{-2}.$$

De coördinaten van het buigpunt zijn  $(2, 8e^{-2})$ .

Er moet gelden  $g''(x) = 0$ .

$$g'(x) = \frac{-6 \cdot 4e^{2x}}{(1 + 2e^{2x})^2} = \frac{-24e^{2x}}{(1 + 2e^{2x})^2}$$

$$g''(x) = \frac{-48e^{2x} \cdot (1 + 4e^{2x} + 4e^{4x}) + 24e^{2x} \cdot (8e^{2x} + 16e^{4x})}{(1 + 2e^{2x})^4}$$

$$g''(x) = \frac{-48e^{2x} - 192e^{4x} - 192e^{6x} + 192e^{4x} + 384e^{6x}}{(1 + 2e^{2x})^4}$$

$$g''(x) = \frac{-48e^{2x} + 192e^{6x}}{(1 + 2e^{2x})^4} = \frac{48e^{2x}(4e^{4x} - 1)}{(1 + 2e^{2x})^4}$$

$$g''(x) = 0 \text{ als } 4e^{4x} - 1 = 0$$

$$(2e^{2x} + 1)(2e^{2x} - 1) = 0$$

$2e^{2x} + 1 = 0$  heeft geen oplossing

$2e^{2x} - 1 = 0$  geeft  $e^{2x} = \frac{1}{2}$ , dus  $2x = \ln(\frac{1}{2})$  ofwel  $x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2})$ .

$f(\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2})) = 3$ , dus de coördinaten van het buigpunt zijn  $(\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}), 3)$ .

**B-8a**  $f(x)$  heeft een verticale asymptoot als  $\frac{1}{2}x + 2 = 0$ , dus als  $x = -4$ .

Voor hele grote en kleine waarden van  $x$  nadert  $f(x)$  naar  $-2$ ,

dus een horizontale asymptoot is  $y = -2$ .

**b**  $g(x)$  heeft een verticale asymptoot als  $x + 2 = 0$ , dus als  $x = -2$ .

Voor hele grote waarden van  $x$  nadert  $g(x)$  naar  $3$ , dus een horizontale asymptoot is  $y = 3$ .

Voor hele kleine waarden van  $x$  nadert  $g(x)$  naar  $-3$ , dus een horizontale asymptoot is  $y = -3$ .

**c**  $k(x)$  heeft een verticale asymptoot als  $e^x - e = 0$ , dus voor  $x = 1$ .

Voor hele grote waarden van  $x$  nadert  $k(x)$  naar  $2$ , dus een horizontale asymptoot is  $y = 2$ .

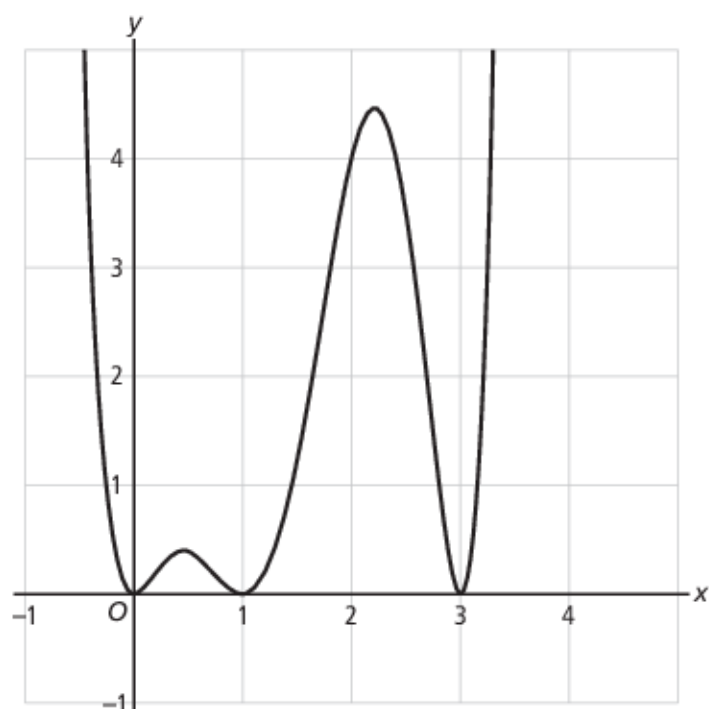
Voor hele kleine waarden van  $x$  nadert  $k(x)$  naar  $0$ , dus een horizontale asymptoot is  $y = 0$ .

**d**  $l(x)$  heeft een verticale asymptoot als  $x + 2 = 0$ , dus als  $x = -2$ .

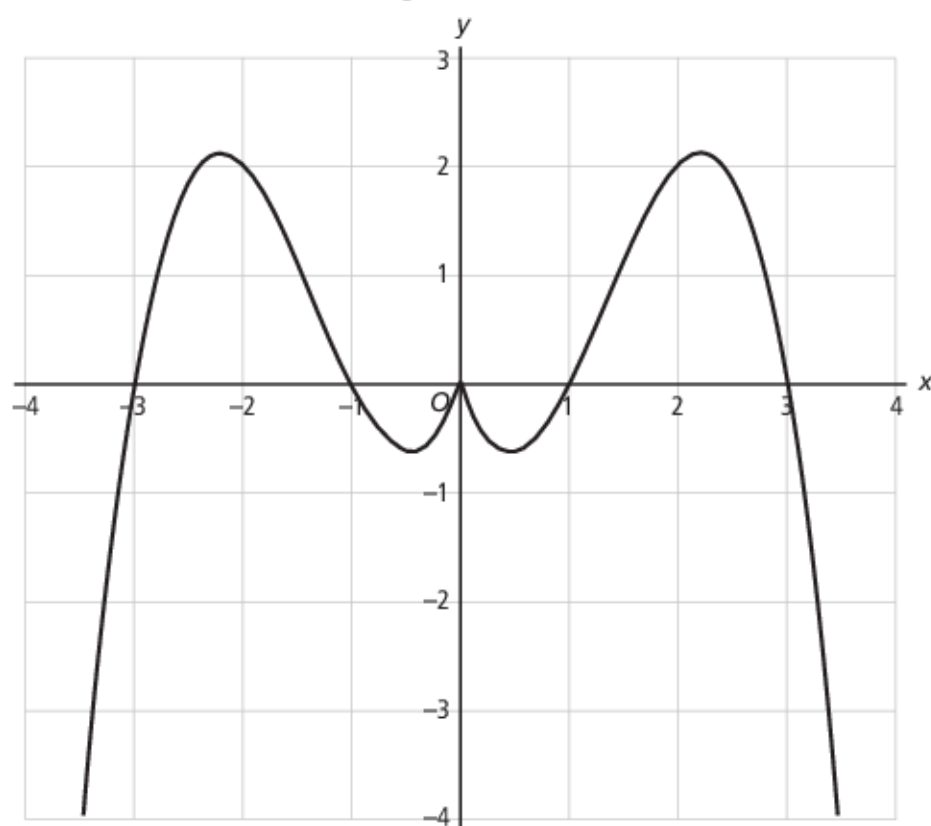
(Merk op dat  $x = 0$  geen verticale asymptoot is.)

Voor hele grote en kleine waarden van  $x$  nadert  $l(x)$  naar  $0$ , dus een horizontale asymptoot is  $y = 0$ .

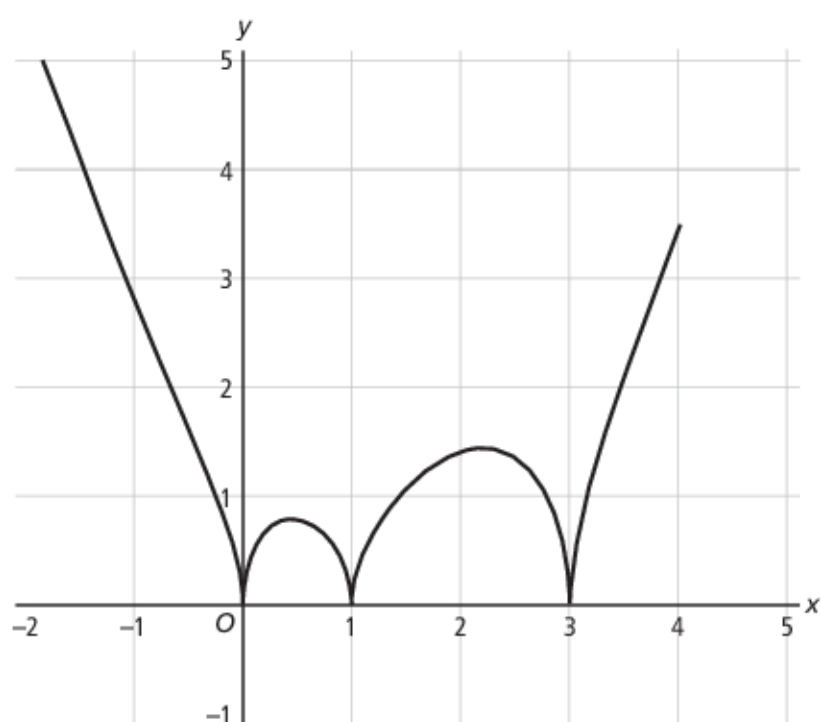
- B-9a** De nulpunten blijven gelijk, dus  $g(x)$  gaat door  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  en  $(3, 0)$ .  
 De toppen worden  $(\frac{1}{2}, (-\frac{1}{2})^2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  en  $(2, 2^2) = (2, 4)$ .  
 Een schets ziet er als volgt uit.



- b** Het deel van de grafiek van  $f(x)$  rechts van de  $y$ -as wordt gespiegeld in de  $y$ -as.  
 Een schets ziet er als volgt uit.



- c** De grafiek van  $|f(x)|$  ontstaat door de grafiek van  $f(x)$  te spiegelen in de  $x$ -as.  
 Vervolgens de wortel van de  $y$ -waarden nemen geeft de volgende schets.



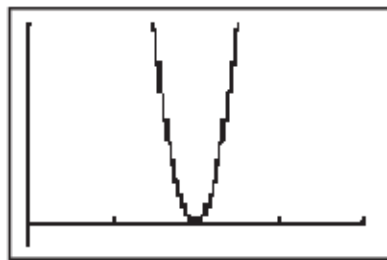
**B-10**  $f'_p(x) = \sqrt{p-x^2} + (x-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{p-x^2}} \cdot -2x$   
 $f'_p(x) = \sqrt{p-x^2} - \frac{x(x-2)}{\sqrt{p-x^2}}$   
 $f'_p(0) = \sqrt{p} - \frac{0}{\sqrt{p}} = \sqrt{p} = 4$ , dus  $p = 16$

## Extra oefening – Gemengd

Pagina 162:

**G-1**  $\frac{\cos(t) + \sin(t)}{\cos(t) - \sin(t)} \cdot \frac{\cos(t) - \sin(t)}{\cos(t) - \sin(t)} = \frac{\cos^2(t) - \sin^2(t)}{\cos^2(t) - 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t)} = \frac{\cos(2t)}{1 - 2\cos(t)\sin(t)} = \frac{\cos(2t)}{1 - \sin(2t)}$

**G-2a**



Voor het snijpunt met de  $x$ -as geldt  $y = 0$ .

$$4\sin^2(t) \cdot \cos^2(t) = 0$$

$$\sin(t) = 0 \text{ of } \cos(t) = 0$$

$$t = k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Voor deze waarden van  $t$  geldt  $x = 2$ , dus het snijpunt is  $(2, 0)$ .

**b**  $4\sin^2(t) \cdot \cos^2(t) = (2\sin(t) \cdot \cos(t))^2 = \sin^2(2t)$

**c**  $(2x - 4)^2 = (2(2 + \frac{1}{2}\sin(2t)) - 4)^2 = (4 + \sin(2t) - 4)^2 = \sin^2(2t) = y$

Dus de punten van  $K$  liggen op de grafiek van  $p(x)$ .

**d**  $x = 2 + \frac{1}{2}\sin(2t)$  kan waarden aannemen tussen  $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$  en  $2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ , dus het domein is  $[1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}]$ .

**G-3a**  $\frac{dx}{dt} = 3\cos(t) - 3\cos(3t)$

$$\frac{dy}{dt} = -3\sin(t) + 3\sin(3t)$$

**b** De kromme heeft een horizontale raaklijn als geldt  $\frac{dy}{dt} = 0$  en  $\frac{dx}{dt} \neq 0$ .

$$-3\sin(t) + 3\sin(3t) = 0$$

$$\sin(3t) - \sin(t) = 0$$

$$2\sin(t) \cdot \cos(2t) = 0$$

$$\sin(t) = 0 \text{ of } \cos(2t) = 0$$

$$t = 0, t = \frac{1}{4}\pi, t = \frac{3}{4}\pi, t = \pi, t = 1\frac{1}{4}\pi, t = 1\frac{3}{4}\pi \text{ of } t = 2\pi$$

De kromme heeft een verticale raaklijn als geldt  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $\frac{dy}{dt} \neq 0$ .

$$3\cos(t) - 3\cos(3t) = 0$$

$$\cos(t) - \cos(3t) = 0$$

$$-2\sin(2t) \cdot \sin(-t) = 0$$

$$2\sin(2t) \cdot \sin(t) = 0$$

$$\sin(2t) = 0 \text{ of } \sin(t) = 0$$

$$t = 0, t = \frac{1}{2}\pi, t = \pi, t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ en } t = 2\pi$$

De punten  $t = 0$ ,  $t = \pi$  en  $t = 2\pi$  vervallen, want een raaklijn kan niet horizontaal en verticaal zijn.

Er zijn horizontale raaklijnen voor  $t = \frac{1}{4}\pi$ ,  $t = \frac{3}{4}\pi$ ,  $t = 1\frac{1}{4}\pi$  en  $t = 1\frac{3}{4}\pi$ .

Er zijn verticale raaklijnen voor  $t = \frac{1}{2}\pi$  en  $t = 1\frac{1}{2}\pi$ .

$$\text{c} \quad v = \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-3\sin(t) + 3\sin(3t))^2 + (3\cos(t) - 3\cos(3t))^2}$$

Voor  $t = 0$  en  $t = \pi$  is  $v = 0$ .

$$\text{d} \quad \frac{dx}{dt} = 3(\cos(t) - \cos(3t)) = 3 \cdot -2\sin(2t) \cdot \sin(-t) = 6\sin(2t) \cdot \sin(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -3(\sin(3t) - \sin(t)) = 3 \cdot 2\sin(t) \cdot \cos(2t) = 6\sin(t) \cdot \cos(2t)$$

$$\text{e} \quad v = \sqrt{(6\sin(2t) \cdot \sin(t))^2 + (6\sin(t) \cdot \cos(2t))^2}$$

$$v = \sqrt{36\sin^2(2t) \cdot \sin^2(t) + 36\sin^2(t) \cdot \cos^2(2t)}$$

$$v = \sqrt{36\sin^2(t) \cdot (\sin^2(2t) + \cos^2(2t))}$$

$$v = \sqrt{36\sin^2(t)} = 6|\sin(t)|$$

$$\text{f} \quad \text{Voor } 0 \leq t \leq \pi \text{ geldt: } v'(t) = 6\cos(t)$$

$$v'(t) = 0 \text{ voor } 6\cos(t) = 0$$

Dit is het geval voor  $t = \frac{1}{2}\pi$ . Dit geeft het punt  $(4, 0)$ .

$$\text{Voor } \pi < t \leq 2\pi \text{ geldt: } v'(t) = -6\cos(t)$$

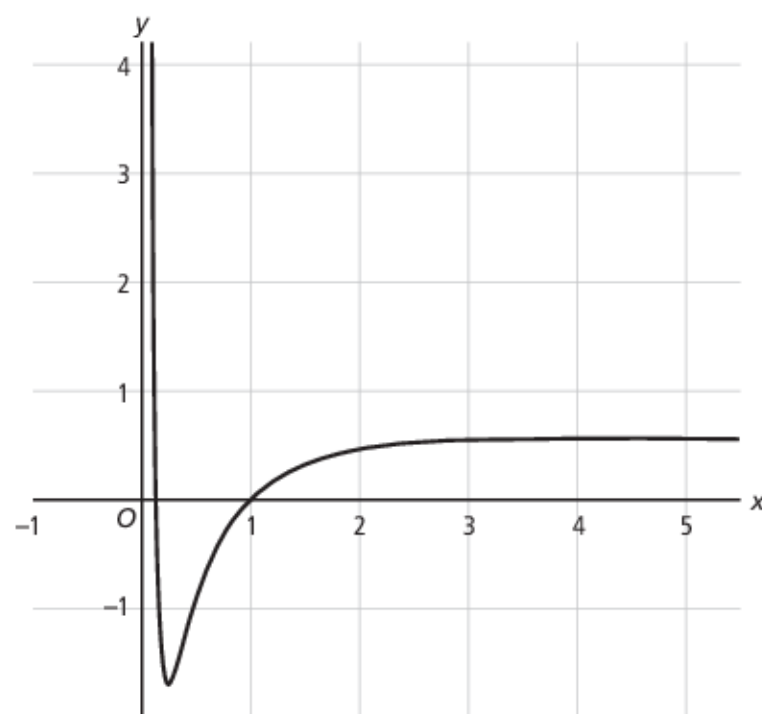
$$v'(t) = 0 \text{ voor } -6\cos(t) = 0$$

Dit is het geval voor  $t = 1\frac{1}{2}\pi$ . Dit geeft het punt  $(-4, 0)$ .

De baansnelheid is maximaal in  $(-4, 0)$  en  $(4, 0)$ .

**Pagina 163:**

**G-4a**



$$\text{b} \quad \text{De verticale asymptoot is de } y\text{-as } (x = 0).$$

De horizontale asymptoot is de  $x$ -as ( $y = 0$ ).

$$\text{c} \quad f(x) = 0 \text{ als } \ln^2(x) + 2\ln(x) = 0 \text{ en } 2x \neq 0.$$

$$\ln^2(x) + 2\ln(x) = 0$$

$$\ln(x)(\ln(x) + 2) = 0$$

$$\ln(x) = 0 \text{ of } \ln(x) = -2$$

$$\text{De nulpunten zijn } x = 1 \text{ of } x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

$$\text{d} \quad f'(x) = \frac{(2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x}) \cdot 2x - (\ln^2(x) + 2\ln(x)) \cdot 2}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{4\ln(x) + 4 - 2\ln^2(x) - 4\ln(x)}{4x^2}$$



$$f'(x) = \frac{4 - 2\ln^2(x)}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln^2(x)}{2x^2}$$

- e De grafiek heeft een minimum tussen 0 en 1.

Voor een minimum geldt  $f'(x) = 0$ .

$$\frac{2 - \ln^2(x)}{2x^2} = 0 \text{ als } 2 - \ln^2(x) = 0$$

Dit geldt voor  $\ln(x) = -\sqrt{2}$  of  $\ln(x) = \sqrt{2}$ .

Dan is  $x = e^{-\sqrt{2}}$  of  $x = e^{\sqrt{2}}$ . Het minimum hoort bij  $x = e^{-\sqrt{2}}$ .

$$f(e^{-\sqrt{2}}) = \frac{\ln^2(e^{-\sqrt{2}}) + 2\ln(e^{-\sqrt{2}})}{2 \cdot e^{-\sqrt{2}}} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2 \cdot e^{-\sqrt{2}}} = (1 - \sqrt{2}) \cdot e^{\sqrt{2}}$$

Het bereik is dan  $[(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}}, \rightarrow)$ .

- f Er moet gelden  $f''(x) = 0$ .

$$f''(x) = \frac{-2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot 2x^2 - (2 - \ln^2(x)) \cdot 4x}{4x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-4x \cdot \ln(x) - 8x + 4x \cdot \ln^2(x)}{4x^4}$$

$$f''(x) = 0 \text{ als } -4x\ln(x) - 8x + 4x\ln^2(x) = 0$$

$$4x(\ln^2(x) - \ln(x) - 2) = 0$$

$$4x = 0 \text{ of } (\ln(x) - 2)(\ln(x) + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } \ln(x) = 2 \text{ of } \ln(x) = -1$$

$x = 0$  behoort niet tot het domein van  $f$ .

Er zijn buigpunten bij  $x = e^2$  en  $x = \frac{1}{e}$ .

$$f(e^2) = \frac{\ln^2(e^2) + 2\ln(e^2)}{2e^2} = \frac{4}{e^2}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln^2\left(\frac{1}{e}\right) + 2\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{-1}{\frac{2}{e}} = -\frac{1}{2}e$$

De buigpunten zijn  $(e^2, \frac{4}{e^2})$  en  $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{2}e)$ .

- G-5a** Eerst de  $x$ -coördinaten van de snijpunten zoeken.

$$(x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x} = (4x + 2) \cdot e^{-x}$$

$$e^{-x} = 0 \text{ of } x^2 + 2x + 2 = 4x + 2$$

$e^{-x} = 0$  heeft geen oplossing.

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

De  $x$ -coördinaten van de snijpunten zijn  $x = 0$  en  $x = 2$ .

Uit de grafiek valt af te lezen  $f(x) \leq g(x)$  voor  $[0, 2]$ .

- b  $G'(x) = a \cdot e^{-x} - (ax + b) \cdot e^{-x} = (-ax + a - b) \cdot e^{-x}$

$G'(x) = g(x)$ , dus  $a = -4$  en  $b = -6$ .

- c Eerst het snijpunt bepalen van de grafiek van  $g(x)$  met de horizontale as.

$$(4x + 2) \cdot e^{-x} = 0 \text{ geeft } 4x + 2 = 0, \text{ dus } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 g(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (4x + 2) \cdot e^{-x} dx = \left[ ((-4x - 6) \cdot e^{-x}) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = -6 + 4\sqrt{e}$$

- d  $f'(x) = (2x + 2) \cdot e^{-x} - (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x} = -x^2 \cdot e^{-x}$

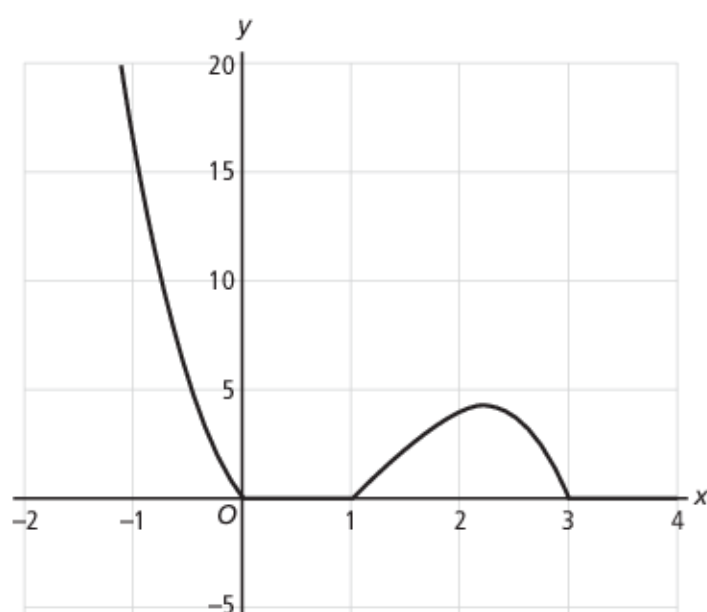
$$f''(x) = -2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x}$$

$f''(0) = f''(2) = 0$ , dus in beide snijpunten heeft de grafiek van  $f$  een buigpunt.

**G-6a** Voor  $x < 0$  en  $1 < x < 3$  worden de waarden van  $y$  twee keer zo groot.

Voor  $0 < x < 1$  en  $x > 3$  geldt  $f(x) + -f(x) = 0$

Een schets van  $g(x)$  ziet er als volgt uit.

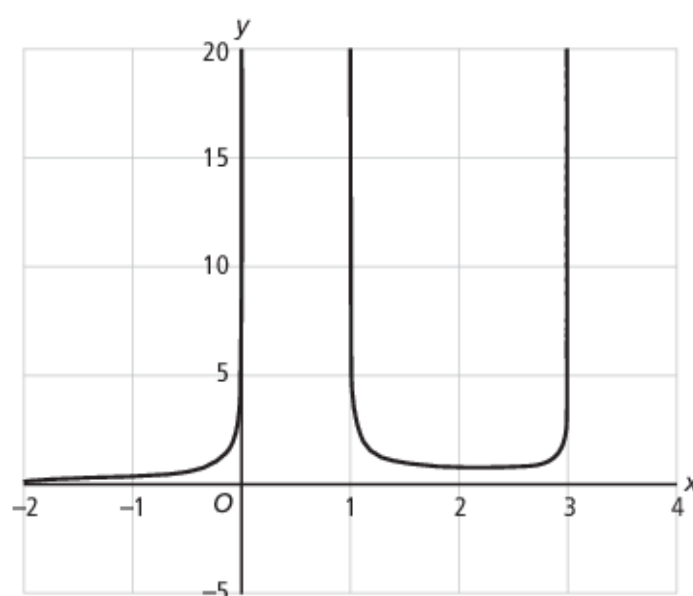


**b** De nulpunten van  $f(x)$  worden verticale asymptoten van  $h(x)$ .

$h(x)$  is gedefinieerd voor  $x < 0$  en  $1 < x < 3$ .

Hoe kleiner de waarde van  $f(x)$  hoe groter de waarde van  $h(x)$  en andersom.

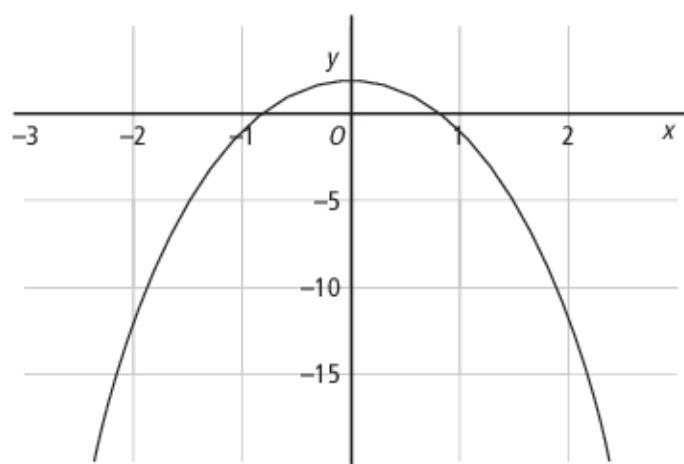
Een schets van  $h(x)$  ziet er als volgt uit.



**c** Voor  $x \geq 0$  is  $k(x) = f(x+2)$ , dus verschuift de grafiek twee naar links.

Voor  $x < 0$  is  $k(x) = f(-x+2)$ , dus een spiegeling van het deel aan de rechterkant van de  $y$ -as.

Een schets van de grafiek ziet er als volgt uit.



**G-7a** Bereken bijvoorbeeld het snijpunt van  $f_1(x) = \ln^2(x)$  en  $f_2(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$ .

$\ln^2(x) - \ln(x) = \ln^2(x)$  geldt voor  $x = 1$ .

$f_p(1) = \ln^2(1) - p \cdot \ln(1) = 0$ , dus alle grafieken gaan door  $(1, 0)$ .

- b Er moet gelden  $f'_p(x) = 0$ .

$$f'_p(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - p \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'_p(x) = \frac{1}{x}(2 \cdot \ln(x) - p)$$

$$f'_p(x) = 0 \text{ als } 2\ln(x) = p.$$

$$f_{2\ln(x)}(x) = \ln^2(x) - 2\ln(x) \cdot \ln(x) = -\ln^2(x)$$

De toppen van  $f_p(x)$  liggen dus op  $y = -\ln^2(x)$ .

## Extra oefening - Vaardigheden

Pagina 164:

V-1a  $f'(x) = 6x - 6x^2$

b  $g'(x) = 3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) - 2 \cdot 3^x \cdot \ln(3)$

$$g'(x) = \ln(8) \cdot 2^x - \ln(9) \cdot 3^x$$

c  $h'(x) = \frac{1}{3x-5} \cdot 3 = \frac{3}{3x-5}$

d  $k'(x) = \frac{1}{x^2-7x} \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2x-7$

$$k'(x) = \frac{2x-7}{\ln(2)(x^2-7x)}$$

e  $m'(x) = 6x \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x$

$$m'(x) = 3x \cdot e^x(2+x)$$

f  $n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}-3x}} \cdot 2e^{2x} - 3$

$$n'(x) = \frac{2e^{2x}-3}{2\sqrt{e^{2x}-3x}}$$

g  $p'(x) = 2(3^x+1) \cdot 3^x \cdot \ln(3)$

h  $q'(x) = 3x^2 \cdot \ln(2x+1) + x^3 \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot 2$

$$q'(x) = x^2 \left( 3\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1} \right)$$

V-2a  $f'(x) = \frac{6x \cdot (10+4x+x^2) - 3x^2 \cdot (4+2x)}{(10+4x+x^2)^2}$

b  $g'(x) = \frac{(4+2x) \cdot 3x - (10+4x+x^2) \cdot 3}{9x^2}$

c  $h'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x-5) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

d  $k'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot (e^x+1) - e^{2x} \cdot e^x}{(e^x+1)^2}$

e  $m'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$

f  $n'(x) = \frac{10x \cdot (5^x+2) - 5x^2 \cdot \ln(5) \cdot 5^x}{(5^x+2)^2}$

V-3a  $f'(x) = 2e^{2x}$ , dus  $f'(2) = 2e^4$ . De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is  $2e^4$ .

$$f(2) = e^4 + e, \text{ dus de raaklijn gaat door } (2, e^4 + e).$$

$$\text{Invullen van } (2, e^4 + e) \text{ in } y = 2e^4 \cdot x + b \text{ geeft } b = -3e^4 + e.$$

$$\text{De vergelijking van de raaklijn is } y = 2e^4x - 3e^4 + e.$$

b  $g'(x) = \frac{-7-2x}{2\sqrt{9-7x-x^2}}$ , dus  $g'(-7) = 1\frac{1}{6}$ .

$$g(-7) = 3, \text{ dus de raaklijn gaat door } (-7, 3).$$

$$\text{Invullen van } (-7, 3) \text{ in } y = 1\frac{1}{6}x + b \text{ geeft } b = 11\frac{1}{6}.$$

$$\text{De vergelijking van de raaklijn is } y = 1\frac{1}{6}x + 11\frac{1}{6}.$$

c  $h'(x) = \frac{3x^2 \cdot (2x+1) - 2x^3}{(2x+1)^2}$ , dus  $h'(-1) = -1$ .

$$h(-1) = 1, \text{ dus de raaklijn gaat door } (-1, 1).$$

$$\text{Invullen van } (-1, 1) \text{ in } y = -x + b \text{ geeft } b = 0.$$

$$\text{De vergelijking van de raaklijn is } y = -x.$$

$$d \quad k'(x) = \frac{2e^{2x+1} \cdot (e^{2x} + 1) - e^{2x+1} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}, \text{ dus } k'(0) = \frac{1}{2}e.$$

$k(0) = \frac{1}{2}e$ , dus de raaklijn gaat door  $(0, \frac{1}{2}e)$ .

Invullen van  $(0, \frac{1}{2}e)$  in  $y = \frac{1}{2}e \cdot x + b$  geeft  $b = \frac{1}{2}e$ .

De vergelijking van de raaklijn is  $y = \frac{1}{2}ex + \frac{1}{2}e$ .

$$V-4a \quad \int_2^6 (x^3 - 2x) dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 - x^2 \right]_2^6 = 288 - 0 = 288$$

$$b \quad \int_2^5 \left( \frac{1}{3x-1} \right) dx = \left[ \frac{1}{3} \ln(3x-1) \right]_2^5 = \frac{1}{3} \ln 14 - \frac{1}{3} \ln 5 = \frac{1}{3} \ln \left( \frac{14}{5} \right)$$

$$c \quad \int_{-4}^2 \left( \frac{1}{2}x - 1 \right)^5 dx = \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}x - 1 \right)^6 \right]_{-4}^2 = 0 - 243 = -243$$

$$d \quad \int_1^3 \left( \frac{1}{2} \right)^{2x-1} dx = \left[ \frac{1}{2 \ln(0,5)} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{2x-1} \right]_1^3 = \frac{1}{2 \ln(0,5)} \cdot \left( \frac{1}{32} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{15}{64 \ln(0,5)}$$

**Pagina 165:**

**V-5** Het snijpunt van  $f(x)$  met de  $x$ -as is  $(-3, 0)$ .

De  $x$ -coördinaat van het snijpunt van  $f(x)$  en  $g(x)$  bereken je met  $1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = \sqrt{8-x}$ .

$$3x + 9 = 2\sqrt{8-x}$$

$$9x^2 + 54x + 81 = 32 - 4x$$

$$9x^2 + 58x + 49 = 0$$

$$x = \frac{-55 \pm 40}{18}$$

$$x = -\frac{5}{6} \text{ (voldoet) of } x = -5\frac{5}{18} \text{ (voldoet niet)}$$

Het snijpunt van het te onderzoeken gebied heeft  $x$ -coördinaat  $x = -\frac{5}{6}$

$$\int_{-3}^{-\frac{5}{6}} f(x) dx + \int_{-\frac{5}{6}}^8 g(x) dx = \int_{-3}^{-\frac{5}{6}} \left( 1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} \right) dx + \int_{-\frac{5}{6}}^8 \sqrt{8-x} dx =$$

$$\left[ \frac{3}{4}x^2 + 4\frac{1}{2}x \right]_{-3}^{-\frac{5}{6}} + \left[ -\frac{2}{3}(8-x)\sqrt{8-x} \right]_{-\frac{5}{6}}^8 = -\frac{155}{48} + \frac{324}{48} + 0 + \frac{2}{3} \cdot 8\frac{5}{6}\sqrt{8\frac{5}{6}} = 3\frac{25}{48} + \frac{2}{3} \cdot 8\frac{5}{6}\sqrt{8\frac{5}{6}}$$

**V-6** De oppervlakte kan berekend worden met  $\int_0^8 g(x) dx - \int_6^8 f(x) dx$ .

$$\int_0^8 \left( \frac{1}{4}x + 8 \right) dx - \int_6^8 \left( \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \right) dx = \left[ \frac{1}{8}x^2 + 8x \right]_0^8 - \left[ \frac{1}{6}x^3 - x^2 - 6x \right]_6^8 = 72 - 9\frac{1}{3} = 62\frac{2}{3}$$

$$V-7a \quad x^8 - 3x^4 - 4 = 0$$

Stel  $p = x^4$ .

$$p^2 - 3p - 4 = 0$$

$$(p-4)(p+1) = 0$$

$$p = 4 \text{ of } p = -1$$

$$x^4 = 4 \text{ of } x^4 = -1$$

$$x = \sqrt{2} \text{ of } x = -\sqrt{2} \text{ of geen oplossing}$$

$$b \quad \ln^4(x) - \ln^2(x) - 2 = 0$$

Stel  $p = \ln^2(x)$ .

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$(p-2)(p+1) = 0$$

$$p = 2 \text{ of } p = -1$$

$$\ln^2(x) = 2 \text{ of } \ln^2(x) = -1$$

$$\ln(x) = \pm \sqrt{2} \text{ of geen oplossing}$$

$$x = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} \text{ of } x = e^{\sqrt{2}}$$

**c**  $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$   
 Stel  $p = \sqrt{x}$ .  
 $p^2 - 7p + 12 = 0$   
 $(p - 3)(p - 4) = 0$   
 $p = 3$  of  $p = 4$   
 $\sqrt{x} = 3$  of  $\sqrt{x} = 4$   
 $x = 9$  of  $x = 16$

**d**  $\frac{16}{x^2} - \frac{4}{x} - 2 = 0$   
 Stel  $p = \frac{4}{x}$ .  
 $p^2 - p - 2 = 0$   
 $(p + 1)(p - 2) = 0$   
 $p = -1$  of  $p = 2$   
 $\frac{4}{x} = -1$  of  $\frac{4}{x} = 2$   
 $x = -4$  of  $x = 2$

**e**  $e^{2x} - 8e^x - 20 = 0$   
 $p = e^x$   
 $p^2 - 8p - 20 = 0$   
 $(p - 10)(p + 2) = 0$   
 $p = 10$  of  $p = -2$   
 $e^x = 10$  of  $e^x = -2$   
 $x = \ln(10)$  of geen oplossing

**f**  $16^x - 5 \cdot 4^x - 14 = 0$   
 Stel  $p = 4^x$   
 $p^2 - 5p - 14 = 0$   
 $(p - 7)(p + 2) = 0$   
 $p = 7$  of  $p = -2$   
 $4^x = 7$  of  $4^x = -2$   
 $x = {}^4\log(7)$  of geen oplossing

**g**  $x^3 - 5x\sqrt{x} + 6 = 0$   
 Stel  $p = x\sqrt{x}$ .  
 $p^2 - 5p + 6 = 0$   
 $(p - 3)(p - 2) = 0$   
 $p = 3$  of  $p = 2$   
 $x\sqrt{x} = 3$  of  $x\sqrt{x} = 2$   
 $x^3 = 9$  of  $x^3 = 4$   
 $x = \sqrt[3]{9}$  of  $x = \sqrt[3]{4}$

**h**  $\frac{25}{(x+1)^2} + \frac{10}{x+1} - 3 = 0$   
 Stel  $p = \frac{5}{x+1}$ .  
 $p^2 + 2p - 3 = 0$   
 $(p + 3)(p - 1) = 0$   
 $p = -3$  of  $p = 1$   
 $\frac{5}{x+1} = -3$  of  $\frac{5}{x+1} = 1$   
 $x = -2\frac{2}{3}$  of  $x = 4$

**V-8a** Uit de tweede vergelijking volgt  $x = -4y - 7$ .

Vul de tweede vergelijking in de eerste vergelijking in.

$$2(-4y - 7) - 7y = 16$$

$$-15y = 30$$

$$y = -2$$

Dan is  $x = -4 \cdot -2 - 7 = 1$ . De oplossing van het stelsel is  $x = 1$  en  $y = -2$ .

**b** Vul de tweede vergelijking in de eerste in.

$$2x^2 + 3(7 - 4x) = 11$$

$$2x^2 - 12x + 10 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 5)(x - 1) = 0$$

$$x = 5 \text{ of } x = 1$$

Bij  $x = 5$  hoort  $y = 7 - 4 \cdot 5 = -13$ .

Bij  $x = 1$  hoort  $y = 7 - 4 \cdot 1 = 3$ . De oplossing is  $x = 5$  en  $y = -13$  of  $x = 1$  en  $y = 3$ .

**c** Uit de eerste vergelijking volgt  $x = 4y + 1$ .

Vul de eerste vergelijking in de tweede vergelijking in.

$$(4y + 1) \cdot y = -3$$

$$4y^2 + y + 3 = 0$$

$$4y^2 + y + 3 = 0$$

Van deze tweedegraads vergelijking is de discriminant  $D = 1 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -47 < 0$ , dus er is geen oplossing.



- d** De eerste vergelijking invullen in de tweede vergelijking geeft  $x^2 + (3\sqrt{x})^2 = 90$ .

$$x^2 + 9x - 90 = 0$$

$$(x + 15)(x - 6) = 0$$

$$x = -15 \text{ of } x = 6$$

Voor  $x = -15$  is de bovenste vergelijking niet gedefinieerd, dus de oplossing is

$$x = 6 \text{ en } y = 3\sqrt{6}$$

- e** Uit de eerste vergelijking volgt  $x = 7y - 3$ .

Vul de eerste vergelijking in de tweede vergelijking in.

$$15y - 2(7y - 3) = 8$$

$$y + 6 = 8$$

$$y = 2$$

Bij  $y = 2$  hoort  $x = 7 \cdot 2 - 3 = 11$ . De oplossing is  $x = 11$  en  $y = 2$ .

- f** Uit de eerste vergelijking volgt  $x = -\frac{4}{3}y + \frac{2}{3}$ .

Vul de eerste vergelijking in de tweede vergelijking in.

$$2 \cdot \left(-\frac{4}{3}y + \frac{2}{3}\right) \cdot y + y = -6$$

$$-\frac{8}{3}y^2 + \frac{4}{3}y + y = -6$$

$$-\frac{8}{3}y^2 + \frac{7}{3}y + 6 = 0$$

$$8y^2 - 7y - 18 = 0$$

$$y = \frac{7 \pm 25}{16}$$

$$y = 2 \text{ of } y = -1\frac{1}{8}$$

Bij  $y = 2$  hoort  $x = -\frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} = -2$ . Bij  $y = -1\frac{1}{8}$  hoort  $x = -\frac{4}{3} \cdot -1\frac{1}{8} + \frac{2}{3} = 2\frac{1}{6}$ .

De oplossing van het stelsel is  $x = -2$  en  $y = 2$  of  $x = 2\frac{1}{6}$  en  $y = -1\frac{1}{8}$

# Examen voorbereiding

## Pagina 168:

- 1a** Uit  $6x - 4 \geq 0$  volgt  $6x \geq 4$  dus  $x \geq \frac{2}{3}$ . Dus  $D_f = [\frac{2}{3}, \rightarrow)$ .  
Omdat  $\sqrt{6x-4} \geq 0$  is  $10 + \sqrt{6x-4} \geq 10$  en is  $B_f = [10, \rightarrow)$ .
- b**  $D_g = \mathbb{R}$  en met  $(x-3)^2 \geq 0$  vind je  $B_g = [-8, \rightarrow)$ .
- c** Uit  $9 - x^2 > 0$  volgt  $-3 < x < 3$  dus  $D_h = \langle -3, 3 \rangle$ . Met  ${}^3\log(9 - x^2) \leq 2$  volgt  $B_h = \langle \leftarrow, 6 \rangle$ .
- d** Er moet gelden  $x^2 - 2x - 3 \neq 0$ , ofwel  $(x-3)(x+1) \neq 0$ , dus  $D_k = \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, 3 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$ .  
Omdat  $\frac{5}{x^2 - 2x - 3} \neq 0$  is  $k(x) \neq -1$ . Verder is  $x^2 - 2x - 3 \geq -4$ , dus voor  $-1 < x < 3$  geldt  $\frac{5}{x^2 - 2x - 3} \leq -2,25$ . Dus  $B_k = \langle \leftarrow, -2,25 \rangle \cup \langle -1, \rightarrow \rangle$ .

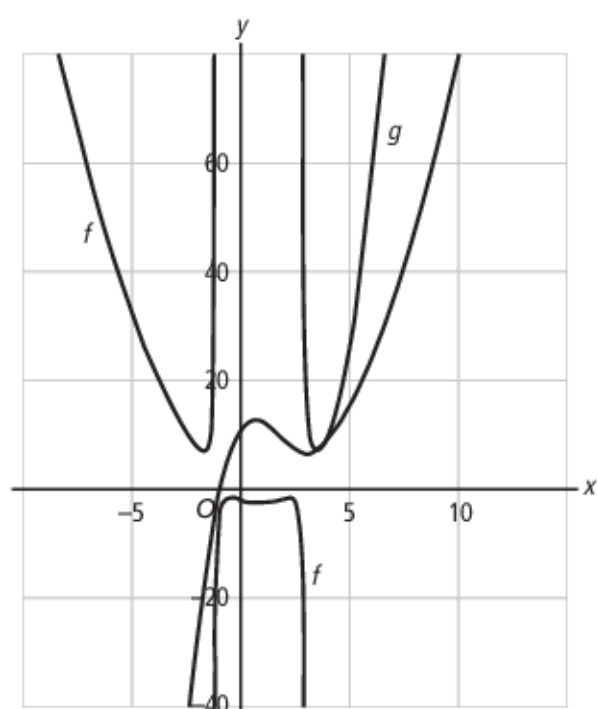
## Pagina 169:

- 2a** De grafiek heeft geen asymptoten.
- b** Uit  $g(x) = \frac{5x^2 + 1}{3x^2 - 6x} = \frac{5 + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{6}{x}}$  volgt dat de grafiek van  $g$  de lijn  $y = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$  als horizontale asymptoot heeft.  
Met  $3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$  vind je de verticale asymptoten  $x = 0$  en  $x = 2$ .
- c** Als  $x \rightarrow \infty$  dan  $h(x) \rightarrow 25 + 0 = 25$  dus de horizontale asymptoot is  $y = 25$ .  
Er is geen verticale asymptoot.
- d** Er is alleen een horizontale asymptoot:  $y = 0$ .

## Pagina 170:

- 3a**  $g(x) = f(2x) + 4 = (2x)^2 + 6(2x) + 1 + 4 = 4x^2 + 12x + 5$
- b**  $g(x) = -4 \cdot f(x-3) = -4((x-3)^2 + 6(x-3) + 1) = -4(x^2 - 6x + 9 + 6x - 18 + 1) = -4x^2 + 32$
- c**  $g(x) = 2 \cdot f(x) - 7 = 2(x^2 + 6x + 1) - 7 = 2x^2 + 12x - 5$

**4a**



**b**  $f(x) = (x-1)^2 - 1 + \frac{5}{(x-1)^2 - 4}$  is symmetrisch in de lijn  $x = 1$ .

Er moet gelden  $f(1-p) = f(1+p)$ .

$$f(1-p) = (1-p)^2 - 2 \cdot (1-p) + \frac{5}{(1-p)^2 - 2 \cdot (1-p) - 3}$$

$$f(1-p) = 1 - 2p + p^2 - 2 + 2p + \frac{5}{1 - 2p + p^2 - 2 + 2p - 3}$$

$$f(1-p) = p^2 - 1 + \frac{5}{p^2 - 4}$$

$$f(1+p) = (1+p)^2 - 2 \cdot (1+p) + \frac{5}{(1+p)^2 - 2 \cdot (1+p) - 3}$$

$$f(1+p) = 1 + 2p + p^2 - 2 - 2p + \frac{5}{1 + 2p + p^2 - 2 - 2p - 3}$$

$$f(1+p) = p^2 - 1 + \frac{5}{p^2 - 4}$$

Dus  $f(1-p) = f(1+p)$  voor elke waarde van  $p$ .

**c**  $h(x) = g(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 8 \cdot -x + 10 = -x^3 - 6x^2 - 8x + 10$

**Pagina 171:**

**5a** Uit  $3x - 8 \geq 0$  volgt  $x \geq \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$  dus  $D_g = [2\frac{2}{3}, \rightarrow)$ .

**b** Uit  $x^2 - 15 \geq 0$  volgt  $x \leq -\sqrt{15}$  of  $x \geq \sqrt{15}$  dus  $D_h = \langle \leftarrow, -\sqrt{15} \rangle \cup [\sqrt{15}, \rightarrow)$ .  
Omdat  $x^2 + 15 > 0$  voor elke waarde van  $x$  is  $D_k = \mathbb{R}$ .

**6a**  $1 + x^2 \geq 1$ , dus  $0 < \frac{10}{1+x^2} \leq 10$ . Dit geeft  $B_m = \langle 0, 10 \rangle$ .

**b** Omdat  $n(x) = 2\sqrt{x^2+5} \geq 2\sqrt{5}$  is  $B_n = [2\sqrt{5}, \rightarrow)$ .  
Omdat  $p(x) = 30 - 6\sqrt{4-9x} \leq 30$  is  $B_p = \langle \leftarrow, 30 \rangle$ .

**Pagina 172:**

**7a**  $4x^3 - 7x^2 = -3x$   
 $4x^3 - 7x^2 + 3x = 0$   
 $x = 0$  of  $4x^2 - 7x + 3 = 0$   
 $x = 0$  of  $x = \frac{7 \pm 1}{8}$   
 $x = 0$  of  $x = 1$  of  $x = \frac{3}{4}$

**b**  $(-3x+5)^2 = 16x^2$   
 $(-3x+5)^2 = (4x)^2$   
 $-3x+5 = 4x$  of  $-3x+5 = -4x$   
 $-7x = -5$  of  $x = -5$   
 $x = \frac{5}{7}$  of  $x = -5$

**c**  $\frac{12}{x+1} - \frac{2x}{x-3} = -3$   
 $12(x-3) - 2x(x+1) = -3(x+1)(x-3)$   
 $12x - 36 - 2x^2 - 2x = -3(x^2 - 2x - 3)$   
 $x^2 + 4x - 45 = 0$   
 $(x+9)(x-5) = 0$   
 $x = -9$  of  $x = 5$

**d**  $(2x-3)(x^2-3x+2) = (x-2)^2$   
 $(2x-3)(x-2)(x-1) = (x-2)^2$   
 $x-2=0$  of  $(2x-3)(x-1) = x-2$   
 $x=2$  of  $2x^2-6x+5=0$   
 $x=2$  of geen oplossing ( $D < 0$ )

**e**  $\frac{1}{2}x^4 + x = 0$   
 $\frac{1}{2}x(x^3 + 2) = 0$   
 $x = 0$  of  $x = \sqrt[3]{-2} \approx -1,26$

**8a**  $3x - 4 \leq 2\frac{1}{3}x + 5$   
 $\frac{2}{3}x - 4 \leq 5$   
 $\frac{2}{3}x \leq 9$   
 $2x \leq 27$   
 $x \leq 13\frac{1}{2}$   
De oplossing is  $\langle \leftarrow, 13\frac{1}{2} \rangle$ .

**b** Snijpunten voor  $x \leq 0$  of  $x \geq 5$ :  
 $x^2 - 5x = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$   
 $x^2 - 5\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} = 0$   
 $(x - 5)(x - \frac{1}{2}) = 0$   
 $x = 5$  of geen oplossing

Snijpunten voor  $0 < x < 5$ :  
 $-x^2 + 5x = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$   
 $x^2 - 4\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} = 0$   
 $(x - 5)(x + \frac{1}{2}) = 0$   
geen oplossing  
Er is alleen een snijpunt bij  $x = 5$ .  
De oplossing is  $\langle \leftarrow, 5 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$ .

**Pagina 173:**

**9a**  $4 + \sqrt{1 - 2x} = 7$   
 $\sqrt{1 - 2x} = 3$   
 $1 - 2x = 9$   
 $2x = -8$   
 $x = -4$ , voldoet

**b**  $4x + \sqrt{1 - 2x} = 1$   
 $\sqrt{1 - 2x} = 1 - 4x$   
 $1 - 2x = (1 - 4x)^2$   
 $1 - 2x = 1 - 8x + 16x^2$   
 $16x^2 - 6x = 0$   
 $x(16x - 6) = 0$   
 $x = 0$  of  $x = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$   
Alleen  $x = 0$  voldoet.

**c**  $-1 + \sqrt{x^2 + 7} = x$   
 $\sqrt{x^2 + 7} = x + 1$   
 $x^2 + 7 = x^2 + 2x + 1$   
 $2x = 6$   
 $x = 3$ , voldoet

**f**  $\frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{x - 5}{x - 1}$   
 $(2x - 3)(x - 1) = (x - 5)(x + 2)$   
 $2x^2 - 5x + 3 = x^2 - 3x - 10$   
 $x^2 - 2x + 13 = 0$   
 $D = 4 - 52 < 0$   
geen oplossing

**c**  $x^3 - 2x^2 \geq 8x$   
 $x^3 - 2x^2 - 8x \geq 0$   
 $x(x - 4)(x + 2) \geq 0$   
Aflezen geeft de oplossing  $[-2, 0] \cup [4, \rightarrow)$ .

**d**  $1 + \sqrt{6 - x} = \frac{1}{2}x + 2$   
 $\sqrt{6 - x} = \frac{1}{2}x + 1$   
 $6 - x = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$   
 $\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5 = 0$   
 $x^2 + 8x - 20 = 0$   
 $(x + 10)(x - 2) = 0$   
 $x = -10$  of  $x = 2$   
Alleen  $x = 2$  voldoet.  
Met een plot en het domein vind je de oplossing  $\langle 2, 6 \rangle$ .

**d**  $\sqrt{x^2 - 3} - x = 3$   
 $\sqrt{x^2 - 3} = 3 + x$   
 $x^2 - 3 = 9 + 6x + x^2$   
 $6x = -12$   
 $x = -2$ , voldoet

**e**  $7 - 2\sqrt{x} = \sqrt{x + 5}$   
 $(7 - 2\sqrt{x})^2 = x + 5$   
 $49 - 28\sqrt{x} + 4x = x + 5$   
 $-28\sqrt{x} = -3x - 44$   
 $(28\sqrt{x})^2 = (3x + 44)^2$   
 $784x = 9x^2 + 264x + 1936$   
 $9x^2 - 520x + 1936 = 0$   
 $x = \frac{520 \pm 448}{18}$   
 $x = 53\frac{7}{9}$  of  $x = 4$   
Alleen  $x = 4$  voldoet.

**10a**  $q = -0,2p + 1,3$

$$0,2p = -q + 1,3$$

$$p = -5q + 6,5$$

**b**  $3p + 12q = 16 - p$

$$4p = 16 - 12q$$

$$p = 4 - 3q$$

**c**  $\frac{2p-3}{8p} = \frac{4q+5}{7}$

$$7(2p-3) = 8p(4q+5)$$

$$14p - 21 = 32pq + 40p$$

$$-26p - 21 = 32pq$$

$$-26p - 32pq = 21$$

$$p(-26 - 32q) = 21$$

$$p = -\frac{21}{26 + 32q}$$

**d**  $13p - 4(q + 2) = pq$

$$13p - 4q - 8 = pq$$

$$13p - pq = 4q + 8$$

$$p(13 - q) = 4q + 8$$

$$p = \frac{4q+8}{13-q}$$

**e**  $0,3q + 1,2pq - 4,5 = 0$

$$3q + 12pq - 45 = 0$$

$$12pq = 45 - 3q$$

$$p = \frac{45-3q}{12q} = \frac{15-q}{4p}$$

**f**  $\frac{7q-3p}{p+8} = \frac{4}{3}$

$$3(7q-3p) = 4(p+8)$$

$$21q - 9p = 4p + 32$$

$$-13p = 32 - 21q$$

$$p = \frac{21q-32}{13}$$

**Pagina 174:**

**11a**  $a + 3(8 - 2p) = 6$

$$a + 24 - 6p = 6$$

$$a = 6p - 18$$

**b**  $\frac{a}{5p+1} = 10 + 3(5p+1)$

$$a = 10(5p+1) + 3(5p+1)^2$$

**c**  $2(6p) + 3a(6p) = 20$

$$6p + 9ap = 10$$

$$a = \frac{10-6p}{9p}$$

**d**  $a = b - b^2 = p - 1 - (p-1)^2$

$$a = (p-1)(1-p+1)$$

$$a = (p-1)(2-p)$$

$$a = -p^2 + 3p - 2$$

**12a** De pijlenketting bij functie  $f$  is:  $\dots \xrightarrow{\times 4} \dots \xrightarrow{-2} \dots$

De omgekeerde pijlenketting is:  $\dots \xleftarrow{:4} \dots \xleftarrow{+2} \dots$

De inverse functie van  $f$  is  $k(x) = \frac{x+2}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ .

**b** De pijlenketting bij functie  $g$  is:  $\dots \xrightarrow{\times 3} \dots \xrightarrow{-2} \dots \xrightarrow{\frac{1}{12}} \dots \xrightarrow{\times 12} \dots$

De omgekeerde pijlenketting is:  $\dots \xrightarrow{:3} \dots \xrightarrow{+2} \dots \xrightarrow{\frac{1}{12}} \dots \xrightarrow{:12} \dots$

De inverse functie van  $g$  is  $l(x) = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{\frac{x}{12}} + 2 \right) = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{12}{x} + 2 \right) = \frac{4}{x} + \frac{2}{3}$ .

**c** De pijlenketting bij functie  $h$  is:  $\dots \xrightarrow{\times -1} \dots \xrightarrow{+4} \dots \xrightarrow{\sqrt[3]{\dots}} \dots \xrightarrow{+2} \dots$

De omgekeerde pijlenketting is:  $\dots \xleftarrow{\times -1} \dots \xleftarrow{-4} \dots \xleftarrow{(\dots)^3} \dots \xleftarrow{-2} \dots$

De inverse functie van  $h$  is  $m(x) = -1 \cdot ((x-2)^3 - 4) = -(x-2)^3 + 4$ .

**Pagina 175:**

**13a**  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = 25$

$$\sqrt[3]{b} = 25 - \sqrt[3]{a}$$

$$b = (25 - \sqrt[3]{a})^3$$

**b**  $2ab^3 + 1 = 5$

$$2ab^3 = 4$$

$$ab^3 = 2$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{2}{a}}$$



$$\begin{aligned} \text{c} \quad a+4 &= 0,4b^2 \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b} \\ (a+4)^6 &= 0,4^6 \cdot b^{12} \cdot b^3 \cdot b^2 \\ b^{17} &= (a+4)^6 \cdot \left(\frac{1}{0,4}\right)^6 \\ b &= \sqrt[17]{2,5^6 \cdot (a+4)^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad 3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b &= 0 \\ 2b &= 3\sqrt{a} + \sqrt{16a} \\ 2b &= 3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} \\ 2b &= 7\sqrt{a} \\ b &= 3,5\sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{14a} \quad (4q-3)^{1\frac{1}{2}} &= p \\ (4q-3)^3 &= p^2 \\ 4q-3 &= p^{\frac{2}{3}} \\ 4q &= 3 + p^{\frac{2}{3}} \\ q &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{p^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad (q-6) \cdot \sqrt[5]{2p} &= 1 \\ \sqrt[5]{2p} &= \frac{1}{q-6} \\ 2p &= \left(\frac{1}{q-6}\right)^5 \\ p &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(q-6)^5} = \frac{1}{2(q-6)^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{15a} \quad 9^a \cdot (\sqrt{3})^b &= \frac{1}{3} \\ 3^{2a} \cdot 3^{\frac{1}{2}b} &= 3^{-1} \\ 2a + \frac{1}{2}b &= -1 \\ \frac{1}{2}b &= -2a - 1 \\ b &= -4a - 2 \\ \text{b} \quad 2^a \cdot 8 &= \left(\frac{1}{2}\right)^b \cdot 4^a \\ 2^a \cdot 2^3 &= 2^{-b} \cdot 2^{2a} \\ a+3 &= -b+2a \\ b &= a-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a+3} &= 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{b} &= \sqrt{a+3} \\ \frac{1}{4}b &= a+3 \\ b &= 4a+12 \\ \text{d} \quad \sqrt{3a} + 2\sqrt{b} &= 0 \\ 2\sqrt{b} &= -\sqrt{3a} \\ 4b &= 3a \\ b &= \frac{3}{4}a \end{aligned}$$

**Pagina 176:**

$$\begin{aligned} \text{16a} \quad \text{Uit } 2x+y=1 \text{ volgt } y &= 1-2x. \\ \text{Vul dit in bij de tweede vergelijking:} \\ x^2+x(1-2x)+1-2x &= 1 \\ x^2+x-2x^2+1-2x &= 1 \\ -x^2-x &= 0 \\ -x(x+1) &= 0 \\ x=0 \text{ of } x=-1 \\ \text{De oplossingen zijn } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad \text{Uit } x-y=5 \text{ volgt } y &= x-5. \\ \text{Vul dit in bij de eerste vergelijking:} \\ \frac{8}{2x-3} + \frac{10}{x-1} &= 6 \\ 8(x-1) + 10(2x-3) &= 6(2x-3)(x-1) \\ 8x-8+20x-30 &= 6(2x^2-5x+3) \\ 12x^2-58x+56 &= 0 \\ x &= \frac{58 \pm 26}{24} \\ x &= 3\frac{1}{2} \text{ of } x = 1\frac{1}{3} \\ \text{De oplossingen zijn } \begin{cases} x=3\frac{1}{2} \\ y=-1\frac{1}{2} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} x=1\frac{1}{3} \\ y=3\frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \text{Vul de tweede vergelijking in bij de eerste vergelijking:} \\ 3x+2(x^2+1) &= 11 \end{aligned}$$

$$2x^2 + 3x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm 9}{4}$$

$$x = -3 \text{ of } x = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{De oplossingen zijn } \begin{cases} x = -3 \\ y = 10 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} x = 1\frac{1}{2} \\ y = 3\frac{1}{4} \end{cases}$$

- 17 Er moet gelden  $f(a) - g(a) = \frac{1}{6}$ .

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6}$$

$$6a - 6 = a^2 \quad (\text{links en rechts} \times 6a^2)$$

$$a^2 - 6a + 6 = 0$$

$$a = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$a = 3 - \sqrt{3} \text{ of } a = 3 + \sqrt{3}$$

**Pagina 177:**

- 18 Er moet gelden  $x_A = y_T$ .

De coördinaten van A bepalen:

$$f(x) = 0$$

$$bx - \frac{1}{3}x^3 = 0$$

$$x(b - \frac{1}{3}x^2) = 0$$

$$\text{Als } x \neq 0 \text{ is } 3b - x^2 = 0.$$

$$\text{Dit geeft } x = \pm \sqrt{3b}. \text{ Alleen } x = \sqrt{3b} \text{ voldoet en dus is } A(\sqrt{3b}, 0).$$

De coördinaten van T bepalen:

$$f'(x) = b - x^2$$

$$b - x^2 = 0$$

$$x = \sqrt{b} \text{ (} x = -\sqrt{b} \text{ voldoet niet).}$$

$$\text{Dan is } y_T = f(\sqrt{b}) = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3 = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}b\sqrt{b} = \frac{2}{3}b\sqrt{b}.$$

$$\text{Rechthoek } OABC \text{ is een vierkant als } \sqrt{3b} = \frac{2}{3}b\sqrt{b}.$$

$$\text{Dit geeft } \sqrt{3} = \frac{2}{3}b \text{ dus } b = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

- 19 De zijden van de grijze rechthoek rechtsboven zijn  $1 - \frac{1}{p}$  en  $3 - p$ .

$$\text{Er moet gelden: opp} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot (3 - p) = \frac{1}{2}.$$

$$(p - 1) \cdot (3 - p) = \frac{1}{2}p \quad (\text{links en rechts} \times p)$$

$$3p - p^2 - 3 + p = \frac{1}{2}p$$

$$p^2 - 3\frac{1}{2}p + 3 = 0$$

$$(p - 1\frac{1}{2})(p - 2) = 0$$

$$p = 1\frac{1}{2} \text{ en } p = 2$$

**Pagina 178:**

- 20a De afmetingen van de doos zijn  $15 - 2x$  bij  $15 - 2x$  bij  $x$ .

$$\text{Er moet gelden: inhoud} = x(15 - 2x)^2 = 100.$$

$$\text{Invoer: } Y1 = X(15 - 2X)^2 \text{ en } Y2 = 100$$

$$\text{Venster: } X_{\min} = 0, X_{\max} = 7.5, Y_{\min} = 0, Y_{\max} = 200$$

Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solv, ISCT (Casio)

De oplossingen zijn  $x \approx 0,51$  of  $x \approx 5,34$ .

De lengte van de kartonnen rechthoek is ongeveer  $15,0 + 15,0 - 0,51 \approx 29,5$  dm of  $15,0 + 15,0 - 5,34 \approx 24,7$  dm.

**b** De bodem is  $b - 2x$  bij  $b - 2x$ .

De inhoud is  $x(b - 2x)^2 = 100$  dus  $(b - 2x)^2 = \frac{100}{x}$ .

**c** Er geldt  $A = b(2b - x)$ . Invullen van  $b = 2x + \frac{10}{\sqrt{x}}$  geeft:

$$A = \left(2x + \frac{10}{\sqrt{x}}\right) \left(3x + \frac{20}{\sqrt{x}}\right)$$

$$A = 6x^2 + 2x \cdot \frac{20}{\sqrt{x}} + 3x \cdot \frac{10}{\sqrt{x}} + \frac{200}{x}$$

$$A = 6x^2 + 40\sqrt{x} + 30\sqrt{x} + \frac{200}{x}$$

$$A = 6x^2 + 70\sqrt{x} + \frac{200}{x}$$

**d** Uit  $A(x_1) = A(x_2) = A(4x_1)$  volgt

$$6x_1^2 + 70\sqrt{x_1} + \frac{200}{x_1} = 6(4x_1)^2 + 70\sqrt{4x_1} + \frac{200}{4x_1}$$

$$\text{Invoer: } Y1 = 6X^2 + 70\sqrt{X} + \frac{200}{X} \text{ en } Y2 = 96X^2 + 140\sqrt{X} + \frac{50}{X}$$

Venster: Xmin = 0, Xmax = 5, Ymin = 0, Ymax = 400

Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solv, ISCT (Casio)

De oplossing is  $x_1 \approx 0,97$  dm.

**Pagina 179:**

$$21 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,001) - f(1)}{1,001 - 1} = \frac{3,002386775..... - 3}{0,001} = \frac{0,002386775.....}{0,001} \approx 2,39$$

**Pagina 180:**

$$22a \quad f'(x) = 4x - 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 4x - \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$b \quad g'(x) = -\frac{5}{3} \cdot -4x^{-5} = \frac{20}{3x^5}$$

$$c \quad h'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 + 6x^{-4} = 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{6}{x^4}$$

$$d \quad k'(x) = \frac{4x(x^2 + 3)(x - 1) - (x^2 + 3)^2}{(x - 1)^2}$$

$$e \quad m'(x) = -1 + 6x^2$$

$$f \quad n'(x) = 4 \cdot -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} - 6 \cdot -2x^{-3} - \frac{1}{2} \cdot -3 \cdot x^{-4} = \frac{-2}{x\sqrt{x}} + \frac{12}{x^3} + \frac{3}{2x^4}$$

$$g \quad p'(x) = -4x^{-3} + 9x^{-4} - 4x^{-5} = -\frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4} - \frac{4}{x^5}$$

$$h \quad q'(x) = 5(x - 2)^4 \cdot \sqrt{x^2 - 5x} + (x - 2)^5 \cdot \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}$$

## Pagina 181:

- 23a** Een grafiek is toenemend stijgend als geldt  $f'(x) > 0$  en  $f''(x) > 0$ .

$$f'(x) = (2x - 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (x^2 - 2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = (-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x) = (-x + 3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = (\frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ als } -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0. \text{ Dus als } x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{-1} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Met een plot vind je dat de grafiek van  $f$  stijgend is op het interval  $\langle 3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5} \rangle$ .

$$f''(x) = 0 \text{ als } \frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 4 = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x - 2)(x - 8) = 0$$

Met een plot vind je dat de grafiek van  $f'$  stijgend is op het interval

$$\langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 8, \infty \rangle.$$

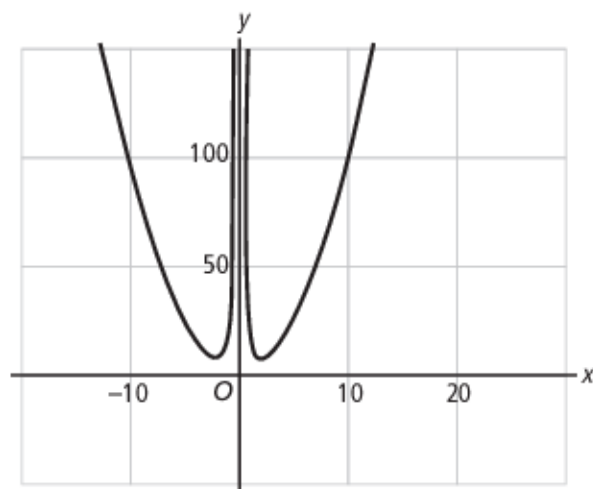
Conclusie: de grafiek van  $f$  is toenemend stijgend op  $\langle 3 - \sqrt{5}, 2 \rangle$ .

- b** De buigpunten bij  $x = 2$  en  $x = 8$  zijn:

$$(2, f(2)) = (2, 0)$$

$$(8, f(8)) = (8; 48e^{-4}) \approx (8; 0,88)$$

- 24a**



$$x^2 + \frac{16}{x^2} = 0$$

$$x^4 + 16 = 0$$

$$x^4 = -16$$

Deze vergelijking heeft geen oplossing, dus  $g$  heeft geen nulpunten.

- b**  $g(x) = x^2 + \frac{16}{x^2} = x^2 + 16x^{-2}$

$$g'(x) = 2x - 32x^{-3}$$

$$g'(4) = 8 - 32 \cdot 4^{-3} = 7\frac{1}{2}$$

Een vergelijking van de raaklijn is  $y = 7\frac{1}{2}x + b$ .

De coördinaten van  $P$  invullen geeft  $17 = 7\frac{1}{2} \cdot 4 + b$ , dus  $b = -13$ .

Een vergelijking van de raaklijn is  $y = 7\frac{1}{2}x - 13$ .

- c** Er moet gelden  $g'(x) = 0$ .

$$2x - 32x^{-3} = 0$$

$$2x = 32x^{-3}$$

$$2x^4 = 32$$

$$x^4 = 16$$

$$x = -2 \text{ of } x = 2$$

De punten met een horizontale raaklijn zijn  $(-2, 8)$  en  $(2, 8)$ .

- 25** Er moet gelden  $f_a(x) = y$  ofwel  $x + 6\sqrt{2x+a} = 3x + 19$ .  
 Er moet ook gelden  $f'_a(x) = 3$ .  
 Dit laatste geeft  $1 + 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+a}} \cdot 2 = 3$ , dus  $\sqrt{2x+a} = 3$ .  
 Dit invullen in  $x + 6 \cdot \sqrt{2x+a} = 3x + 19$  geeft  $x + 6 \cdot 3 = 3x + 19$ , dus  $-2x = 1$ .  
 Dit geeft  $x = -\frac{1}{2}$ .  
 Dan is  $\sqrt{2 \cdot -\frac{1}{2} + a} = 3$ , dus  $-1 + a = 9$ . Dit geeft  $a = 10$ .

- 26** Er moet gelden  $f_a(x) = 18$  en  $f'_a(x) = 0$ .

De tweede vergelijking geeft:

$$3 + a \cdot -\frac{1}{x^2} = 0$$

$$-\frac{a}{x^2} = -3$$

$$a = 3x^2$$

Invullen in de eerste vergelijking:

$$3x + \frac{3x^2}{x} = 18$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

$$\text{Dit geeft } a = 3 \cdot 3^2 = 27.$$

**Pagina 182:**

- 27** Er geldt  $x_Q - x_P = 1 - p^2 - p$ .  
 De oppervlakte van de rechthoek is  
 $O(p) = y_P \cdot (x_Q - x_P) = p(1 - p^2 - p) = p - p^3 - p^2$ .  
 De oppervlakte van de rechthoek heeft een uiterste waarde als  $O'(p) = 0$   
 $1 - 3p^2 - 2p = 0$   
 $3p^2 + 2p - 1 = 0$   
 $p = \frac{-2 \pm 4}{6}$   
 $p = \frac{1}{3}$  of  $p = -1$   
 Alleen  $p = \frac{1}{3}$  voldoet.

- 28** Er moet gelden  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 0 + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{625 - 10x}} \cdot -10$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{20}{\sqrt{625 - 10x}}$$

$$2 - \frac{20}{\sqrt{625 - 10x}} = 0$$

$$\sqrt{625 - 10x} = 10$$

$$625 - 10x = 100, \text{ dus } x = \frac{-525}{-10} = 52,5$$

De maximale hoogte is  $y = 2 \cdot 52,5 - 100 + 4 \cdot 10 = 45$  meter.



**Pagina 183:**

- 29**
- Voor de toppen geldt
- $f'_a(x) = 0$
- .

$$a - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{a}$$

$$x_{top} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$y_{top} = f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = a\sqrt{\frac{1}{a}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}}} = \frac{a}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$

Dit invullen in  $xy = c$  geeft  $\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 2\sqrt{a} = 2$ , dus  $c = 2$ .

- 30**
- Voor de lengte
- $l$
- van het verbindingsslijnstuk geldt
- $l(b) = \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b} = b^{-\frac{1}{2}} - b^{-1}$
- .
- 
- Dan is
- $l'(b) = -\frac{1}{2} \cdot b^{-\frac{1}{2}} - (-b^{-2}) = \frac{-1}{2b\sqrt{b}} + \frac{1}{b^2}$
- .

Oplossen van  $l'(b) = 0$  geeft

$$\frac{1}{2b\sqrt{b}} = \frac{1}{b^2}$$

$$2b\sqrt{b} = b^2$$

$$2 = \frac{b^2}{b\sqrt{b}} = \sqrt{b}, \text{ dus } b = 4$$

$$\text{De maximale lengte is } l(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

**Pagina 185:**

**31a**  $F(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 2\frac{1}{2}x^2 - x + c$

**b**  $G(x) = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$

**c**  $H(x) = -x^{-1} - 2x^{-2} + c = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + c$

**d**  $K(x) = \frac{1}{6} \cdot (7x+1)^6 \cdot \frac{1}{7} + c = \frac{1}{42}(7x+1)^6 + c$

**e**  $M(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{6}x^3(x^3 - 2) + c$

**f**  $N(x) = -2x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + c = \frac{-2}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$

**32a**  $\int_2^8 \frac{1}{4}x^3 dx = \left[ \frac{1}{16}x^4 \right]_2^8 = \frac{1}{16} \cdot 8^4 - \frac{1}{16} \cdot 2^4 = 255$

**b**  $h(x) = 0$

$$4x - 1\frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$x(4 - 1\frac{1}{2}x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{2\frac{2}{3}} (4x - 1\frac{1}{2}x^2) dx = \left[ 2x^2 - \frac{1}{2}x^3 \right]_0^{2\frac{2}{3}} = \left( 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\right)^3 \right) - (0) = \frac{128}{27} = 4\frac{20}{27}$$

**c**  $f(x) = h(x)$

$$\frac{1}{4}x^3 = 4x - 1\frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{4}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 - 4x = 0$$

$$\frac{1}{4}x(x^2 + 6x - 16) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } (x + 8)(x - 2) = 0$$

De snijpunten zijn bij  $x = -8$ ,  $x = 0$  en  $x = 2$ .

De gevraagde oppervlakten zijn:

$$\int_{-8}^0 \left( \frac{1}{4}x^3 - (4x - 1\frac{1}{2}x^2) \right) dx = \left[ \frac{1}{16}x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right]_{-8}^0 = 0 - \left( \frac{1}{16} \cdot (-8)^4 - 2 \cdot (-8)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-8)^3 \right) = 128$$

$$\int_0^2 \left( 4x - 1\frac{1}{2}x^2 - \left( \frac{1}{4}x^3 \right) \right) dx = \left[ 2x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{16}x^4 \right]_0^2 = \left( 2 \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^3 - \frac{1}{16} \cdot 2^4 \right) - 0 = 3$$

**Pagina 186:**

**33a**  $f(x) = g(x)$

$$2\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^2$$

$$4\sqrt{x} = x^2$$

$$16x = x^4$$

Dit geeft  $x = 0$  of  $x^3 = 16$ .

De snijpunten horen bij  $x = 0$  of  $x = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$  en zijn  $(0, 0)$  en  $(2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4})$ .

**b**  $\int_0^{2\sqrt[3]{2}} \left( 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left[ \frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^{2\sqrt[3]{2}} = \left( \frac{4}{3} \cdot 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{6} \cdot (2\sqrt[3]{2})^3 \right) - 0 = \frac{4}{3} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} \cdot 2^4 = 2\frac{2}{3}$

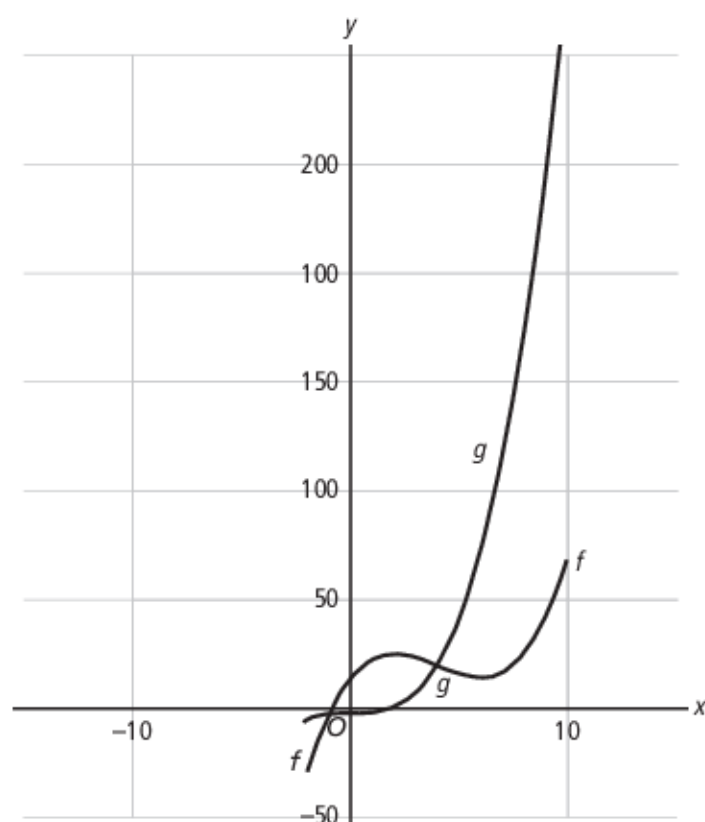
**34a** Er moet gelden  $f'(x) = 0$ .

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 6$$

De coördinaten van de toppen  $(2, f(2)) = (2, 26\frac{2}{3})$  en  $(6, f(6)) = (6, 16)$ .



**b**  $f(x) = g(x)$

$$\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16 = \frac{1}{3}x^3$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 4$$

$$\int_0^4 \left( \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16 - \frac{1}{3}x^3 \right) dx = \int_0^4 (-4x^2 + 12x + 16) dx =$$

$$\left[ -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 16x \right]_0^4 = \left( -\frac{4}{3} \cdot 4^3 + 6 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 \right) - (0) = 74\frac{2}{3}$$

**c**  $OQ = p$  en  $PQ = f(p) = \frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16$

De oppervlakte van driehoek  $OPQ$  is  $\frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2}p \cdot (\frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16)$ .

**d** Als de oppervlakten I en II gelijk zijn, moet gelden

$$\int_0^p f(x) dx = 2 \cdot \text{oppervlakte } \triangle OPQ$$

$$\int_0^p \left( \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16 \right) dx = p \cdot \left( \frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16 \right)$$

$$\left[ \frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 16x \right]_0^p = \frac{1}{3}p^4 - 4p^3 + 12p^2 + 16p$$

$$\frac{1}{12}p^4 - \frac{4}{3}p^3 + 6p^2 + 16p = \frac{1}{3}p^4 - 4p^3 + 12p^2 + 16p$$

$$\frac{1}{4}p^4 - 2\frac{2}{3}p^3 + 6p^2 = 0$$

$$p^2 \left( \frac{1}{4}p^2 - 2\frac{2}{3}p + 6 \right) = 0$$

$$p = 0 \text{ of } \frac{1}{4}p^2 - \frac{8}{3}p + 6 = 0.$$

$$p = 0 \text{ of } 3p^2 - 32p + 72 = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p = \frac{32 \pm \sqrt{160}}{6}$$

$$p = 0 \text{ of } p \approx 3,23 \text{ of } p \approx 7,44.$$

De oplossing  $p \approx 3,23$  voldoet.

**Pagina 187:**

**35a** Riemann-som:

TI: sum(seq( $0.1 \times (X^2 - 4X + 6)$ ),  $X$ , 1.05, 2.95, 0.1)

Casio: Sum(Seq( $X^2 - 4X + 6$ ,  $X$ , 1.05, 2.95, 0.1)  $\times$  0.1

De uitkomst is 4,665.

Exact:

$$\int_1^3 (x^2 - 4x + 6) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x \right]_1^3 = \left( \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 \right) - \left( \frac{1}{3} - 2 + 6 \right) = 4\frac{2}{3}$$

**b** Riemann-som:

TI: sum(seq( $0.25 \times (X^{0.5} + 2)$ ),  $X$ , 1.125, 5.875, 0.25)

Casio: Sum(Seq( $X^{0.5} + 2$ ,  $X$ , 1.125, 5.875, 0.25)  $\times$  0.25

De uitkomst is 19,132.

Exact:

$$\int_1^6 (\sqrt{x} + 2) dx = \left[ \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2x \right]_1^6 = (4\sqrt{6} + 12) - \left( \frac{2}{3} + 2 \right) = 9\frac{1}{3} + 4\sqrt{6} \approx 19,1313.$$

**36** De nulpunten zijn  $x = 0$  en  $x = 30$ .

$$\int_0^{30} \pi \cdot (0,564 \cdot \sqrt{x(30-x)})^2 dx = \int_0^{30} \pi \cdot 0,564^2 \cdot x(30-x) dx = 0,564^2 \pi \cdot \int_0^{30} (30x - x^2) dx$$

$$= 0,564^2 \pi \left[ 15x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{30} = 0,564^2 \pi (13\,500 - 9000 - 0) \approx 4497 \text{ cm}^3$$

- 37a** Omwentelingslichaam  $G$  zal de grootste inhoud hebben, want figuur  $II$  heeft maximaal straal 8 en figuur  $I$  heeft maximaal straal 4.

- b** Inhoud  $G$ :

$$\pi \int_0^4 x^3 dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^4 = \pi \left( \left( \frac{1}{4} \cdot 4^4 \right) - (0) \right) = 64\pi \approx 201,06.$$

Inhoud  $R$ :

Eerst de grafiek van  $f$  spiegelen in de lijn  $y = x$ . Dit geeft de grafiek van  $y = x^{\frac{2}{3}}$ .

$$\pi \int_0^8 (x^{\frac{2}{3}})^2 dx = \pi \int_0^8 x^{\frac{4}{3}} dx = \pi \left[ \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} \right]_0^8 = \pi \cdot \frac{3}{7} \cdot 8^{\frac{7}{3}} = \pi \cdot \frac{3}{7} \cdot 2^7 = 54 \frac{6}{7} \pi \approx 172,34 \text{ cm}^3.$$

- c** Inhoud  $A$  vind je door eerst de beide gebieden samen te wentelen om de  $x$ -as en deze inhoud te verminderen met inhoud  $G$ .

Gebruik de inhoudsformule voor een cilinder.

$$\text{inhoud } A = \pi \cdot 8^2 \cdot 4 - \text{inhoud } G = 256\pi - 64\pi = 192\pi$$

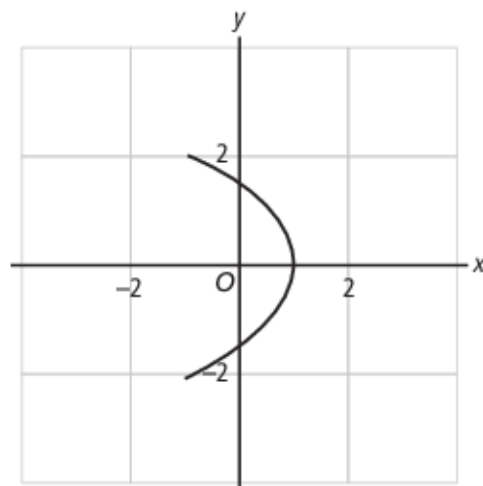
Inhoud  $B$  vind je op een vergelijkbare manier.

$$\text{inhoud } B = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - \text{inhoud } R = 128\pi - 54 \frac{6}{7} \pi = 73 \frac{1}{7} \pi$$

Het verschil in inhoud tussen  $A$  en  $B$  is  $192\pi - 73 \frac{1}{7} \pi = 118 \frac{6}{7} \pi \approx 373,4 \text{ cm}^3$ .

**Pagina 188:**

**38a**



**b** 
$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{(-2\sin(2t))^2 + (2\cos(t))^2} dx = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{4\sin^2(2t) + 4\cos^2(t)} dx \approx 5,92$$

- 39** De nulpunten zijn  $x = 0$  en  $x = 20$ .

$$\text{De lengte is } \int_0^{20} \sqrt{1 + (-x + 10)^2} dx \approx 103,50.$$

**Pagina 189:**

- 40a** Het snijden van de parabool en de lijn geeft de vergelijking  $4x - x^2 = ax$ .

$$x(4 - x) = ax$$

$$x = 0 \text{ of } 4 - x = a$$

Uit de laatste vergelijking volgt  $x_A = 4 - a$ .

Invullen in  $y = ax$  geeft  $y_A = a(4 - a) = 4a - a^2$ .

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & \int_0^{4-a} (4x - x^2 - ax) dx = \left[ 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^{4-a} = \\ & (2(4-a)^2 - \frac{1}{3}(4-a)^3 - \frac{1}{2}a(4-a)^2) - (0) = \\ & (4-a)^2 \cdot (2 - \frac{1}{3}(4-a) - \frac{1}{2}a) = \\ & (4-a)^2 \cdot (2 - 1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}a) = \\ & (4-a)^2 \cdot (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}a) = \\ & (4-a)^2 \cdot \frac{1}{6}(4-a) = \\ & \frac{1}{6} \cdot (4-a)^3 \end{aligned}$$

$$\text{c} \quad \text{Er moet gelden opp } V = \frac{1}{2} \cdot \int_0^4 (4x - x^2) dx$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(4-a)^3 &= \frac{1}{2} \left[ 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 \\ \frac{1}{6}(4-a)^3 &= \frac{1}{2} (32 - 21\frac{1}{3} - 0) \\ \frac{1}{6}(4-a)^3 &= 5\frac{1}{3} \\ (4-a)^3 &= 32 \\ 4-a &= \sqrt[3]{32} \\ a &= 4 - \sqrt[3]{32} \end{aligned}$$

$$41 \quad \text{De inhoud is } \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-x})^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx \text{ ofwel } \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-x})^2 - x^2 dx.$$

$$\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-x})^2 - x^2 dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x-x^2) dx = \pi \left[ x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$\pi \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \right) - 0 = \pi \left( \frac{12}{24} - \frac{3}{24} - \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{3}\pi$$

**Pagina 190:**

$$42a \quad L_z = \int_0^3 \sqrt{1 + (f_z'(x))^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + \left( \frac{2}{3} \cdot 1,5x^{\frac{1}{3}} \right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \left[ \frac{2}{3}(1+x)^{1,5} \right]_0^3 =$$

$$\left( \frac{2}{3}(1+3)^{1,5} \right) - \left( \frac{2}{3}(1+0)^{1,5} \right) = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{4} - \frac{2}{3} \cdot 1\sqrt{1} = \frac{2}{3} \cdot 7 = 4\frac{2}{3}$$

$$\text{b} \quad \pi \int_0^3 (0,9x^{1,5})^2 dx - \pi \int_0^3 (0,5x^{1,5})^2 dx = \pi \int_0^3 (0,81x^3 - 0,25x^3) dx =$$

$$\pi \int_0^3 (0,81x^3 - 0,25x^3) dx = \pi \int_0^3 (0,56x^3) dx = \pi \left[ 0,56 \cdot \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 = \pi \cdot 0,14 \cdot 3^4 = 11,34\pi$$

$$43 \quad \text{Voor de snijpunten geldt } f_{12}(x) = x.$$

$$12 + 6\sqrt{x-12} = x$$

$$6\sqrt{x-12} = x - 12$$

$$x - 12 = 0 \text{ of } 6 = \sqrt{x-12}$$

$$x = 12 \text{ of } x = 48$$

$$\int_{12}^{48} (12 + 6\sqrt{x-12} - x) dx = \left[ 12x + 6 \cdot \frac{2}{3}(x-12)^{1,5} - \frac{1}{2}x^2 \right]_{12}^{48} =$$

$$(12 \cdot 48 + 4 \cdot (48-12)^{1,5} - 0,5 \cdot 48^2) - (12 \cdot 12 + 4(12-12)^{1,5} - \frac{1}{2} \cdot 12^2) =$$

$$(576 + 4 \cdot (36)^{1,5} - 1152) - (72) = 216$$

**Pagina 192:**

$$44a \quad {}^2\log(36) - {}^2\log(9) + {}^2\log(5) = {}^2\log\left(\frac{36}{9} \times 5\right) = {}^2\log(20)$$



$$\text{b} \quad \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(49) + 2 \cdot {}^5\log(3) = {}^5\log(\sqrt{49}) + {}^5\log(3^2) = {}^5\log(7 \cdot 9) = {}^5\log(63)$$

$$\text{c} \quad 2 + {}^6\log(x) = {}^6\log(36) + {}^6\log(x) = {}^6\log(36x)$$

$$\text{d} \quad -3 + {}^4\log((9p)^2) = {}^4\log(4^{-3}) + {}^4\log(81p^2) = {}^4\log\left(\frac{81p^2}{64}\right)$$

$$\text{e} \quad {}^8\log(2a) + {}^8\log(a+3) = {}^8\log(2a(a+3)) = {}^8\log(2a^2 + 6a)$$

$$\text{f} \quad 4 \cdot {}^{0,1}\log(x) - {}^{0,1}\log(x^2) = {}^{0,1}\log(x^4) - {}^{0,1}\log(x^2) = {}^{0,1}\log(x^2)$$

$$45\text{a} \quad {}^2\log(a) + {}^2\log(b) = 3$$

$${}^2\log(ab) = {}^2\log(8)$$

$$ab = 8$$

$$b = \frac{8}{a}$$

$$\text{b} \quad a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5$$

$${}^3\log(b) = 10 - 2a$$

$$b = 3^{10-2a}$$

$$\text{c} \quad a + 4 = 2b^2\sqrt{b}$$

$$b^{2\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a + 2$$

$$b = \left(\frac{1}{2}a + 2\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$b = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}a + 2\right)^2}$$

$$\text{d} \quad 3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b = 0$$

$$2b = 3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} = 7\sqrt{a}$$

$$b = 3\frac{1}{2}\sqrt{a}$$

$$46\text{a} \quad \text{De pijlenketting van } f \text{ is: } x \xrightarrow{\times-3} \dots \xrightarrow{+18} \dots \xrightarrow{{}^2\log(\dots)} f(x)$$

$$\text{De omgekeerde pijlenketting is: } i(x) \xleftarrow{\times-\frac{1}{3}} \dots \xleftarrow{-18} \dots \xleftarrow{{}^2-} x$$

$$\text{De inverse functie is } i(x) = -\frac{1}{3} \cdot (2^x - 18) = 6 - \frac{1}{3} \cdot 2^x.$$

$$\text{b} \quad \text{De pijlenketting van } g \text{ is: } x \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{-1} \dots \xrightarrow{{}^3\log(\dots)} \dots \xrightarrow{-2} g(x).$$

$$\text{De omgekeerde pijlenketting is: } i(x) \xleftarrow{\times\frac{1}{2}} \dots \xleftarrow{+1} \dots \xleftarrow{{}^3-} \dots \xleftarrow{+2} x.$$

$$\text{De inverse functie is } i(x) = \frac{1}{2}(3^{x+2} + 1).$$

$$\text{c} \quad \text{De pijlenketting van } h \text{ is: } x \xrightarrow{\times-1} \dots \xrightarrow{+5} \dots \xrightarrow{{}^3-} \dots \xrightarrow{\times 2} h(x).$$

$$\text{De omgekeerde pijlenketting is } i(x) \xleftarrow{\times-1} \dots \xleftarrow{-5} \dots \xleftarrow{{}^3\log(\dots)} \dots \xleftarrow{:2} x.$$

$$\text{De inverse functie is } i(x) = -1 \times ({}^3\log(\frac{1}{2}x) - 5) = 5 - {}^3\log(\frac{1}{2}x)$$

$$\text{d} \quad \text{De pijlenketting van } k \text{ is: } x \xrightarrow{-1} \dots \xrightarrow{(\frac{1}{2})-} \dots \xrightarrow{\times-1} \dots \xrightarrow{+10} k(x).$$

$$\text{De omgekeerde pijlenketting is } i(x) \xleftarrow{+1} \dots \xleftarrow{{}^{\frac{1}{2}}\log(\dots)} \dots \xleftarrow{\times-1} \dots \xleftarrow{-10} x \text{ vind je}$$

$$\text{de inverse } i(x) = +1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(-1(x-10)) = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(10-x).$$

**Pagina 193:**

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(7)$$

$$47\text{a} \quad 8 \cdot 4^{x+2} = 1$$

$$2^3 \cdot (2^2)^{x+2} = 2^0$$

$$3 + 2x + 4 = 0$$

$$2x = -7$$

$$x = -3\frac{1}{2}$$

$$\text{b} \quad \frac{1}{25} \cdot 5^{x+3} = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

$$5^{-2} \cdot 5^{x+3} = 5 \cdot 5^{-x}$$

$$-2 + x + 3 = 1 - x$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{c} \quad 3^{2x+1} = 7$$

$$2x + 1 = {}^3\log(7)$$

$$2x = {}^3\log(7) - 1$$

$$\text{d} \quad 2 + 5 \cdot 7^{4x} = 17$$

$$5 \cdot 7^{4x} = 15$$

$$7^{4x} = 3$$

$$4x = {}^7\log(3)$$

$$x = \frac{1}{4} \cdot {}^7\log(3)$$

$$\text{e} \quad 6 - {}^3\log(x+4) = 5\frac{1}{2}$$

$${}^3\log(x+4) = \frac{1}{2}$$

$$x + 4 = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 3^{\frac{1}{2}} - 4 = \sqrt{3} - 4$$

$$\text{f} \quad 3 \cdot {}^4\log(x-4) = 6$$

$${}^4\log(x-4) = 2$$

$$x - 4 = 4^2$$

$$x = 20$$

$$48\text{a} \quad \ln(2x-1) = 3$$

$$2x - 1 = e^3$$

$$2x = 1 + e^3$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^3$$

$$\text{b} \quad 2e^{5-x} = 3$$

$$e^{5-x} = 1\frac{1}{2}$$

$$5 - x = \ln(1\frac{1}{2})$$

$$x = 5 - \ln(1\frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \sqrt{\ln(x)} &= 1\frac{1}{2} \\ \ln(x) &= (1\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{4} \\ x &= e^{2\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad e^{2-x^3} &= 4 \\ 2-x^3 &= \ln(4) \\ x^3 &= 2-\ln(4) \\ x &= \sqrt[3]{2-\ln(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49\text{a} \quad b &= 3e^{2a-1} \\ \frac{1}{3}b &= e^{2a-1} \\ 2a-1 &= \ln(\frac{1}{3}b) \\ 2a &= 1 + \ln(\frac{1}{3}b) \\ a &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln(\frac{1}{3}b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad b &= 2\ln(a-5) \\ \frac{1}{2}b &= \ln(a-5) \\ a-5 &= e^{\frac{1}{2}b} \\ a &= 5 + e^{\frac{1}{2}b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad b &= \ln(2a) + \ln(3a) \\ b &= \ln(6a^2) \\ 6a^2 &= e^b \\ a^2 &= \frac{1}{6}e^b \\ a &= \sqrt{\frac{1}{6}e^b} \text{ of } a = -\sqrt{\frac{1}{6}e^b} \\ &\text{Alleen de eerste oplossing voldoet.} \\ \text{d} \quad b &= e^{a^2+1} \\ a^2+1 &= \ln(b) \\ a^2 &= \ln(b)-1 \\ a &= \sqrt{\ln(b)-1} \text{ of } a = -\sqrt{\ln(b)-1} \\ &\text{Beide oplossingen voldoen.} \end{aligned}$$

Pagina 194:

$$50\text{a} \quad f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{3x+5} \cdot 3 = \frac{3}{(3x+5) \cdot \ln(2)}$$

$$\text{b} \quad g'(t) = 1500 \cdot 0,94^t \cdot \ln(0,94)$$

$$\text{c} \quad s'(u) = -2(1-\ln(u))^{-2} \cdot \frac{-1}{u} = \frac{2}{u(1-\ln(u))^2}$$

$$\text{d} \quad h'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + 2x \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \ln^2(x) + 2\ln(x)$$

$$\text{e} \quad k'(x) = 3^{x^2+1} \cdot \ln(3) \cdot 2x$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad j(t) &= 250 \cdot (1 + 15 \cdot e^{-0,18t})^{-1} \\ j'(t) &= -250 \cdot (1 + 15 \cdot e^{-0,18t})^{-2} \cdot 15 \cdot e^{-0,18t} \cdot -0,18 = \frac{675}{e^{0,18t} \cdot (1 + 15 \cdot e^{-0,18t})^2} \end{aligned}$$

$$51\text{a} \quad F(x) = 5e^{3x+2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}e^{3x+2} + c$$

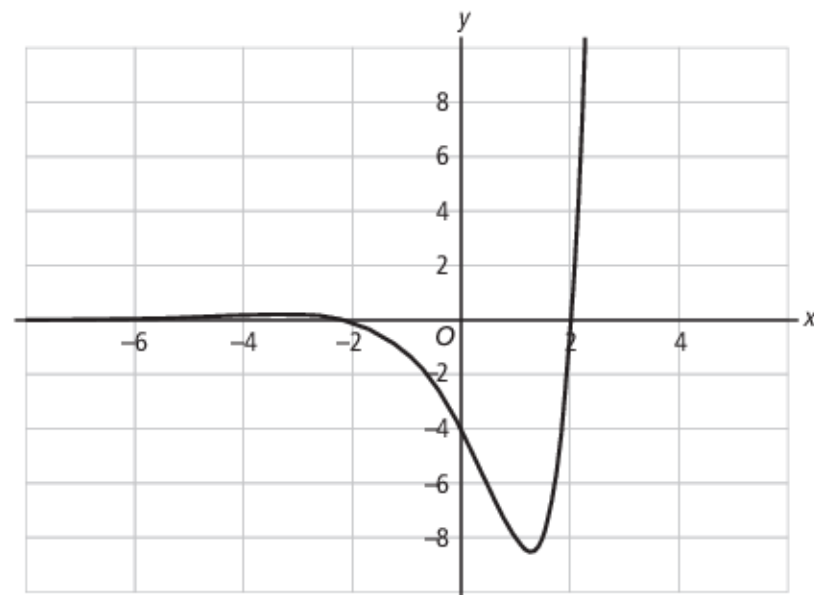
$$\text{b} \quad g(x) = \frac{2x-1}{x^2} = \frac{2}{x} - x^{-2}$$

$$G(x) = 2\ln|x| + x^{-1} + c = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + c$$

$$\text{c} \quad H(x) = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\ln(3)} \cdot 3^{5-x} + c = -\frac{3 \cdot 3^{5-x}}{2\ln(3)} + c$$

$$\text{d} \quad K(x) = 4 \ln|3x-5| + c$$

52a



- b**  $f(x) = 0$  geeft  $x^2 - 4 = 0$  dus  $x = 2$  of  $x = -2$ .
- c** Als  $x \rightarrow -\infty$  dan  $e^x \rightarrow 0$  en ook  $f(x) \rightarrow 0$ .  
De horizontale asymptoot is  $y = 0$ .
- d**  $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 4) \cdot e^x$   
 $2x \cdot e^x + (x^2 - 4) \cdot e^x = 0$   
 $(x^2 + 2x - 4) \cdot e^x = 0$   
 $x^2 + 2x - 4 = 0$   
 $x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$   
 $x = -1 - \sqrt{5}$  of  $x = -1 + \sqrt{5}$
- e**  $f(-1 - \sqrt{5}) = ((-1 - \sqrt{5})^2 - 4) \cdot e^{-1 - \sqrt{5}} \approx 0,25$   
 $f(-1 + \sqrt{5}) = ((-1 + \sqrt{5})^2 - 4) \cdot e^{-1 + \sqrt{5}} \approx -8,51$
- f** Er moet gelden  $F'(x) = f(x)$   
 $F'(x) = (2x + b) \cdot e^x + (x^2 + bx + c) \cdot e^x = (x^2 + 2x + bx + b + c) \cdot e^x$   
Dus is  $b = -2$  en is  $c = -2$ .
- g** De grafiek van  $f$  ligt dan onder de  $x$ -as dus is de oppervlakte  

$$-\int_{-2}^2 (x^2 - 4) \cdot e^x dx = [(x^2 - 2x - 2) \cdot e^x]_{-2}^2 =$$

$$((-2)^2 - 2 \cdot -2 - 2) \cdot e^{-2} - (2^2 - 2 \cdot 2 - 2) \cdot e^2 =$$

$$(4 + 4 - 2) \cdot e^{-2} - (4 - 4 - 2) \cdot e^2 = 6e^{-2} + 2e^2 \quad (\approx 15,6)$$

- 53a**  $C'(t) = 160(e^{-0,2t} \cdot -0,2 - e^{-t} \cdot -1) = -160(0,2e^{-0,2t} - e^{-t})$   
 $C'(0) = -160(0,2e^0 - e^0) = -160 \cdot -0,8 = 128 > 0$   
Dus de concentratie van het medicijn gaat direct na het injecteren stijgen.
- b** Er moet gelden  $C'(t) = 0$ .  
 $-160(0,2e^{-0,2t} - e^{-t}) = 0$   
 $0,2e^{-0,2t} = e^{-t}$   
 $e^{-0,2t} = 5e^{-t}$   
 $e^{0,8t} = 5$   
 $0,8t = \ln(5)$   
 $t_{max} = 1\frac{1}{4} \cdot \ln(5)$

**Pagina 195:**

- 54** Voor de lengte  $l$  van het lijnstuk  $AB$  geldt  $l(p) = f(p) - g(p) = 4\ln(p) - (\ln(p))^4$ .  
Deze lengte is maximaal als  $l'(p) = 4 \cdot \frac{1}{p} - 4(\ln(p))^3 \cdot \frac{1}{p} = 0$ .  

$$\frac{4}{p} - \frac{4\ln^3(p)}{p} = 0$$
  
 $\ln^3(p) = 1$  dus  $p = e$ .  
De maximale lengte is  $l(e) = 4\ln(e) - (\ln(e))^4 = 4 - 1 = 3$ .
- 55a**  $\frac{2}{1 + e^x} < \frac{1}{100} = \frac{2}{200}$   
 $1 + e^x > 200$   
 $e^x > 199$   
 $x > \ln(199)$

- b Er moet gelden  $F'(x) = f(x)$ .

$$F'(x) = 2 - 2 \cdot \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x = \frac{2(1+e^x)}{1+e^x} - \frac{2e^x}{1+e^x} = \frac{2}{1+e^x} = f(x)$$

c 
$$\int_0^{\ln(3)} \frac{2}{1+e^x} dx = [2x - 2\ln(1+e^x)]_0^{\ln(3)} = (2 \cdot \ln(3) - 2\ln(1+3)) - (0 - 2\ln(1+1)) =$$

$$2\ln(3) - 2\ln(4) + 2\ln(2) = \ln(9) - \ln(16) + \ln(4) = \ln(2\frac{1}{4})$$

- d Er moet gelden  $f(x) + f(-x) = 2$ .

$$\frac{2}{1+e^x} + \frac{2}{1+e^{-x}} = \frac{2}{1+e^x} + \frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{2(1+e^x)}{e^x+1} = 2$$

**Pagina 196:**

- 56a Er geldt  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = \frac{8e^x - 8xe^x}{(e^x)^2}$$

$$\frac{8e^x - 8xe^x}{(e^x)^2} = 0$$

$$8e^x - 8xe^x = 0$$

$$8e^x(1-x) = 0$$

$$x = 1$$

- b De hoogte van het vierkant is 2, dus er moet gelden  $f(x) = 2$ .

Invoer:  $Y1 = 8X/e^X$  en  $Y2 = 2$

Venster:  $X_{\min} = 0$ ,  $X_{\max} = 5$ ,  $Y_{\min} = 0$ ,  $Y_{\max} = 5$

Optie: CALC, intersect (TI) of G-Solv, ISCT (Casio)

De oplossingen zijn  $x \approx 0,3574$  en  $x \approx 2,1533$ .

De beide oplossingen verschillen minder dan 2 van elkaar, dus een vierkant met zijde 2 past niet in dit gebied.

- c Er geldt  $f(x) = g_n(x)$ .

$$\frac{8x}{e^x} = \frac{8nx}{e^{nx}}$$

$$\frac{1}{e^x} = \frac{n}{e^{nx}}$$

$$e^{nx} = ne^x$$

$$\frac{e^{nx}}{e^x} = n$$

$$e^{x(n-1)} = n$$

$$x(n-1) = \ln(n), \text{ dus } x = \frac{1}{n-1} \ln(n).$$

- d Voor het tweede snijpunt van  $g_3$  en  $f$  geldt  $x = \frac{1}{3-1} \ln(3) = \frac{1}{2} \ln(3)$ .

$$\text{De oppervlakte is } \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \left( \frac{24x}{e^{3x}} - \frac{8x}{e^x} \right) dx \approx 0,4637$$

**Pagina 197:**

- 57a  $f'(x) = \frac{1}{x}$  dus is  $f'(e) = \frac{1}{e}$ .

Een vergelijking van de raaklijn is  $y = \frac{1}{e}x + b$ .

De coördinaten van  $E$  invullen geeft  $1 = \frac{1}{e} \cdot e + b$ , dus  $b = 0$ .  
Dus de raaklijn gaat door  $(0, 0)$ .

$$\text{b} \quad \pi \int_0^e \left(\frac{1}{e}x\right)^2 dx - \pi \int_1^e (\ln(x))^2 dx.$$

De rekenmachine geeft  $\approx 2,8466 - 2,2565 \approx 0,59$ .

c De oppervlakte is  $O(x) = x \cdot -\ln(x) = -x \ln(x)$ .

Deze is maximaal als  $O'(x) = 0$  dus als  $-1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x} = 0$ .

$$-\ln(x) - 1 = 0$$

$$\ln(x) = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

d Er moet gelden  $x_B = 5x_A$  en  $\ln(x_A) = -\ln(x_B)$ .

Combineren geeft de vergelijking:

$$\ln(x) + \ln(5x) = 0$$

$$\ln(5x^2) = 0$$

$$5x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{5}} \text{ of } x = -\sqrt{\frac{1}{5}}. \text{ Alleen } x = \sqrt{\frac{1}{5}} \text{ voldoet.}$$

#### Pagina 198:

$$58a \quad \sin(23\frac{1}{2}\pi) = \sin(1\frac{1}{2}\pi) = -1$$

$$\text{b} \quad \cos(3\frac{3}{4}\pi) = \cos(-\frac{1}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{c} \quad \tan(-2\frac{3}{4}\pi) = \tan(\frac{1}{4}\pi) = 1$$

$$\text{d} \quad \sin(1\frac{2}{3}\pi) = -\sin(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{e} \quad \cos(7\frac{1}{6}\pi) = \cos(-\frac{5}{6}\pi) = \cos(\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{f} \quad \cos(-3\frac{2}{3}\pi) = \cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$$

#### Pagina 199:

$$59a \quad 2\sin(x) = -\sqrt{3}$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x = 1\frac{1}{3}\pi \text{ of } x = 1\frac{2}{3}\pi$$

$$\text{b} \quad \sin(x) + \cos(x) = 0$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 = 0$$

$$\tan(x) = -1$$

$$x = \frac{3}{4}\pi \text{ of } x = 1\frac{3}{4}\pi$$

$$\text{c} \quad 1 + 2\sin(x) = 0$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{6}\pi \text{ of } x = 1\frac{5}{6}\pi$$

$$\text{d} \quad \cos^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ of } \cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{3}\pi \text{ of } x = 1\frac{2}{3}\pi$$

$$60a \quad \text{Evenwichtsstand } y = \frac{16+8}{2} = 12, \text{ periode } 13-5=8, \text{ amplitude } 4,$$

$$\text{verschuiving } \frac{5+9}{2} = 7.$$

$$\text{Dit geeft } s(x) = 12 + 4\sin\left(\frac{2\pi}{8}(x-7)\right) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{4}\pi(x-7)\right).$$



- b De horizontale verschuiving is 9. De overige parameters zijn dezelfde.

$$c(x) = 12 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{8}(x-9)\right) = 12 + 4\cos\left(\frac{1}{4}\pi(x-9)\right)$$

**61a**  $\sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$   
 $2x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $2x - \frac{1}{2}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $2x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$  of  $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$

b  $2\cos(3x) = 1$   
 $\cos(3x) = \frac{1}{2}$   
 $3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $3x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$  of  $x = -\frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

c  $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(3x)$   
 $\cos(\frac{1}{2}\pi - (x + \frac{1}{4}\pi)) = \cos(3x)$   
 $\cos(\frac{1}{4}\pi - x) = \cos(3x)$   
 $3x = \frac{1}{4}\pi - x + k \cdot 2\pi$  of  $3x = -\frac{1}{4}\pi + x + k \cdot 2\pi$   
 $4x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$  of  $x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$

d  $\sin(3x) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$   
 $3x = x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $3x = \pi - x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $4x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$   
 $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$  of  $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

e  $2\sin^2(x) + \sin(x) = 1$   
 $2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$   
 $(2\sin(x) - 1) \cdot (\sin(x) + 1) = 0$   
 $\sin(x) = \frac{1}{2}$  of  $\sin(x) = -1$   
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

f  $2\cos^2(x) - \sin(x) = 1$   
 $2(1 - \sin^2(x)) - \sin(x) - 1 = 0$   
 $-2\sin^2(x) - \sin(x) + 1 = 0$   
 $2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$  (zie opdracht e)  
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

**Pagina 200:**

**62a**  $f'(x) = 3\cos(2x) \cdot 2 = 6\cos(2x)$

b  $g'(x) = 3 \cdot 2\cos(x) \cdot -\sin(x) = -6\sin(x)\cos(x)$

c  $h'(x) = \frac{\cos(x) \cdot (1 + \sin(x)) - \sin(x)\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2} = \frac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$

d  $k'(x) = -\sin(3x^2 + 2) \cdot 6x = -6x \cdot \sin(3x^2 + 2)$

e  $m'(x) = \frac{1}{2 + \sin(4x)} \cdot \cos(4x) \cdot 4 = \frac{4\cos(4x)}{2 + \sin(4x)}$

f  $n'(x) = \frac{-2\sin^2(2x) - \cos(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2}{(\sin(2x))^2}$

$$n'(x) = \frac{-2(\sin^2(2x) + \cos^2(2x))}{(\sin(2x))^2}$$

$$n'(x) = \frac{-2}{(\sin(2x))^2}$$

**63a**  $F(x) = -3 \cdot \frac{1}{2} \cos(2x) = -1\frac{1}{2} \cos(2x) + c$

**b**  $G(x) = -3 \sin(\frac{1}{3}\pi - x) + c$

**c**  $H(x) = 4x - 6 \sin(\frac{1}{2}x) + c$

**d**  $K(x) = x^2 - \frac{5}{3} \cos(6 - 3x) + c$

**64a**  $\sin(3x+1) + \sin(3x-2) = 2 \sin\left(\frac{3x+1+3x-2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x+1-3x+2}{2}\right)$   
 $= 2 \sin(3x - \frac{1}{2}) \cdot \cos(1\frac{1}{2})$

**b**  $\cos(2x) - \cos(5x) = -2 \sin\left(\frac{2x+5x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2x-5x}{2}\right) =$   
 $-2 \sin(3\frac{1}{2}x) \sin(-1\frac{1}{2}x) = 2 \sin(3\frac{1}{2}x) \sin(1\frac{1}{2}x)$

**c**  $\sin(4x) - \cos(3x) = \cos(\frac{1}{2}\pi - 4x) - \cos(3x) =$   
 $-2 \sin\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - 4x + 3x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - 4x - 3x}{2}\right) = -2 \sin(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi) \cdot \sin(-3\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)$

of

$$\sin(4x) - \cos(3x) = \sin(4x) - \sin(\frac{1}{2}\pi - 3x) =$$

$$2 \sin\left(\frac{4x - \frac{1}{2}\pi + 3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4x + \frac{1}{2}\pi - 3x}{2}\right) = 2 \sin(3\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)$$

**Pagina 201:**

**65a**  $f(x) = 4 \sin(x) \cdot \cos^3(x) - 4 \sin^3(x) \cdot \cos(x) \quad f(x) = 2 \cdot 2 \sin(x) \cos(x) (\cos^2(x) - \sin^2(x))$   
 $f(x) = 2 \sin(2x) \cos(2x)$

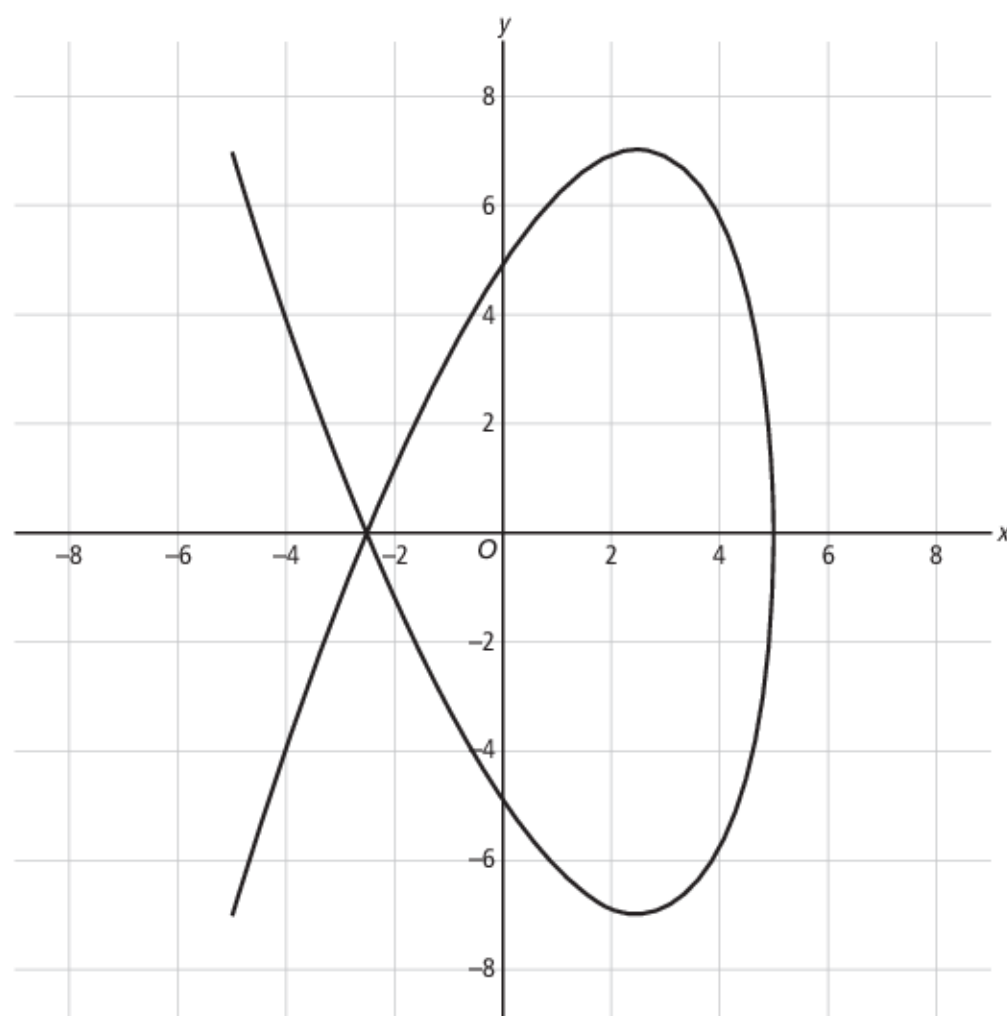
**b**  $f(x) = 2 \sin(2x) \cos(2x)$

$$f(x) = \sin(2 \cdot 2x) = \sin(4x)$$

**c**  $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} \sin(4x) dx = \left[-\frac{1}{4} \cos(4x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} = (-\frac{1}{4} \cos(2\frac{1}{2}\pi)) - (-\frac{1}{4} \cos(2\pi)) = \frac{1}{4}$

**Pagina 202:**

**66a**



De periode van  $x$  is  $\pi$  en de periode van  $y$  is  $\frac{2}{3}\pi$ .

De gemeenschappelijke is  $2\pi$ , dus de periode van  $K$  is  $2\pi$ .

- b** De raaklijn is horizontaal als  $\frac{dy}{dt} = 0$  en  $\frac{dx}{dt} \neq 0$ .

$$\frac{dy}{dt} = 7\cos(3t) \cdot 3 = 21\cos(3t)$$

$$21\cos(3t) = 0$$

$$\cos(3t) = 0$$

$$3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

$$\frac{dx}{dt} = -10\sin(2t)$$

$$-10\sin(2t) \neq 0$$

$$2t \neq k \cdot \pi$$

$$t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Op  $[0, 2\pi]$  gaat het dan nog over  $t = \frac{1}{6}\pi$ ,  $t = \frac{5}{6}\pi$ ,  $t = 1\frac{1}{6}\pi$ ,  $t = 1\frac{5}{6}\pi$ .

Dus de punten met een horizontale raaklijn zijn  $(2\frac{1}{2}, 7)$  en  $(2\frac{1}{2}, -7)$ .

- c** De raaklijn is horizontaal als  $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $\frac{dy}{dt} \neq 0$ .

Dan volgt met behulp van opdracht b de oplossing  $t = k \cdot \frac{1}{2}\pi$  en  $t \neq \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$ .

Op  $[0, 2\pi]$  gaat het dan nog over  $t = 0$ ,  $t = \pi$  en  $t = 2\pi$ .

Dus het punt met een verticale raaklijn is  $(5, 0)$ .

- d** Er moet gelden  $y = 0$ .

$$7\sin(3t) = 0$$

$$3t = k \cdot \pi$$

$$t = k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

Er moet ook gelden  $x = -2,5$ .

$$5\cos(2t) = -2,5$$

$$\cos(2t) = -\frac{1}{2}$$

$$2t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \text{ of } t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen zijn  $t = \frac{1}{3}\pi$ ,  $t = \frac{2}{3}\pi$ ,  $t = 1\frac{1}{3}\pi$  en  $t = 1\frac{2}{3}\pi$ .

- 67a** De periode van  $x$  is  $\frac{2}{3}\pi$  en de periode van  $y$  is  $\frac{1}{2}\pi$ .

De gemeenschappelijke periode is  $2\pi$ , dus de periode van de kromme is  $2\pi$ .

- b**  $\frac{dx}{dt} = 15\cos(3t)$

$$15\cos(3t)$$

$$\cos(3t) = 0$$

$$3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

$$\frac{dy}{dt} = -8\sin(4t)$$

$$-8\sin(4t) = 0$$

$$\sin(4t) = 0$$

$$4t = k \cdot \pi, \text{ dus } t = k \cdot \frac{1}{4}\pi$$

De gemeenschappelijke oplossingen zijn  $t = \frac{1}{2}\pi$  en  $t = 1\frac{1}{2}\pi$ .

De bijbehorende punten zijn  $(-5, 2)$  en  $(5, 2)$ .

- c** Voor de snijpunten met de  $y$ -as geldt  $y = 0$ .

Dit geeft  $\sin(3t) = 0$  dus  $t = k \cdot \frac{1}{3}\pi$ . De bijbehorende punten zijn  $(0, -1)$  en  $(0, 2)$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8\sin(4t)}{15\cos(3t)}$$

De hellingen berekenen geeft:

$$t = 0, t = \pi \text{ en } t = 2\pi: \frac{-8 \cdot 0}{15 \cdot 1} = 0$$

$$t = \frac{1}{3}\pi: \frac{-8\sin(\frac{4}{3}\pi)}{15\cos(\pi)} = \frac{-8 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{15 \cdot -1} = -\frac{4}{15}\sqrt{3}$$

$$t = \frac{2}{3}\pi: \frac{-8\sin(\frac{8}{3}\pi)}{15\cos(2\pi)} = \frac{-8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{15} = -\frac{4}{15}\sqrt{3}$$

$$t = 1\frac{1}{3}\pi: \frac{-8\sin(4 \cdot 1\frac{1}{3}\pi)}{15\cos(3 \cdot 1\frac{1}{3}\pi)} = \frac{-8 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{15} = \frac{4}{15}\sqrt{3}$$

$$t = 1\frac{2}{3}\pi: \frac{-8\sin(4 \cdot 1\frac{2}{3}\pi)}{15\cos(3 \cdot 1\frac{2}{3}\pi)} = \frac{-8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{15 \cdot -1} = \frac{4}{15}\sqrt{3}$$

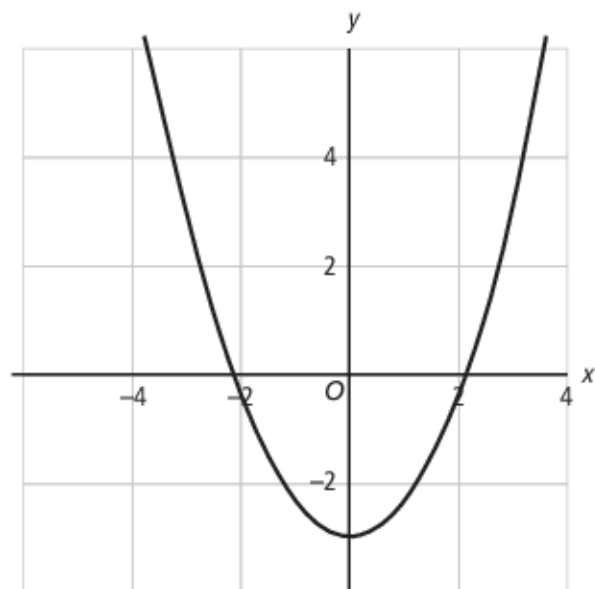
- d De bijbehorende  $t$ -waarden zijn  $t = \frac{1}{2}\pi$  en  $t = 1\frac{1}{2}\pi$ .

Invullen in de rekenmachine van deze waarden om  $dy/dx$  te berekenen geeft een foutmelding. Dus neem bijvoorbeeld de waarden  $t = 1,57$  en  $t = 4,71$ .

Dit geeft voor het punt  $(-5, 2)$  de helling  $dy/dx \approx -0,71$  en voor het punt  $(5, 2)$  de helling  $dy/dx \approx 0,71$ .

**Pagina 203:**

**68a**



- b Er moet gelden  $y = \frac{1}{2}$ .

$$3\cos(2t) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2t) = \frac{1}{6}$$

$$2\cos^2(t) - 1 = \frac{1}{6}$$

$$\cos^2(t) = \frac{7}{12}$$

$$\cos(t) = \sqrt{\frac{7}{12}} \text{ of } \cos(t) = -\sqrt{\frac{7}{12}}$$

$$\text{Dan is } x = 3\cos(t) = 3 \cdot -\sqrt{\frac{7}{12}} = -3 \cdot \sqrt{\frac{36}{36} \cdot \frac{7}{12}} = -\frac{1}{2}\sqrt{21} \text{ of } x = 3 \cdot \sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{21}.$$

De snijpunten zijn  $(-\frac{1}{2}\sqrt{21}, \frac{1}{2})$  en  $(\frac{1}{2}\sqrt{21}, \frac{1}{2})$ .

- c  $y = 3\cos(2t) = 3 \cdot (2\cos^2(t) - 1) = 6\cos^2(t) - 3 = \frac{2}{3}x^2 - 3$

- d Omdat  $-1 \leq \cos(t) \leq 1$  geldt  $-3 \leq 3\cos(t) \leq 3$  dus  $-3 \leq x \leq 3$ .

Het domein is  $[-3, 3]$ .

- 69a** De periode van zowel  $x$  als  $y$  is  $2\pi$ . De kromme heeft dus ook periode  $2\pi$ .

$$\text{b} \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin(2t) + \sin(t))^2 + (2\cos(2t) + \cos(t))^2} dt \approx 13,36$$

$$\text{70a} \quad \frac{dx}{dt} = 6 \cdot -\sin(t) + 2 \cdot -\sin(3t) \cdot 3$$

$$\frac{dx}{dt} = -6\sin(t) - 6\sin(3t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -6(\sin(t) + \sin(3t))$$

$$\frac{dx}{dt} = -6 \cdot 2\sin\left(\frac{t+3t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t-3t}{2}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -12\sin(2t)\cos(-t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -12\sin(2t)\cos(t)$$

$$\text{b} \quad \frac{dy}{dt} = 6\cos(t) + 6\cos(3t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 6 \cdot 2\cos\left(\frac{t+3t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t-3t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = 12\cos(2t) \cdot \cos(-t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 12\cos(2t)\cos(t)$$

$$\text{c} \quad \text{Er is een horizontale raaklijn als } \frac{dy}{dt} = 0 \text{ en } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

$$\text{Er is een verticale raaklijn als } \frac{dx}{dt} = 0 \text{ en } \frac{dy}{dt} \neq 0.$$

$$12\cos(2t)\cos(t) = 0$$

$$\cos(2t)\cos(t) = 0$$

$$\cos(2t) = 0 \text{ of } \cos(t) = 0$$

$$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ of } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi.$$

$$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \text{ of } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$-12\sin(2t)\cos(t) = 0$$

$$\sin(2t) = 0 \text{ of } \cos(t) = 0$$

$$2t = k \cdot \pi \text{ of } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = k \cdot \frac{1}{2}\pi \text{ of } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

Op het interval  $[0, 2\pi)$  is er een horizontale raaklijn voor

$$t = \frac{1}{4}\pi, t = \frac{3}{4}\pi, t = 1\frac{1}{4}\pi, t = \frac{3}{4}\pi \text{ (} t = \frac{1}{2}\pi \text{ en } t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ voldoen niet).}$$

De punten zijn:  $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ ,  $(-2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ ,  $(-2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$  en  $(2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ .

Op het interval  $[0, 2\pi)$  is er een verticale raaklijn voor  $t = 0$  en  $t = \pi$

$$(t = \frac{1}{2}\pi \text{ en } t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ voldoen niet).}$$

De punten zijn  $(8, 0)$  en  $(-8, 0)$ .

$$\text{d} \quad \text{Er moet gelden } \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{12\cos(2t)\cos(t)}{-12\sin(2t)\cos(t)} = 1$$



$$\frac{\cos(2t)}{-\sin(2t)} = 1$$

$$\cos(2t) = -\sin(2t)$$

$$2t = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi.$$

Op het interval  $[0, 2\pi)$  geeft dit  $t = \frac{3}{8}\pi$  of  $t = \frac{7}{8}\pi$  of  $t = 1\frac{3}{8}\pi$  of  $t = 1\frac{7}{8}\pi$ .

**Pagina 204:**

**71a**  $\sin(x) + \sin(2x) = 0$

$$\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$$

$$\sin(x) \cdot (1 + 2\cos(x)) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

De  $x$ -coördinaat van  $B$  is een oplossing van  $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ . Dus is  $x_B = \frac{2}{3}\pi$ .

**b** Er moet gelden  $f'_a(\frac{5}{6}\pi) = 0$ .

$$f'_a(x) = \cos(x) + 2a \cdot \cos(2x)$$

$$\cos(\frac{5}{6}\pi) + 2a \cdot \cos(2 \cdot \frac{5}{6}\pi) = 0$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Invoer: } Y1 = \sin(X) + \sqrt{3} \cdot \sin(2X)$$

$$\text{Venster: } X_{\min} = 0, X_{\max} = \pi, Y_{\min} = -2, Y_{\max} = 2$$

$$\text{Optie: CALC, maximum (TI) of G-solv, MAX (Casio)}$$

De oplossing is  $x \approx 0,96$ .

**c** 
$$\int_0^{\pi} (\sin(x) + a \cdot \sin(2x)) dx = \int_0^{\pi} \sin(x) dx + a \cdot \int_0^{\pi} \sin(2x) dx =$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx + a \cdot 0 = \int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

Dit geldt omdat  $\int_0^{\pi} \sin(2x) dx = 0$  vanwege de puntsymmetrie van  $y = \sin(2x)$  en

het integratie-interval  $[0, \pi]$  ten opzichte van het punt  $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ .

**Pagina 205:**

**72a**  $V(t) = OQ \cdot ON = \sin(t) \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos(t))$

$$W(t) = RS \cdot RA = \frac{1}{2}\sin(t) \cdot (1 - \cos(t))$$

$$V(t) = 3 \cdot W(t)$$

$$\sin(t) \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos(t)) = 3 \cdot \frac{1}{2}\sin(t) \cdot (1 - \cos(t))$$

$$(1 + \cos(t)) = 3 \cdot (1 - \cos(t))$$

$$4\cos(t) = 2$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}$$

Omdat  $0 < t < \frac{1}{2}\pi$  volgt  $t = \frac{1}{3}\pi$ .

**b** Uit  $\frac{ON}{OQ} = \frac{RS}{RA}$  volgt  $\frac{\frac{1}{2}(1 + \cos(t))}{\sin(t)} = \frac{\frac{1}{2}\sin(t)}{1 - \cos(t)}$

$$\frac{1}{2}(1 + \cos(t))(1 - \cos(t)) = \frac{1}{2}\sin(t)\sin(t) \text{ (kruislings vermenigvuldigd)}$$

$$(1 + \cos(t))(1 - \cos(t)) = \sin(t)\sin(t)$$

$$1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$$

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

Dit geldt voor elke waarde van  $t$ .

c Uit  $\frac{ON}{OQ} = \frac{RA}{RS}$  volgt  $\frac{\frac{1}{2}(1 + \cos(t))}{\sin(t)} = \frac{1 - \cos(t)}{\frac{1}{2}\sin(t)}$

$$\frac{1}{2}(1 + \cos(t)) \cdot \frac{1}{2}\sin(t) = (1 - \cos(t)) \cdot \sin(t) \text{ (kruislings vermenigvuldigd)}$$

$$1 + \cos(t) = 4(1 - \cos(t))$$

$$1 + \cos(t) = 4 - 4\cos(t)$$

$$5\cos(t) = 3$$

$$\cos(t) = \frac{3}{5}$$

$$\text{De zijde van het vierkant } ONPQ \text{ is dan } ON = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{5}) = \frac{4}{5}.$$

$$\text{De zijde van het vierkant } ATSR \text{ is dan } RA = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

**Pagina 206:**

**73a** Laat  $R'$  de projectie van  $R$  op de  $x$ -as zijn en laat  $P'$  de projectie van  $P$  op de lijn  $RR'$  zijn. Dan is  $x_p = OR' + P'P$ .

$$\begin{aligned} \triangle ORR' & \begin{cases} \angle OR'R = \frac{1}{2}\pi \\ \angle ROR' = t \\ \angle ORR' = \frac{1}{2}\pi - t \end{cases} \\ \triangle RPP' & \begin{cases} \angle RP'P = \frac{1}{2}\pi \\ \angle PRP' = \angle ORP - \angle ORR' = \frac{1}{2}\pi - (\frac{1}{2}\pi - t) = t \\ \angle RPP' = \pi - \angle P'RP - \angle RP'P = \frac{1}{2}\pi - t \end{cases} \end{aligned}$$

Dus  $\triangle ORR'$  en  $\triangle RPP'$  zijn gelijkvormig.

$OR = 1$  en  $RP = t$ , dus  $\triangle RPP'$  is een factor  $t$  groter dan  $\triangle ORR'$ .

$OR' = \cos(t)$  en  $RR' = \sin(t)$ , dus  $PP' = t \cdot RR' = t \cdot \sin(t)$

Invullen in  $x_p = OR' + P'P$  geeft  $x_p = \cos(t) + t \cdot \sin(t)$ .

**Pagina 207:**

**73b**  $x'(t) = -\sin(t) + 1 \cdot \sin(t) + t \cdot \cos(t) = t \cdot \cos(t)$

$$y'(t) = \cos(t) - 1 \cdot \cos(t) - t \cdot -\sin(t) = t \cdot \sin(t)$$

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$v(t) = \sqrt{(t \cdot \cos(t))^2 + (t \cdot \sin(t))^2}$$

$$v(t) = \sqrt{t^2 \cdot \cos^2(t) + t^2 \cdot \sin^2(t)}$$

$$v(t) = \sqrt{t^2 \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t))}$$

$$v(t) = \sqrt{t^2} = t$$

c De lengte van de baan is  $\int_0^{\pi} v(t) dt = \int_0^{\pi} t dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 \right]_0^{\pi} = (\frac{1}{2}\pi^2) - (0) = \frac{1}{2}\pi^2$ .

**74a** Er is een horizontale raaklijn als  $y(t)$  een uiterste waarde bereikt.

Dat is onder andere het geval als  $\sin(2t) = 1$ . Dit geeft  $2t = \frac{1}{2}\pi$ , dus  $t = \frac{1}{4}\pi$ .

Het bijbehorende punt op de kromme is  $(\sqrt{2}, 1)$ .

Dankzij de symmetrie zijn de andere punten  $(\sqrt{2}, -1)$ ,  $(-\sqrt{2}, 1)$  en  $(-\sqrt{2}, -1)$ .

De oppervlakte van de rechthoek is  $2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2} \approx 5,7$ .

b  $y = \sin(2t)$

$$y = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$y = 2\cos(t) \cdot \sqrt{\sin^2(t)} \quad \text{want } \sin(t) \geq 0 \text{ voor } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$$

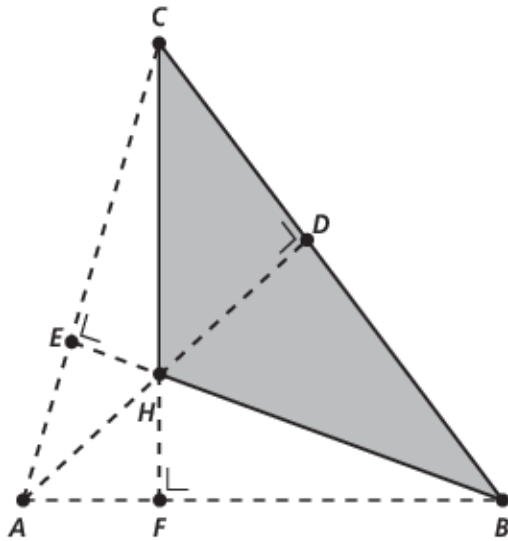
$$y = 2\cos(t) \cdot \sqrt{1 - \cos^2(t)}$$

$$y = 2\cos(t) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}(2\cos(t))^2}$$

$$y = x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}$$

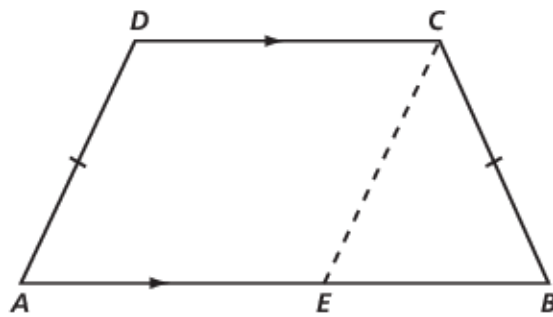
## Pagina 211:

- 75a** Driehoek  $BCH$  is een stomphoekige driehoek, dan ligt het snijpunt van de hoogtelijnen buiten de driehoek. De hoogtelijnen zijn  $HD$ ,  $BE$  en  $CE$ . Deze snijden elkaar in punt  $A$ .



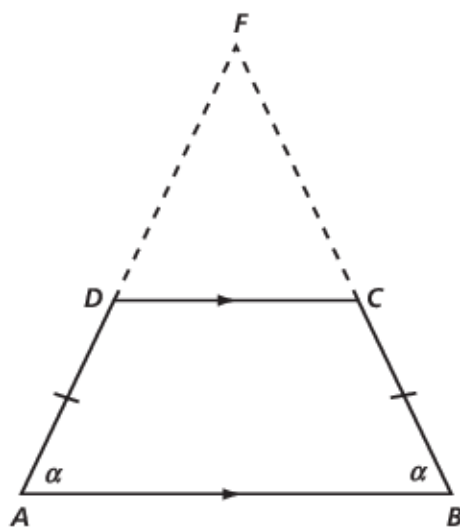
- b** Punt  $B$  is het snijpunt van  $BE$ ,  $BC$  en  $BF$ , dus punt  $B$  is het snijpunt van de hoogtelijnen van driehoek  $ACH$ .

- 76a** Eerst een analysefiguur.



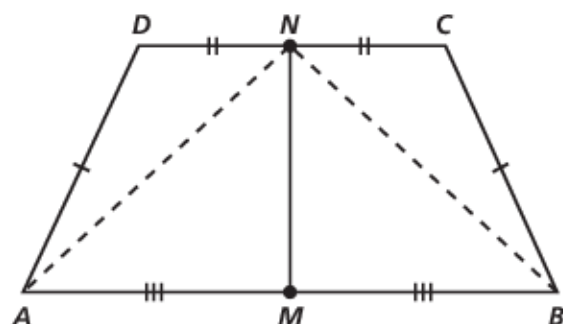
Als  $AB \parallel DC$  en  $AD \parallel CE$ , dan is  $AECD$  een parallellogram (definitie). Hieruit volgt  $EC = BC$ . Dus driehoek  $BCE$  is gelijkbenig.

- b**  $\left. \begin{array}{l} \angle BEC = \angle EBC \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle DAB = \angle BEC \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle DAB = \angle EBC = \angle ABC$
- c** Eerst een analysefiguur.



Verleng de zijden  $AD$  en  $BC$  tot ze snijden in punt  $F$ .  
 Noem  $\angle BAD = \alpha$ , dan is  $\angle FDC = \alpha$  ( $F$ -hoeken).  
 Hieruit volgt  $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$  ( $gestrekte\ hoek$ ) (1).  
 Ook is  $\angle ABC = \alpha$  (opdracht b), dan is  $\angle FCD = \alpha$  ( $F$ -hoeken).  
 Hieruit volgt  $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$  ( $gestrekte\ hoek$ ) (2).  
 Uit (1) en (2) volgt  $\angle ADC = \angle BCD$ .

- d Eerst een analysefiguur.



Teken lijnstukken  $MN$ ,  $AN$  en  $BN$ .

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \text{ (gegeven)} \\ \angle ADN = \angle BCN \text{ (opdracht c)} \\ DN = CN \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADN \cong \triangle BCN \text{ (ZHZ)} \Rightarrow AN = BN$$

Dan is driehoek  $ABN$  gelijkbenig, dan valt zwaartelijn  $MN$  samen met de hooglijn uit de top.

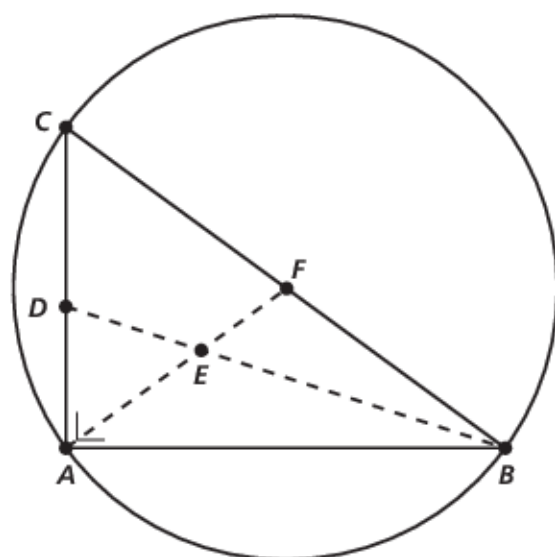
Dus  $\angle AMN = 90^\circ$ . Hieruit volgt dat  $MN$  en  $AB$  elkaar loodrecht snijden.

- e In opdracht c vond je:

Als  $\angle BAD = \alpha$ , dan is  $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$ .

Dus  $\angle BAD + \angle BCD = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$ , hieruit volgt dat  $ABCD$  een koordenvierhoek is (*Omgekeerde koordenvierhoekstelling*).

77a



- b  $\angle A = 90^\circ$ , dan ligt punt  $A$  op een cirkel met middellijn  $BC$  (*Omgekeerde stelling van Thales*).

Gegeven is dat  $F$  het midden van  $BC$  (zwaartelijn), dan is  $F$  het middelpunt van de cirkel.

Daaruit volgt  $AF = BF = CF$  (straal), dus  $BC = 2 \cdot AF$ .

- c Noem  $\angle ABC = \beta$ , dan is  $\angle AFC = 2\beta$  (omtrekshoek).

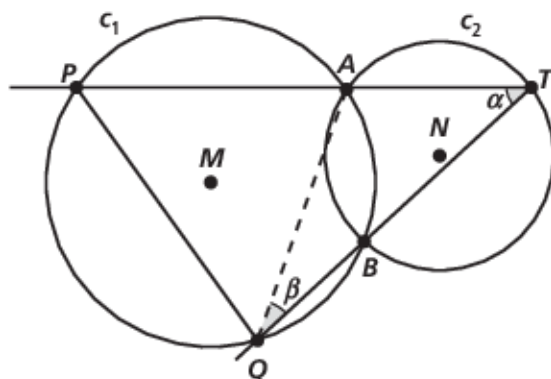
$\angle ADB = 180^\circ - 90^\circ - \frac{1}{2}\beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$  (hoekensom).

Hieruit volgt  $\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$  (gestrekte hoek).

Als  $CDEF$  een koordenvierhoek is, dan geldt  $\angle EDC + \angle EFC = 180^\circ$  (*koordenvierhoekstelling*).

Invullen geeft  $90^\circ + \frac{1}{2}\beta + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 2\frac{1}{2}\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 36^\circ$ .

78 Eerst een analysefiguur maken.



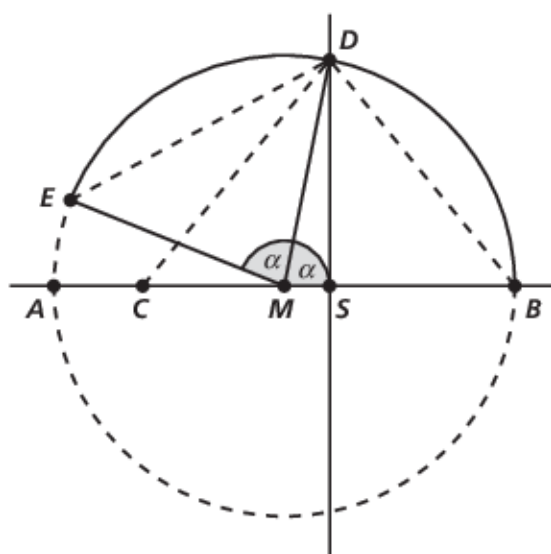
Noem  $\angle PTQ = \alpha$  en  $\angle AQT = \beta$ . Deze hoeken zijn constant (*constante hoek*), ongeacht de positie van  $T$  op cirkel  $c_2$ .

Dan is  $\angle TAQ = 180^\circ - \alpha - \beta$  (*hoekensom*).

Hieruit volgt  $\angle PAQ = \alpha + \beta$  (*gestrekte hoek*).

Omdat  $\angle PAQ$  een constante waarde heeft, heeft  $PQ$  een vaste lengte.

79a



Noem  $\angle DMB = \alpha$

Gegeven is  $DE = BD$ , dan is  $\angle DME = \angle DMB = \alpha$ .

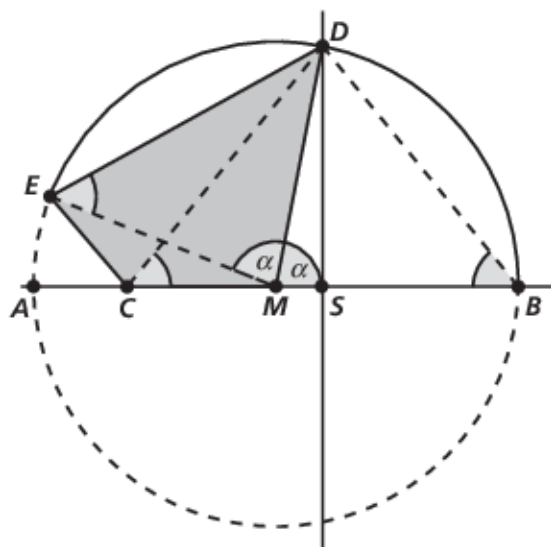
$EM = DM$  (*straal*), dus  $\angle DEM = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$  (1).

$BM = DM$  (*straal*), dus  $\angle DBM = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$  (2).

$D$  ligt op de middelloodlijn van  $BC$ , dan is  $DC = DB$ , dus  $\angle DCB = \angle DBC$  (3).

Uit (1), (2) en (3) volgt  $\angle DEM = \angle DBM = \angle DCB$ .

b

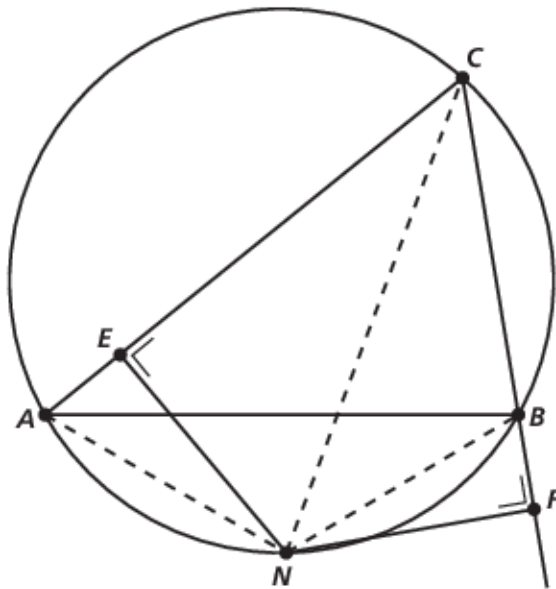


Uit  $\angle DEM = \angle DCM$  volgt (*omgekeerde stelling constante hoek*) dat  $D, E, C$  en  $M$  op één cirkel liggen en dus is  $DECM$  een koordenvierhoek.





81a Teken hulplijn  $CN$ .



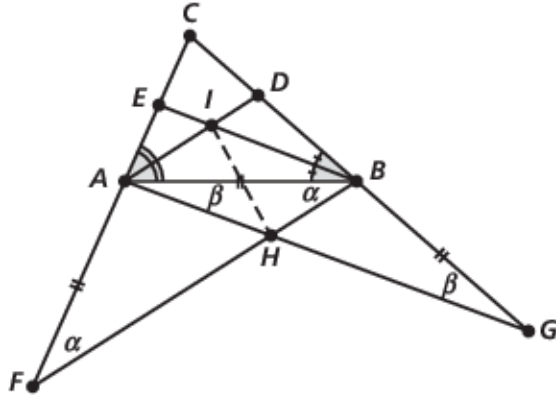
Omdat  $N$  het midden van boog  $AB$  is geldt  $\angle ECN = \angle FCN$ .

$$\left. \begin{array}{l} CN = CN \\ \angle E = \angle F (= 90^\circ) \\ \angle ECN = \angle FCN \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ECN \cong \triangle FCN \text{ (ZHH)} \Rightarrow NE = NF$$

b Teken  $AN$  en  $NB$ .

$$\left. \begin{array}{l} NE = NF \text{ (opdracht a)} \\ \angle AEN = \angle BFN (= 90^\circ) \\ AN = NB \text{ (koorden van gelijke bogen)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEN \cong \triangle BFN \Rightarrow AE = BF$$

82 Eerst een analysefiguur maken.



Terugredeneren: Als  $AHBI$  een parallellogram is dan delen de diagonalen elkaar middendoor.

Noem  $\angle AFB = \alpha$  en  $\angle AGB = \beta$ .

Omdat  $AB = BG$  is  $\angle BAG = \angle BGA$ .

Verder is  $\angle ABG = 180^\circ - \angle BAG - \angle BGA = 180^\circ - 2\beta$  (hoekensom).

Dan is  $\angle ABC = 2\beta$  (gestrekte hoek).

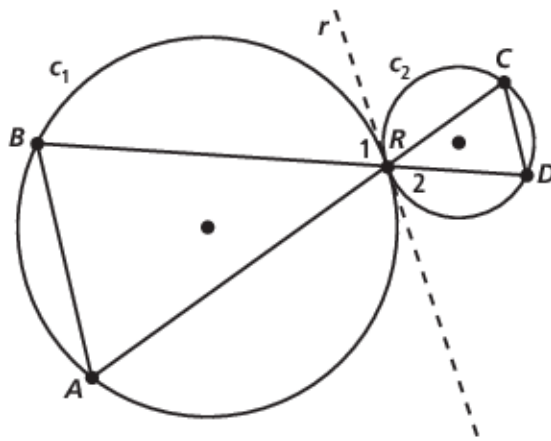
Hieruit volgt  $\angle ABI = \beta$  (bissectrice).

Dus zijn  $\angle BAG$  en  $\angle ABI$  Z-hoeken met als gevolg  $AH \parallel BI$ .

Op dezelfde manier bewijs je dat  $AI \parallel BH$ .

In vierhoek  $AHBI$  zijn de overstaande zijden evenwijdig en dus is  $AHBI$  een parallellogram waarin  $AB$  en  $HI$  elkaar middendoor delen.

## 83 Eerst een analysefiguur.



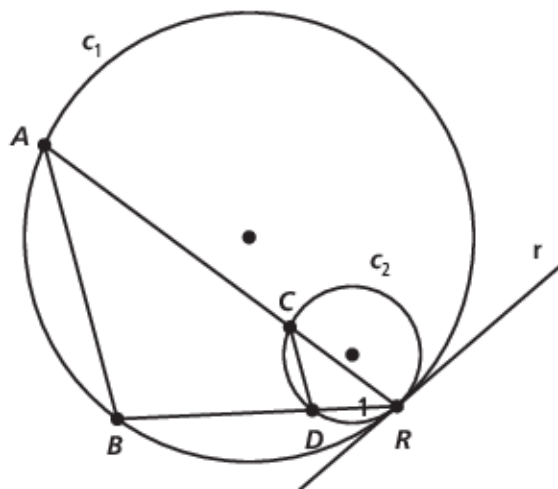
Teken de gemeenschappelijke raaklijn  $r$ . Noem  $\angle BAR = \alpha$ .

Dan geldt  $\angle A = \angle R_1 = \alpha$  (hoek tussen raaklijn en koorde) (1).

Ook geldt  $\angle R_1 = \angle R_2 = \alpha$  (overstaande hoeken) (2).

$\angle C = \angle R_2 = \alpha$  (hoek tussen raaklijn en koorde) (3).

Uit (1), (2) en (3) volgt  $\angle A = \angle C$ , dus dan zijn  $AB$  en  $CD$  evenwijdig (Z-hoeken).



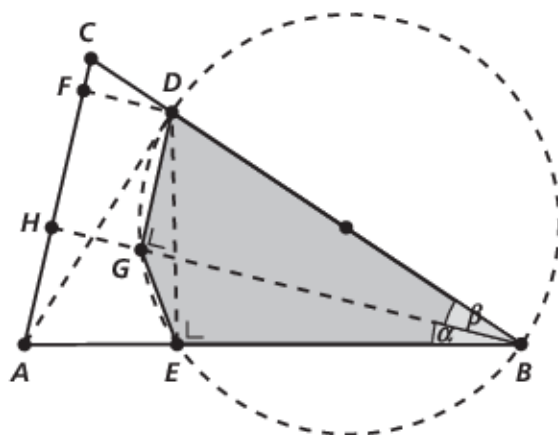
Teken de gemeenschappelijke raaklijn  $r$ . Noem  $\angle BAR = \alpha$ .

Dan geldt  $\angle BAR = \angle R_1 = \alpha$  (hoek tussen raaklijn en koorde) (1).

Ook in  $c_2$  geldt  $\angle DCR = \angle R_1 = \alpha$  (hoek tussen raaklijn en koorde) (2).

Uit (1) en (2) volgt  $\angle BAR = \angle DCR$ , dus dan zijn  $AB$  en  $CD$  evenwijdig (F-hoeken).

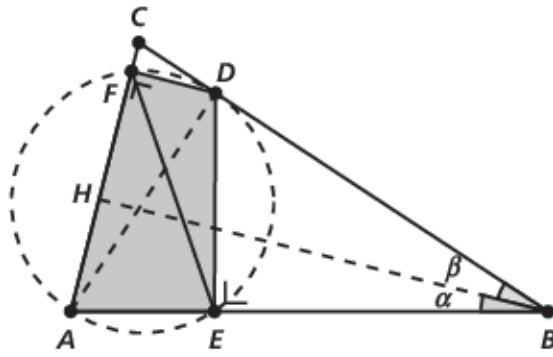
## 84 Eerst een analysefiguur.



$G$  is het voetpunt van  $D$  op de hoogtelijn vanuit  $B$ . Noem  $\angle HBD = \beta$ .

Dan is  $EBDG$  een koordenvierhoek want  $\angle BED = \angle BGD = 90^\circ$  (omgekeerde stelling constante hoek) en dus  $\angle GED = \angle GBD = \beta$  (constante hoek) (1).

Nu een nieuwe analysefiguur.



$H$  is het snijpunt van  $AC$  met de hoogtelijn vanuit  $B$ .

Dan is in  $\triangle BCH$  met de *hoekensom*  $\angle C = 90^\circ - \beta$ .

Dus is in  $\triangle ACD$  met de *hoekensom*  $\angle CAD = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$ .

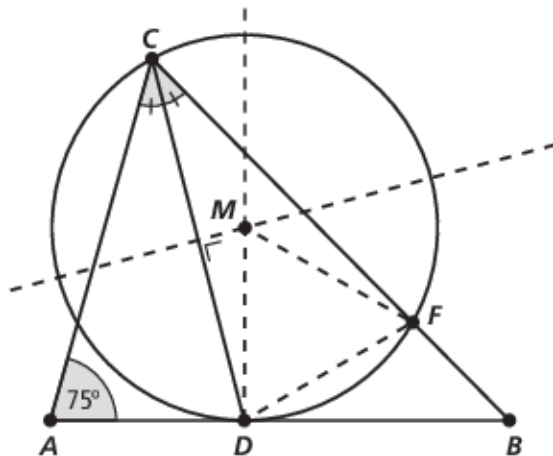
Verder is vierhoek  $AEDF$  een koordenvierhoek want  $\angle AED + \angle AFD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  (*omgekeerde koordenvierhoekstelling*)

Dus is  $\angle FED = \angle FAD = \angle CAD = \beta$  (*constante hoek*) (2).

Uit (1) en (2) volgt  $\angle FED = \angle GED = \beta$  en daaruit volgt dat de lijnen  $EG$  en  $EF$  samenvallen en dus liggen  $E$ ,  $F$  en  $G$  op één lijn.

**Pagina 213:**

- 85ab** Teken een driehoek  $ABC$  met  $AB = 6$  cm,  $\angle A = 75^\circ$  en  $\angle C = 60^\circ$ , dus  $\angle B = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$  (*hoekensom*).



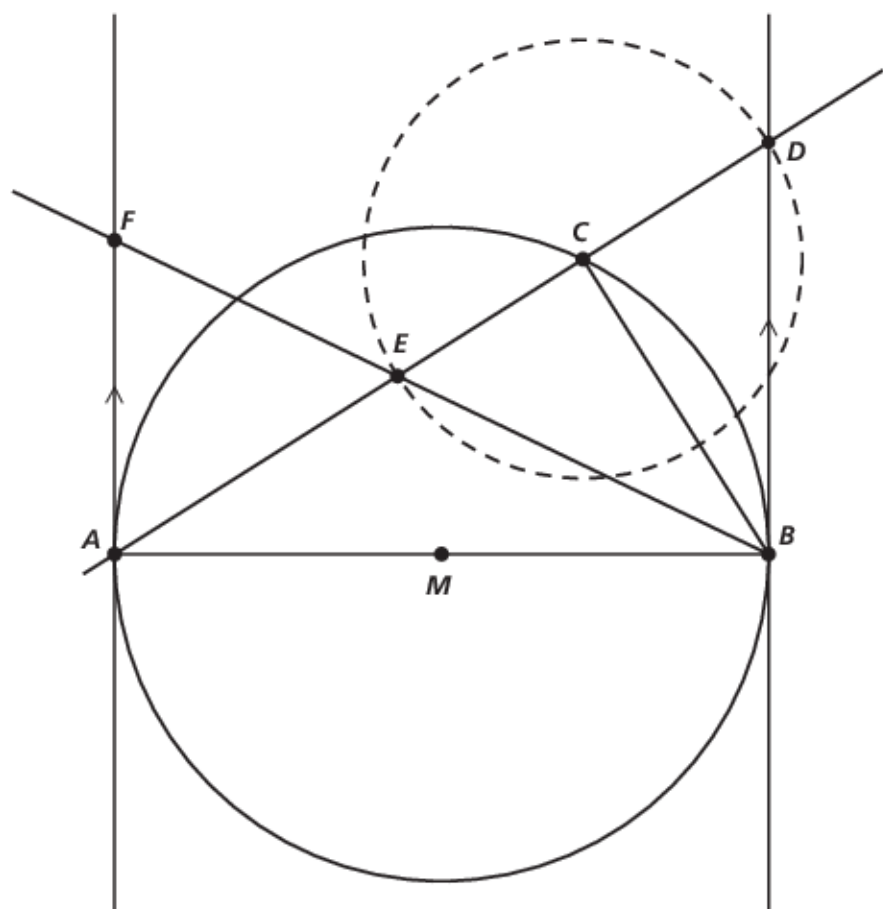
Daarna teken je de bissectrice  $CD$  van hoek  $C$ .

Het middelpunt van de cirkel door  $C$  en  $D$  ligt op de middelloodlijn van  $CD$ .

De cirkel raakt  $AB$  in  $D$ , dus richt in  $D$  de loodlijn op  $AB$  op en snij deze met de middelloodlijn van  $CD$  om punt  $M$  te vinden. Teken de cirkel met middelpunt  $M$  door  $C$  en  $D$ .

- c  $\angle DCF = \frac{1}{2}\angle C = 30^\circ$  (*bissectrice*)  $\Rightarrow \angle DMF = 60^\circ$  (*omtrekshoek*)
- d  $\angle BFM = 360^\circ - \angle BDM - \angle DMF - \angle DBF = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 165^\circ$
- e  $\angle BDF = \angle DCF = 30^\circ$  (*raaklijn en koorde*)  
 $\angle BFD = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$  (*hoekensom*)  
 $\angle CFD = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$  (*gestrekte hoek*)  
 $\angle CAD = \angle CFD (= 75^\circ)$   
 $CD = CD$   
 $\angle ACD = \angle FCD$  (*bissectrice*)
- $\Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle FDC$  (HZH)  $\Rightarrow AD = DF$

## 86 Eerst een analysefiguur.



Teken hulplijn  $BC$ . Dan is  $\angle ACB = 90^\circ$  (*Thales*).

Omdat punt  $C$  het midden is van  $ED$  en  $\angle ACB = 90^\circ$  is  $BC$  de middelloodlijn van lijnstuk  $ED$  en dus is  $\angle BDE = \angle BED$  (1).

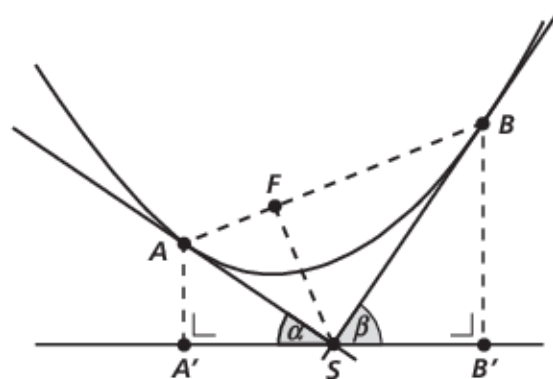
Verder geldt  $\angle AEF = \angle DEB$  (*overstaande hoeken*) (2).

Omdat  $AF$  en  $BD$  beide een hoek van  $90^\circ$  maken met  $AB$  geldt  $AF \parallel BD$ .

Dus  $\angle FAE = \angle BDE$  (*Z-hoeken*) (3).

Uit (1), (2) en (3) volgt  $\angle FAE = \angle FEA$  en dus  $AF = FE$  (*gelijkbenige driehoek*).

## 87a Eerst een analysefiguur.



$A'$  is het voetpunt van  $A$  op de richtlijn en  $B'$  is het voetpunt van  $B$  op de richtlijn.

De raaklijn  $AS$  is de middelloodlijn van  $FA'$  (*eigenschap parabool*).

Noem  $\angle ASA' = \alpha$  en  $\angle BSB' = \beta$ .

$$\left. \begin{array}{l} AA' = AF \text{ (parabool)} \\ AS = AS \\ A'S = FS \text{ (middelloodlijn)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AA'S \cong \triangle AFS \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle ASA' = \angle ASF = \alpha$$

De raaklijn  $BS$  is de middelloodlijn van  $FB'$  (*eigenschap parabool*).

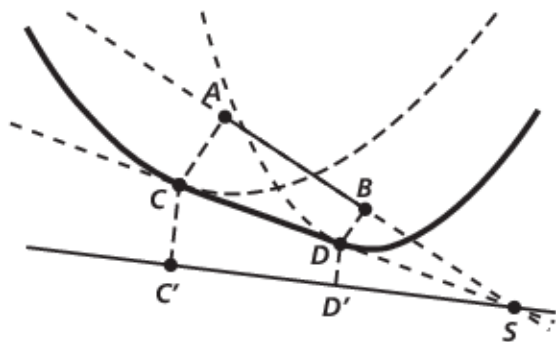
$$\left. \begin{array}{l} BB' = BF \text{ (parabool)} \\ BS = BS \\ B'S = FS \text{ (middelloodlijn)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BB'S \cong \triangle BFS \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle BSB' = \angle BSF = \beta$$

Ook geldt  $\angle A'SB' = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$  (*gestrekte hoek*), dus hieruit volgt dat  $\angle ASB = \alpha + \beta = 90^\circ$ .



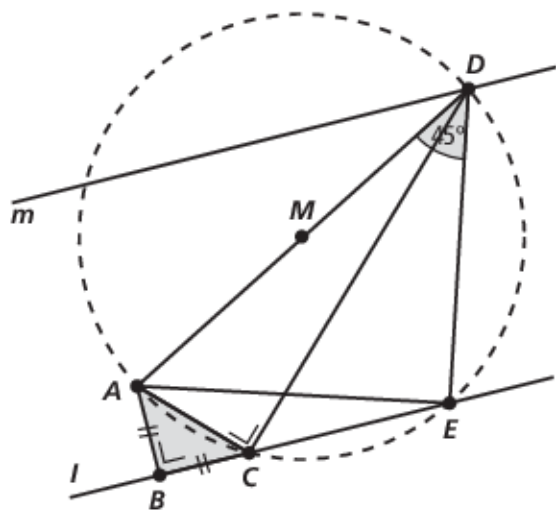
- b Uit de congruente driehoeken volgt  $\angle AFS = \angle AA'S = 90^\circ$  en  $\angle BFS = \angle BB'S = 90^\circ$ , zodat  $\angle AFB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ . Hieruit volgt dat  $A, F$  en  $B$  op één lijn liggen.

- 88** Teken lijn  $AB$ , deze snijdt lijn  $m$  in punt  $S$ .  
De verzameling van de punten op gelijke afstand van lijn  $m$  en lijn  $AB$  liggen op de bissectrice van  $\angle S$ .  
De verzameling van de punten op gelijke afstand van lijn  $m$  en punt  $A$  liggen op de parabool met brandpunt  $A$  en richtlijn  $m$ .  
De verzameling van de punten op gelijke afstand van lijn  $m$  en punt  $B$  liggen op de parabool met brandpunt  $B$  en richtlijn  $m$ .  
De punten  $C$  en  $D$  vind je door in punt  $A$  en  $B$  de loodlijn op te richten op  $AB$  en de snijpunten van de loodlijnen te bepalen met de bissectrice van  $\angle S$ .  
Kleur dan de parabool links van  $C$ , lijnstuk  $CD$  en de parabool rechts van  $D$ , dit is de gevraagde verzameling.



Pagina 214:

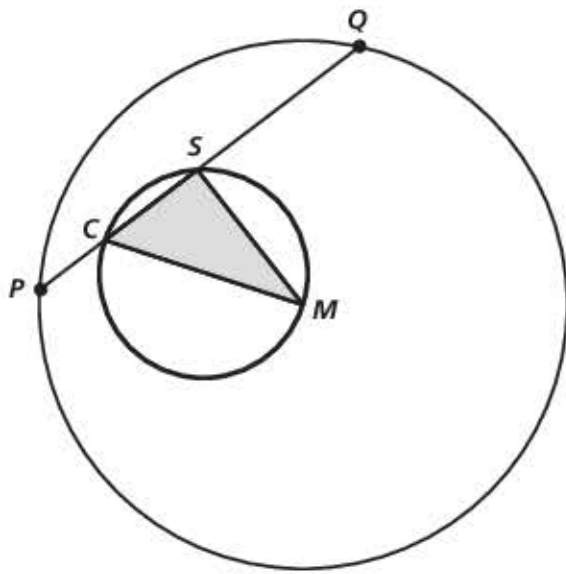
89a



$AB = BC$  en  $\angle ABC = 90^\circ$ , dus  $\angle ACB = 45^\circ$  (gelijkbenige rechthoekige driehoek).  
 $\angle ACE = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$  (gestrekte hoek).  
 $\angle ACE + \angle ADE = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ , dus  $ACED$  is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling). Daaruit volgt dat  $A, C, E$  en  $D$  op één cirkel liggen (definitie koordenvierhoek).

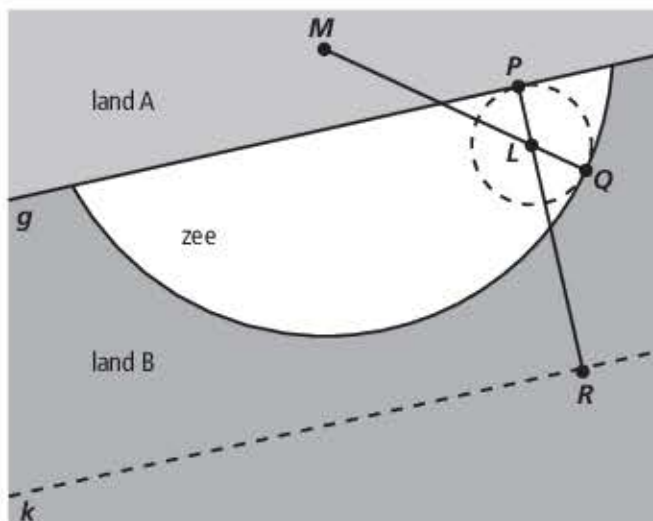
- b  $\angle AED = \angle ACD = 90^\circ$  (constante hoek), dus driehoek  $AED$  is rechthoekig.  
Een rechthoekige driehoek met een hoek van  $45^\circ$  is een geodriehoek.

90 Eerst een analysefiguur.



Punt  $S$  is het midden van  $PQ$ , dan is  $MS$  een loodlijn uit  $M$  op  $PQ$  (*omgekeerde stelling loodlijn op koorde*). Dan ligt punt  $S$  op een cirkel met middellijn  $CM$  (*omgekeerde stelling van Thales*).

91a

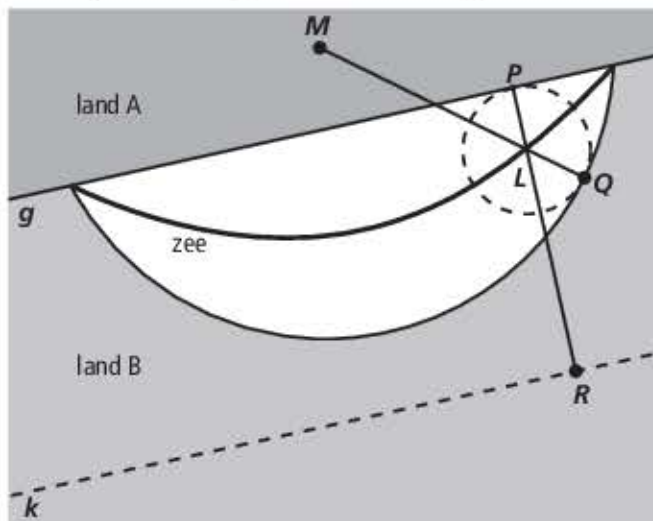


$$\left. \begin{array}{l} LP = LQ \\ MQ = PR \\ ML = MQ - LQ \\ RL = PR - LP \end{array} \right\} ML = RL$$

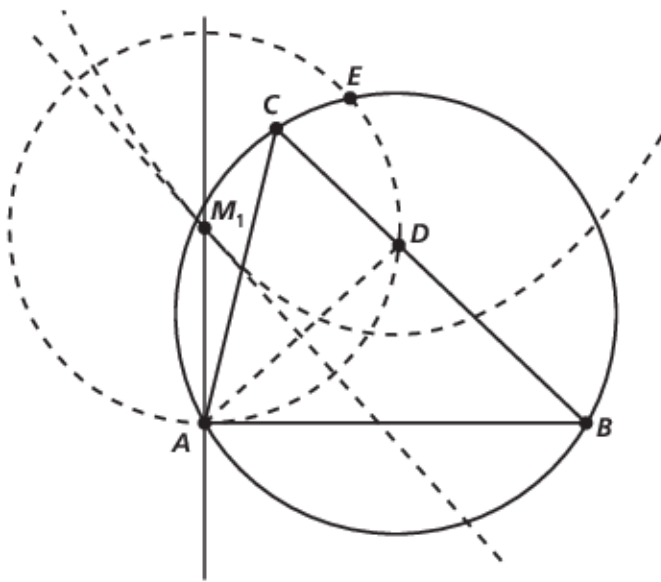
Hieruit volgt:  $L$  ligt op de middelloodlijn van  $MR$  (*middelloodlijn*).

- b De meetkundige plaats is een deel van de parabool met brandpunt  $M$  en richtlijn  $k$ . De eindpunten van het betreffende deel van de parabool zijn de eindpunten van de cirkelboog.

De top van de parabool vind je als het midden van het loodlijnstuk vanuit  $M$  op  $k$ .



92a



Het middelpunt van de cirkels door  $D$  die  $AB$  raken, heeft gelijke afstand tot lijn  $AB$  en punt  $D$ , dus ligt op de parabool met richtlijn  $AB$  en brandpunt  $D$ .

Het is niet noodzakelijk de parabool te tekenen, je vindt het middelpunt als volgt:

Het middelpunt van de cirkel door  $D$  die  $AB$  raakt in  $A$ , is het snijpunt van de middelloodlijn van  $AD$  en de loodlijn op  $AB$  door  $A$ .

Het snijpunt van deze cirkel en de omgeschreven cirkel is punt  $E$ .

- b  $\angle ABD = \angle BFD$  en  $\angle ACD = \angle CFD$  (hoek tussen koorde en raaklijn).

Dit geeft  $\angle BFC = \angle BFD + \angle CFD = \angle ABD + \angle ACD$

Dus  $\angle BFC + \angle BAC = \angle ABD + \angle ACD + \angle BAC = 180^\circ$  (hoekensom driehoek).

Hieruit volgt dat  $ABFC$  een koordenvierhoek is (omgekeerde koordenvierhoekstelling).

- 93a  $\triangle ABC$  is een gelijkzijdige driehoek, dus alle hoeken zijn  $60^\circ$ .

$\triangle BDE$  is een gelijkzijdige driehoek, dus alle hoeken zijn  $60^\circ$ .

Noem  $\angle ABD = \beta$ .

$$\left. \begin{array}{l} AB = CB \\ \angle ABE = \angle CBD (= 60^\circ + \beta) \\ BE = BD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle CBD \text{ (ZHZ)} \Rightarrow AE = CD$$

- b  $ASBC$  is een koordenvierhoek, dus  $\angle ASB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  (koordenvierhoekstelling).

$\angle BSE = \angle BDE = 60^\circ$  (constante hoek).

Dus  $\angle ASE = \angle ASB + \angle BSE = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ , dus hoek  $ASE$  is een gestrekte hoek.

- 94  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$  (Thales).

$\angle BAC = \angle ACD$  (Z-hoeken).

$\angle ACB = 90^\circ - \angle BAC$  en  $\angle CAD = 90^\circ - \angle ACD$  (hoekensom driehoek).

Hieruit volgt  $\angle CAD = \angle ACB$ , dus  $AD \parallel BC$  (Z-hoeken).

$AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$  en  $\angle ABC = 90^\circ$ , dus vierhoek  $ABCD$  is een rechthoek (parallellogram, rechthoek).

- b  $\angle CSE = \angle CDE + \angle DEM$  (buitenhoek driehoek).

$\angle DEM = \angle CME$  (Z-hoeken).

$\angle CME = 2 \cdot \angle CDE$  (omtrekshoek).

Dus  $\angle CSE = \angle CDE + 2 \cdot \angle CDE = 3 \cdot \angle CDE$ .

# Uitwerkingen voorbeeldproefwerken

## Hoofdstuk 1 – Periodieke bewegingen

- 1a**  $y = 0$  geeft  $1 - 2\cos^2(t) = 0$   
 $2\cos^2(t) = 1$   
 $\cos(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  of  $\cos(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$   
 $t = \frac{1}{4}\pi, t = \frac{3}{4}\pi, t = 1\frac{1}{4}\pi$  of  $t = 1\frac{3}{4}\pi$   
 $x = 1 + 2\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1 + 2 = 3$  of  $x = 1 + 2\sin(1\frac{1}{2}\pi) = 1 - 2 = -1$  of  
 $x = 1 + 2\sin(2\frac{1}{2}\pi) = 1 + 2 = 3$  of  $x = 1 + 2\sin(3\frac{1}{2}\pi) = 1 - 2 = -1$   
De snijpunten zijn dus:  $(-1, 0)$  en  $(3, 0)$ .
- b** Het bereik van  $x$  :  
 $-1 \leq \sin(2t) \leq 1$   
 $-2 \leq 2\sin(2t) \leq 2$   
 $-1 \leq 1 + 2\sin(2t) \leq 3$   
Het bereik van  $x$  is  $[-1, 3]$ .  
Het bereik van  $y$  :  
 $0 \leq \cos^2(t) \leq 1$   
 $-2 \leq -2\cos^2(t) \leq 0$   
 $-1 \leq 1 - 2\cos^2(t) \leq 1$   
Het bereik van  $y$  is  $[-1, 1]$ .  
Het is een rechthoek met breedte 4 en hoogte 2.
- c**  $x' = 2 \cdot (\cos(2t)) \cdot 2 = 4\cos(2t)$  en  $y' = -2 \cdot 2\cos(t) \cdot -\sin(t) = 4\cos(t) \sin(t)$   
Helling in het punt met  $t = \frac{1}{6}\pi$  is  $\left(\frac{y'}{x'}\right)_{t=\frac{1}{6}\pi} = \frac{4\cos(\frac{1}{6}\pi) \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi)}{4\cos(\frac{1}{3}\pi)} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- d**  $y' = 0$ , dus  $4\sin(t)\cos(t) = 0$  geeft  
 $\cos(t) = 0$  of  $\sin(t) = 0$   
 $t = \frac{1}{2}\pi, t = 1\frac{1}{2}\pi, t = 0, t = \pi$  of  $t = 2\pi$   
Antwoord:  $(1, 1)$  (2 keer) en  $(1, -1)$  (3 keer)
- e** Plot de grafieken van  $f(t) = -x(t) = -1 - 2\sin(2t)$  en  $g(t) = y(t) = 1 - 2\cos^2(t)$ .  
Snijpunten voor  $t = 0, t = \pi$  (exact!) en  $t = 2,0344\dots$   
Hierbij horen de punten  $(1, -1)$  en  $(-0,60; 0,60)$ .
- 2a**  $x = 2$ , dus  $4\sin(t) = 2$  dit geeft  
 $\sin(t) = \frac{1}{2}$ , dus  $t = \frac{1}{6}\pi$  of  $t = \frac{5}{6}\pi$ .  
 $t = \frac{1}{6}\pi \Rightarrow y = 4\sin(\frac{1}{6}\pi) - 2\sin(\frac{1}{3}\pi) = 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$  en  
 $t = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow y = 4\sin(\frac{5}{6}\pi) - 2\sin(1\frac{2}{3}\pi) = 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$ .
- b**  $x' = 4\cos(t)$  en  $y' = 4\cos(t) - 4\cos(2t)$ .  
 $\frac{dy}{dx} = 0$  geeft  $4\cos(t) - 4\cos(2t) = 0$   
 $\cos(t) = \cos(2t)$   
 $t = 2t + k \cdot 2\pi$  of  $t = -2t + k \cdot 2\pi$



$$t = k \cdot 2\pi \text{ of } 3t = k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \text{ of } t = k \cdot \frac{2}{3}\pi,$$

Op  $[0, 2\pi]$  zijn de oplossingen  $t = 0, t = \frac{2}{3}\pi, t = \frac{4}{3}\pi$  of  $t = 2\pi$ .

De gezochte punten zijn  $(0, 0)$ ,  $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$  en  $(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ .

- c** In de tekening zie je dat er waarschijnlijk symmetrie in  $(0, 0)$  is:

$$x(2\pi - t) = 4\sin(2\pi - t) = 4\sin(-t) = -4\sin t = -x(t)$$

$$y(2\pi - t) = 4\sin(2\pi - t) - 2\sin(2 \cdot (2\pi - t)) = 4\sin(-t) - 2\sin(4\pi - 2t) = \\ -4\sin(t) - 2\sin(-2t) = -4\sin(t) + 2\sin(2t) = -y(t)$$

$K$  is dus inderdaad symmetrisch in  $(0, 0)$ .

- d** Bij  $(0, 0)$  horen  $t = 0$  en  $t = \pi$ .

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0} = 0 \text{ en } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\pi} = \frac{-4-4}{-4} = 2.$$

Met behulp van de tekening: het antwoord is  $a \geq 2$  of  $a \leq 0$ .

**3a**  $K_{4,6}: \begin{cases} x = 4 + \sin(\frac{1}{6}t) \\ y = 6 + \cos(\frac{1}{4}t) \end{cases}$

De periode van  $x$  is  $\frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi$  en van  $y$  is deze  $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ .

De periode van  $K_{4,6}$  is dan  $24\pi$  (kleinste gemeenschappelijke veelvoud).

- b** De periodes van  $x$  en  $y$  zijn  $\frac{2\pi}{\frac{1}{b}} = b \cdot 2\pi$  en  $\frac{2\pi}{\frac{1}{a}} = a \cdot 2\pi$ .

De kleinste gemeenschappelijke periode moet  $8\pi$  zijn.

Dus  $a$  en  $b$  kunnen de waarden 1, 2 en 4 aannemen.

Mogelijk zijn dan  $a = b = 4$ ,  $a = 4$  en  $b = 2$ ,  $a = 4$  en  $b = 1$ ,  $a = 2$  en  $b = 4$ ,  $a = 1$  en  $b = 4$ .

- 4a**  $x$  en  $y$  onafhankelijk van  $a$ , dus  $a$  moet wegvallen:  $t = 0$  geeft voor elke waarde van  $a$ :  $x = 0$  en  $y = 1$ .

Elke kromme uit de gegeven familie gaat dus door  $(0, 1)$ .

**b**  $a = 2 \Rightarrow K_2: \begin{cases} x = 2\sin(t) \\ y = \cos(2t) \end{cases}$

$$x' = 2\cos(t) \text{ en } y' = -2\sin(2t)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{1}{4}\pi} = \frac{-2\sin(\frac{1}{2}\pi)}{2\cos(\frac{1}{4}\pi)} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

De helling in het punt voor  $t = \frac{1}{4}\pi$  is dus  $-\sqrt{2}$ .

**c**  $a = 3 \Rightarrow K_3: \begin{cases} x = 3\sin(t) \\ y = \cos(3t) \end{cases}$

$A$  ligt op de positieve  $x$ -as dus  $y = 0$  dit geeft

$$\cos(3t) = 0, \text{ dus } 3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi, \text{ dus } t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi.$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \Rightarrow x = 1\frac{1}{2} \text{ en } y = 0, t = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow x = 3 \text{ en } y = 0, t = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow x = 1\frac{1}{2} \text{ en } y = 0,$$

$$t = 1\frac{1}{6}\pi \Rightarrow x = -1\frac{1}{2} \text{ en } y = 0, t = 1\frac{1}{2}\pi \Rightarrow x = -3 \text{ en } y = 0,$$

$$t = 1\frac{5}{6}\pi \Rightarrow x = -1\frac{1}{2} \text{ en } y = 0$$

Zowel  $t = \frac{1}{6}\pi$  als  $t = \frac{5}{6}\pi$  leveren  $A(1\frac{1}{2}, 0)$ .



$$x' = 3\cos(t) \text{ en } y' = -3\sin(3t).$$

Voor de richtingshoek  $\alpha$  van de raaklijn in het punt met  $t = \frac{1}{6}\pi$  geldt

$$\tan(\alpha) = \frac{-3\sin(\frac{1}{6}\pi)}{3\cos(\frac{1}{6}\pi)} = \frac{-3}{1\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Hieruit volgt:  $\alpha = -49,1066\dots^\circ$

Voor de richtingshoek  $\beta$  van de raaklijn in het punt met  $t = \frac{5}{6}\pi$  geldt

$$\tan(\beta) = \frac{-3\sin(2\frac{1}{2}\pi)}{3\cos(\frac{5}{6}\pi)} = \frac{-3}{-1\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Hieruit volgt:  $\beta = 49,1066\dots^\circ$

De gevraagde hoek is gelijk is  $180^\circ - 2 \cdot 49,1066\dots^\circ = 81,7867\dots^\circ \approx 81,79^\circ$ .

**d**  $v(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 0 \Leftrightarrow x'(t) = 0 \text{ en } y'(t) = 0 \Leftrightarrow$

$$a\cos(t) = 0 \text{ en } -a\sin(at) = 0.$$

$$a\cos(t) = 0 \text{ voor } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

Voor een van deze waarden moet ook  $y' = 0$ .

$$t = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow y' = \sin(a \cdot \frac{1}{2}\pi) = 0 \text{ voor even waarden van } a.$$

$$t = 1\frac{1}{2}\pi \Rightarrow y' = \sin(a \cdot 1\frac{1}{2}\pi) = 0 \text{ voor even waarden van } a.$$

Dus voor even waarden van  $a$  heeft de bijbehorende kromme een punt waar de snelheid 0 is.

**5a** De omtrek van  $c_1$  is  $2\pi \cdot 4 = 8\pi$  en van  $c_2$  is deze  $2\pi \cdot 1 = 2\pi$ .

Bij één wenteling om  $c_1$  gaat  $c_2$  dus vier keer rond.

Op  $t = \frac{1}{2}\pi$  heeft  $c_2$  een hele omwenteling gemaakt en dus het bovenste punt van  $c_1$  bereikt, dit is  $(0, 4)$ .  $M$  is dan in  $(0, 5)$  en  $P$  bevindt zich aan de rechterkant van  $c_2$  op dezelfde hoogte als  $M$ . Dus is  $P$  in  $(1, 5)$ .

**b**  $M$  beschrijft een cirkel om  $O$  met straal 5, dus  $M$  volgt de kromme

$$\begin{cases} x = 5\cos(t) \\ y = 5\sin(t) \end{cases}$$

**c** Punt  $P$  beschrijft een cirkel met middelpunt  $M$  en straal 1.

Zou  $P$  met de oorsprong als middelpunt wentelen, dan zouden de coördinaten  $(\cos(4t), \sin(4t))$  zijn. Nu is de  $x$ -coördinaat van  $P$  de som van de  $x$ -coördinaat  $5\cos(t)$  van  $M$  met daarbij de horizontale afstand  $\cos(4t)$  van  $P$  tot  $M$ . Dus geldt  $x = f(t) = 5\cos(t) + \cos(4t)$ .

**d** Dezelfde redenering geldt voor de verticale richting, dus

$$y = g(t) = 5\sin(t) + \sin(4t).$$

## Hoofdstuk 2 – Toepassingen van integreren

**1a**  $F'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} + G'(x) = \ln(x) + 1 + G'(x)$

$$G'(x) = -1, \text{ dus b.v. } G(x) = -x \text{ of } G(x) = -x + 3 \text{ of } \dots$$

**b**  $f(x) = 1 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e$

De grafiek van  $f$  snijdt de  $x$ -as in  $(1, 0)$

De oppervlakte van  $V$  is dan

$$e \cdot 1 - \int_1^e f(x) dx = e - [x \cdot \ln(x) - x]_1^e = e - ((e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1)) = e - 1$$

c Booglengte:  $\int_1^e \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx,$

Plot  $\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}$  en benader deze integraal met de rekenmachine: 2,00349...

Omtrek van  $V$ :  $e + 1 + 1 + 2,00349... = 6,7217... \approx 6,722$ .

d  $y = \ln(x)$ , dus  $x = e^y$ . Inhoud omwentelingslichaam:

$$\pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 e^{2y} dy = \pi \left[ \frac{1}{2} \cdot e^{2y} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \pi (e^2 - 1)$$

2a De grafiek van  $f$  heeft domein  $[-2, \rightarrow)$

De grafiek snijdt de  $y$ -as in het punt  $(0, 6)$

Booglengte:

$$\int_{-2}^0 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-2}^0 \sqrt{1 + (3 \cdot \frac{1}{2} (2x+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2)^2} dx = \int_{-2}^0 \sqrt{1 + \frac{9}{2x+4}} dx,$$

Met de rekenmachine geeft dit 6,41816...

Totale omtrek:  $6,41816... + 2 + 6 \approx 14,418$

b Inhoud  $L_x$ :  $\pi \int_{-2}^0 y^2 dx = \pi \int_{-2}^0 9(2x+4) dx = 9\pi [x^2 + 4x]_{-2}^0 = 9\pi(0 - (4 - 8)) = 36\pi$

c  $y = 3\sqrt{2x+4} \Leftrightarrow 2x+4 = (\frac{1}{3}y)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{18}y^2 - 2$ .

$$\text{Inhoud } L_y: \pi \int_0^6 x^2 dy = \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{18}y^2 - 2\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{324}y^4 - \frac{2}{9}y^2 + 4\right) dy = \pi \left[\frac{1}{1620}y^5 - \frac{2}{27}y^3 + 4y\right]_0^6 = 4\frac{4}{5} - 16 + 24 = 12\frac{4}{5}$$

d Oppervlakte  $V$ :  $\int_{-2}^0 3(2x+4)^{\frac{1}{2}} dx = [(2x+4)^{\frac{1}{2}}]_{-2}^0 = 4^{\frac{1}{2}} - 0 = 8$ .

$$\text{Oppervlakte } W_p: \int_0^p 3(2x+4)^{\frac{1}{2}} dx = [(2x+4)^{\frac{1}{2}}]_0^p = (2p+4)^{\frac{1}{2}} - 8.$$

Nu moet gelden  $(2p+4)^{\frac{1}{2}} - 8 = 8$ , dus

$$(2p+4)^{\frac{1}{2}} = 16$$

$$2p+4 = 16^2$$

$$2p+4 = 4^{1\frac{1}{2}} = 4\sqrt[3]{4}$$

$$2p = 4\sqrt[3]{4} - 4$$

$$\text{Antwoord: } p = 2\sqrt[3]{4} - 2.$$

3 Hele oppervlakte:  $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 3\cos(x) dx = [3\sin(x)]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = 3 - (-3) = 6$ .

De oppervlakte van elk deel moet dus 2 zijn.

Stel de  $y$ -coördinaat van  $Q$  is  $b$ , dan is  $a = f(b)$  en er moet gelden:

$$\int_b^{\frac{1}{2}\pi} 3\cos(x)dx = 2 \Leftrightarrow [3\sin(x)]_b^{\frac{1}{2}\pi} = 2 \Leftrightarrow 3 - 3\sin(b) = 2 \Leftrightarrow \sin(b) = \frac{1}{3}.$$

Omdat  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  volgt  $\cos^2(b) = \frac{8}{9}$ .

Met  $0 < b < \frac{1}{2}\pi$  wordt het antwoord  $\cos(b) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$   $a = 3\cos(b) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ .

#### 4 Lengte van $K =$

$$\int_{-1\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dx = \int_{-1\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(2t)^2 + (\cos(t))^2} dx = 45,4910\dots$$

Het resultaat is gevonden door  $f(x) = \sqrt{(4x^4 + (\cos(x))^2)}$  te plotten en gebruik te maken van de integreeroptie op de rekenmachine.

Antwoord: 45,491.

- 5 De doorsnedefiguur van de wig met een vlak evenwijdig aan het grondvlak en op hoogte  $h$  is een ellips. De lengte van de halve lange as  $a$  is bij elke ellips gelijk aan 1, de lengte van de halve korte as  $b$  hangt af van de hoogte.

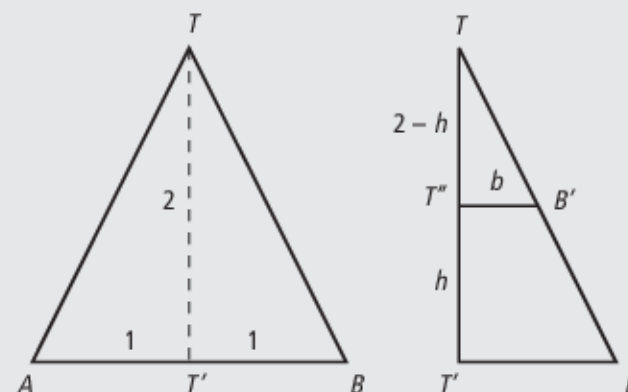
Uit gelijkvormigheid van  $\triangle T'BT$  en  $\triangle T''B'T$  volgt  $\frac{2}{2-h} = \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(2-h)$ , zie tekening.

Dus voor de oppervlakte van de ellips op hoogte  $h$  geldt:

$$O(h) = \pi \cdot 1 \cdot (1 - \frac{1}{2}h) = \pi - \frac{1}{2}\pi h;$$

de gegeven formule is dus correct.

$$\text{Inhoud van deze wig van Wallis: } \int_0^2 (\pi - \frac{1}{2}\pi h) dh = [\pi h - \frac{1}{4}\pi h^2]_0^2 = 2\pi - \frac{1}{4}\pi \cdot 4 - 0 = \pi.$$



## Hoofdstuk 3 – Cirkels en hoeken

- 1a  $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  (hoekensom driehoek)  
 $\angle PIQ = \angle CIB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 120^\circ$   
 Dus is  $\angle A + \angle PIQ = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$  en daarmee is  $AQIP$  een koordenvierhoek.
- b Uit  $\angle A + \angle PIQ = 180^\circ$  (koordenvierhoek) en  $\angle BIQ + \angle PIQ = 180^\circ$  (gestrekte hoek) volgt dat  $\angle A = \angle BIQ$ . Ook is  $\angle BIQ = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B$  (buitenhoek).  
 Dan is  $\angle A = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B$  en dus is  $2\angle A = \angle C + \angle B = 180^\circ - \angle A$ .  
 Uit  $3 \cdot \angle A = 180^\circ$  volgt  $\angle A = 60^\circ$ .
- 2a Driehoek  $AMC$  is gelijkbenig dus  $\angle MAC = \angle MCA$ .  
 Uit  $AB \parallel MC$  volgt  $\angle CAB = \angle MCA$  (Z-hoeken).  
 Dus is  $\angle CAB = \angle MAC$  en is  $AC$  de bissectrice van  $\angle BAM$ .
- b Teken de middellijn  $AD$  en de lijn  $BD$ .  
 Dan geldt  $\angle ABD = 90^\circ$  (Thales) en is  $\angle ABC = 90^\circ + \angle CBD$  (1).  
 Uit opdracht a volgt dat  $\angle CAD = \angle BAC$ .  
 $\angle CAD = \angle CBD$  (omtrekshoeken op boog  $CD$ )  
 Dus  $\angle CBD = \angle BAC$  (2).  
 Uit (1) en (2) volgt  $\angle ABC = 90^\circ + \angle BAC$ .

- 3a In de koordenvierhoek geldt  $\angle TAB = \angle TDC$  en  $\angle ABT = \angle DCT$ .

Daarmee zijn de driehoeken  $ABT$  en  $DCT$  gelijkvormig en geldt  $\frac{AB}{DC} = \frac{BT}{CT} = \frac{AT}{DT}$ .

Uit de laatste gelijkheid volgt met kruislingsvermenigvuldigen dat  $TA \times TC = TB \times TD$ .

- b Vierhoek  $ARBQ$  is een koordenvierhoek dus  $PA \times PB = PR \times PQ$  (opdracht a).  
 Vierhoek  $ASBT$  is een koordenvierhoek dus  $PA \times PB = PS \times PT$  (opdracht a).  
 Dus is  $PR \times PQ = PS \times PT$  en daarmee (omgekeerde van opdracht a) is  $QSRT$  een koordenvierhoek.

- 4a  $\angle CDB + \angle CQB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  dus is vierhoek  $CDBQ$  een koordenvierhoek.

- b Omdat  $CDBQ$  een koordenvierhoek is geldt  $\angle DBC = \angle CQD$ .

Ook vierhoek  $ADCP$  is een koordenvierhoek ( $\angle ADC = \angle APC = 90^\circ$ ) dus geldt  $\angle DAC = \angle CPD$ .

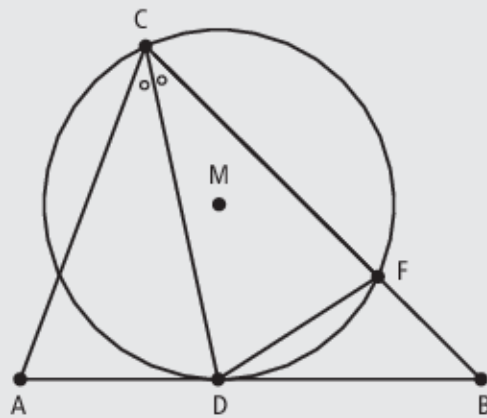
Dus zijn de driehoeken  $PDQ$  en  $ACB$  gelijkvormig ( $hh$ ).

- c  $\left. \begin{array}{l} \angle CDP = \angle CAP = 90^\circ - \angle ACP \\ \angle QBC = \angle QDC = 90^\circ - \angle QCB \\ \angle ACP = \angle QCB \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CDP = \angle QDC \Rightarrow DC \text{ is de bissectrice van } \angle PDQ$ .

- 5a  $\angle MED = \angle MCD = 90^\circ$  dus is de som van de overstaande hoeken  $180^\circ$  en daarmee is vierhoek  $MCDE$  een koordenvierhoek.

- b  $\angle MFG = \angle MCG = 90^\circ$  dus is (*constante hoek*) vierhoek  $MFCG$  een koordenvierhoek.

6a



Teken eerst een driehoek  $ABC$  met de juiste hoeken:  $\angle A = 75^\circ$ ;  $\angle B = 45^\circ$  en  $\angle C = 60^\circ$ .

Daarna de bissectrice van  $\angle C$ . Dit geeft punt  $D$  op  $AB$ .

Het middelpunt  $M$  van de cirkel ligt op de middelloodlijn van  $CD$  en op de lijn door  $D$  loodrecht op zijde  $AB$ .

- b  $\angle BDF = \angle DCF$  want beide omtrekshoeken op boog  $DF$ . Dus is  $\angle BDF = 30^\circ$ .

Dan is (*buitenhoek*)  $\angle DFC = \angle B + \angle BDF = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$ .

$$\left. \begin{array}{l} CD = CD \text{ (gemeenschappelijk)} \\ \angle ACD = \angle FCD \text{ (bissectrice } \angle C) \\ \angle A = \angle DFC \text{ (= } 75^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle FDC \text{ (ZHH) dus } AD = DF.$$

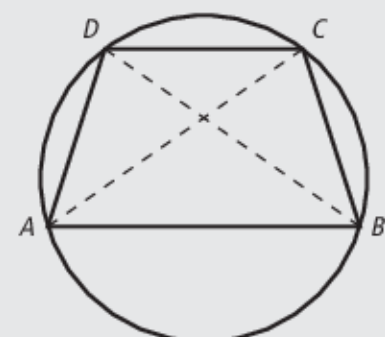
## Hoofdstuk 4 – Teken en bewijzen

- 1 Zie figuur.  $ABCD$  is een trapezium met  $AB \parallel CD$ .

Er is een omgeschreven cirkel, want het is een koordenvierhoek.

Te bewijzen:  $AD = BC$ .

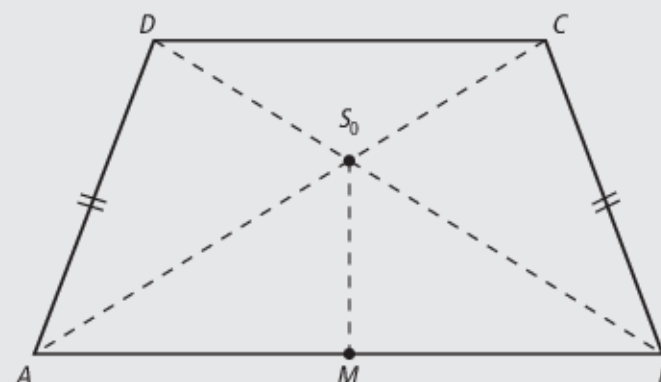
Bewijs:  $\angle ACD = \angle CAB$  (*Z-hoeken*), dus de omtrekshoeken van boog  $AD$  en boog  $BC$  zijn even groot.





Dus geldt  $bg AD = bg BC$  en daarmee geldt voor de bijbehorende koorden:  $AD = BC$ .

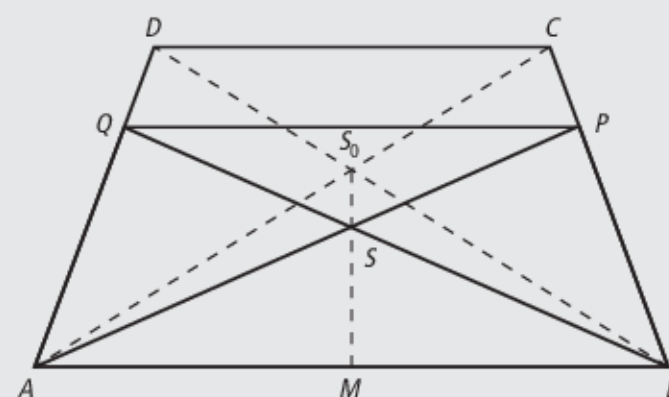
- 2a** De gezochte meetkundige plaats bestaat uit de punten van lijnstuk  $S_0M$ , waarbij  $S_0$  het snijpunt is van de diagonalen van  $ABCD$  ( $P$  in  $C$ ) en  $M$  het midden is van  $AB$  ( $P$  in  $B$ ).
- b** Bewijs.  $S$  ligt op de symmetrieas van  $ABPQ$  dankzij de gelijkbenigheid van  $ABPQ$  en daarmee op de lijn door  $S_0$  en  $M$  (de symmetrieas van  $ABCD$  en  $ABPR$ ). Boven  $S_0$  kan niet ( $P$  in  $C$ ) en onder  $M$  kan ook niet ( $P$  in  $B$ ).



Anderzijds: Neem een punt  $S$  op lijnstuk  $S_0M$ . Trek  $AP$  en  $BQ$  door  $S$ . Nu is  $\angle QAB = \angle PBA$ , want het trapezium  $ABCD$  is gelijkbenig.....(1)

$\angle SAB = \angle SBA$ , want als  $S$  op de symmetrieas van  $AB$  ligt is  $\triangle ABS$  gelijkbenig.....(2) en is  $AS = BS$ .....(3).

Uit (1), (2) en (3) volgt dat  $\triangle ASQ \cong \triangle BSP$  (HZH), dus is  $AQ = BP$ . En omdat  $\angle QAB = \angle PBA$  is  $ABPQ$  een gelijkbenig trapezium.



- 3a** In  $\triangle NLQ$  is  $QS$  bissectrice en hoogtelijn, dus:
- $$\left. \begin{array}{l} \angle NQS = \angle LQS \text{ (bissectrice)} \\ \angle NSQ = \angle LSQ = 90^\circ \text{ (hoogtelijn)} \\ QS = QS \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle NSQ \cong \triangle LSQ \text{ (HZH)}.$$
- Dus is  $\triangle NLQ$  gelijkbenig met top  $Q$ .
- b**  $\triangle NLQ$  is gelijkbenig met top  $Q$ , dus  $QS$  is behalve bissectrice en hoogtelijn ook zwaartelijn en daarmee is  $NS = SL$ . Evenzo is  $KS = SM$ . Dus in  $KLMN$  delen de diagonalen elkaar loodrecht middendoor. Daarmee is de vierhoek een ruit.
- c**  $\angle SNA = 180^\circ - \angle DNS$  (gestrekte hoek).  
 $\angle DNS = \angle CLS$  (opdracht a:  $\triangle NLQ$  is gelijkbenig met top  $Q$ ).  
 Dus  $\angle SNA = 180^\circ - \angle CLS$ .
- d** In vierhoek  $AKSN$  is  $\angle NAK + \angle AKS + \angle KSN + \angle SNA = 360^\circ$ .....(1)  
 En in vierhoek  $SLCM$  is  $\angle MSL + \angle SLC + \angle LCM + \angle CMS = 360^\circ$ .....(2)  
 Beide wegens de hoekensom van een vierhoek.  
 In (1) kun je  $\angle SNA$  vervangen door  $180^\circ - \angle CLS$  (opdracht c).  
 Evenzo kun je  $\angle AKS$  vervangen door  $180^\circ - \angle CMS$  (want met de aanpak van opdracht a kun je aantonen dat  $\triangle KPM$  gelijkbenig is met top  $P$ ).

Je krijgt nu:

$$\begin{array}{rcl} \angle NAK + 180^\circ - \angle CMS + 90^\circ + 180^\circ - \angle SLC & = & 360^\circ \\ 90^\circ + \angle SLC + \angle LCM + \angle CMS & = & 360^\circ \\ \hline \angle NAK + \angle LCM + 540^\circ & = & 720^\circ \end{array} \quad (+)$$

Dus  $\angle NAK + \angle LCM = 180^\circ$  en dus is  $ABCD$  een koordenvierhoek.

- 4a** Er zijn vier mogelijkheden. De cirkelboog heeft twee snijpunten met  $k$  en door punt  $P$  boven lijnstuk  $AB$  te kiezen vindt ze ook nog twee mogelijkheden voor  $C$  beneden de lijn door  $A$  en  $B$ . (Dus het spiegelbeeld van de figuur in lijn  $AB$  kan ook.)





$$2a \quad \tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} + \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$$

$$b \quad \tan(\alpha) - \tan(\beta) = \tan(\alpha) + \tan(-\beta) = \frac{\sin(\alpha + (-\beta))}{\cos(\alpha)\cos(-\beta)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$$

$$3a \quad f(x) = 2\cos^2(x) + \sin(2x) = 2\cos^2(x) - 1 + \sin(2x) + 1 = \sin(2x) + \cos(2x) + 1, \text{ dus } a = 1, b = 1 \text{ en } c = 1.$$

$$b \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2(x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x)(\cos(x) + \sin(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = -\sin(x) \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ of } \tan(x) = -1.$$

Op  $[\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$  zijn de oplossingen:  $x = \frac{1}{2}\pi, x = 1\frac{1}{2}\pi$  of  $x = \frac{3}{4}\pi$ .

Met een plot:  $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi$ .

$$c \quad f(x) = 2\cos^2(x) + \sin(2x) = \sin(2x) + \cos(2x) + 1$$

$$f(x) = \sin(\frac{1}{2}\pi - 2x) + \sin(2x) + 1 = 2\sin\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - 2x + 2x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - 2x - 2x}{2}\right) + 1$$

$$f(x) = 2\sin(\frac{1}{4}\pi)\cos(\frac{1}{4}\pi - 2x) + 1 = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\frac{1}{4}\pi - 2x) + 1 = \sqrt{2}\cos(\frac{1}{4}\pi - 2x) + 1$$

De periode van  $f$  is  $\pi$  dus op  $[\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$  neemt  $f(x)$  al zijn uiterste waarden  $\pm\sqrt{2} + 1$  aan.

Het bereik is  $B_f = [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$ .

$$4a \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)} =$$

$$\frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1 - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}} =$$

$$\frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$b \quad \tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha + (-\beta)) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(-\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(-\beta)} = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

5a De periode van  $K$  komt overeen met één omwenteling van de eenheidscirkel en is dus gelijk aan de omtrek daarvan:  $2\pi \cdot 1 = 2\pi$ .

$$b \quad \sqrt{2 - 2\cos(t)} = \sqrt{2 - 2(1 - 2\sin^2(\frac{1}{2}t))} = \sqrt{4\sin^2(\frac{1}{2}t)} = |2\sin(\frac{1}{2}t)| = 2\sin(\frac{1}{2}t)$$

Op  $[0, 2\pi]$  is  $\sin(\frac{1}{2}t) \geq 0$ , dus de absoluutstrepen kunnen weg.

c Het 'rechte' stuk van de omtrek beslaat één periode van  $K$  en heeft dus lengte  $2\pi$ .

Het 'kromme' stuk van de omtrek (op  $[0, 2\pi]$  bijvoorbeeld) is:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + (1 - \cos^2(t))^2} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + 1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} 2\sin(\frac{1}{2}t) dt = [-4\cos(\frac{1}{2}t)]_0^{2\pi} = (-4 \cdot -1) - (-4 \cdot 1) = 8.$$

De omtrek van  $V$  is  $8 + 2\pi$ .

$$\begin{aligned}
 \text{d} \quad \text{Opp. } V &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)) dt = \left[ t - 2\sin(t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right]_0^{2\pi} = \\
 &= (2\pi - 0 + \pi + 0) - (0) = 3\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{6a} \quad \sqrt{1 - \sin(x)} &= \sin(x) + \cos(x) \\
 1 - \sin(x) &= \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) \text{ (na kwadrateren)} \\
 2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) &= 0 \\
 \sin(x)(2\cos(x) + 1) &= 0 \\
 \sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) &= -\frac{1}{2} \\
 x = \pi \text{ (vervalt) of } x &= \frac{2}{3}\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad f(x) &= \sqrt{1 - \sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\cos(x)}{2\sqrt{1 - \sin(x)}} \\
 f'\left(\frac{1}{6}\pi\right) &= \frac{-\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{2\sqrt{1 - \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c} \quad P \text{ heeft coördinaten } (p, f(p)) &= (p, \sqrt{1 - \sin(p)}) \\
 \text{De helling van de raaklijn in } P &\text{ is } f'(p) = \frac{-\cos(p)}{2\sqrt{1 - \sin(p)}} \\
 \text{De lijn } AP \text{ staat loodrecht op de raaklijn en heeft dus helling :} \\
 -\frac{1}{f'(p)} &= \frac{2\sqrt{1 - \sin(p)}}{\cos(p)}.
 \end{aligned}$$

Deze lijn gaat door  $P$ , dus de vergelijking wordt:

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{1 - \sin(p)} + \frac{2\sqrt{1 - \sin(p)}}{\cos(p)}(x - p). \\
 \text{De lijn snijdt } y = 0 &\text{ als } -\sqrt{1 - \sin(p)} = \frac{2\sqrt{1 - \sin(p)}}{\cos(p)}(x - p) \\
 \text{Dus } -\cos(p) &= 2(x - p) \\
 2x &= 2p - \cos(p) \\
 x &= p - \frac{1}{2}\cos(p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d} \quad \text{De oppervlakte van } \triangle BAP &\text{ is:} \\
 \frac{1}{2}BA \times BP &= \frac{1}{2}(p - \frac{1}{2}\cos(p) - p) \times \sqrt{1 - \sin(p)} = -\frac{1}{4}\cos(p)\sqrt{1 - \sin(p)} = O(p) \\
 \frac{dO(p)}{dp} &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin(p)\sqrt{1 - \sin(p)} - \frac{1}{4}\cos(p) \times \frac{-\cos(p)}{2\sqrt{1 - \sin(p)}} = 0 \Leftrightarrow \\
 \sin(p)\sqrt{1 - \sin(p)} &+ \frac{\cos^2(p)}{2\sqrt{1 - \sin(p)}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin(p)(1 - \sin(p)) + \cos^2(p)}{2\sqrt{1 - \sin(p)}} = 0 \Leftrightarrow \\
 \frac{2\sin(p) - 2\sin^2(p) + \cos^2(p)}{2\sqrt{1 - \sin(p)}} &= 0 \Leftrightarrow \\
 -3\sin^2(p) + 2\sin(p) + 1 &= 0 \text{ met } \sin(p) \neq 1. \\
 (3\sin(p) + 1)(\sin(p) - 1) &= 0 \text{ met } \sin(p) \neq 1. \\
 \text{Op } D_f = \left[\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\right] &\text{ voldoet alleen } \sin(p) = -\frac{1}{3}. \\
 \text{Als } \sin(p) = -\frac{1}{3} &\text{ met } \frac{1}{2}\pi \leq p \leq 1\frac{1}{2}\pi, \text{ dan moet } \pi < p \leq 1\frac{1}{2}\pi \text{ en is} \\
 \cos(p) &= -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{1}{3}\sqrt{8}. \\
 \text{De maximale oppervlakte is:} \\
 -\frac{1}{4} \times -\frac{1}{3}\sqrt{8} \times \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} &= \frac{1}{12}\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{12}\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{96}{9}} = \frac{1}{9}\sqrt{6}.
 \end{aligned}$$

## Hoofdstuk 6 – Functies onderzoeken

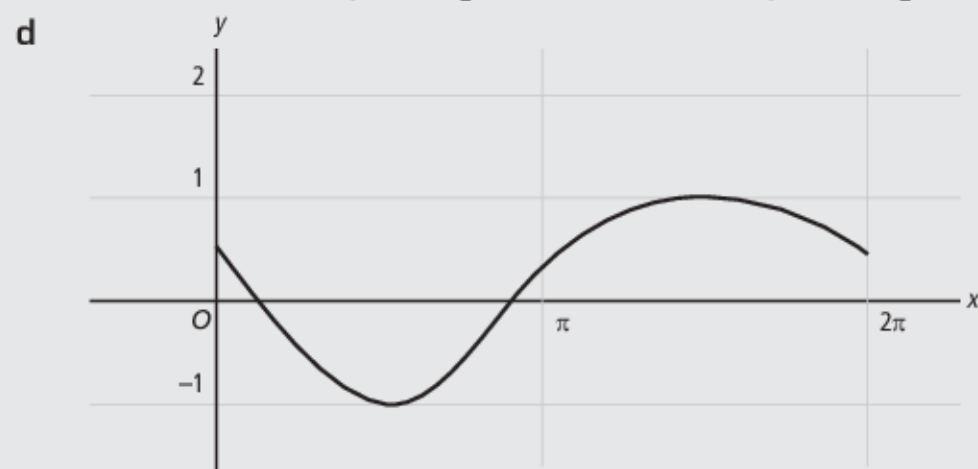
**1a**  $\frac{2\sin(x) - 1}{\sin(x) - 2} = 0 \Rightarrow 2\sin(x) = 1 \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}$   
Met domein  $[0, 2\pi]$  geeft dit  $x = \frac{1}{6}\pi$  of  $x = \frac{5}{6}\pi$ .

**b** 
$$f'(x) = \frac{2\cos(x) \cdot (\sin(x) - 2) - (2\sin(x) - 1) \cdot \cos(x)}{(\sin(x) - 2)^2} =$$
$$\frac{2\sin(x)\cos(x) - 4\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x)}{(\sin(x) - 2)^2} = \frac{-3\cos(x)}{(\sin(x) - 2)^2}$$

De grafiek van  $f$  is stijgend als  $\cos(x) < 0$  dus op het interval  $[\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ .

**c**  $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\pi$  of  $x = 1\frac{1}{2}\pi$   
Minimum  $f(\frac{1}{2}\pi) = \frac{2-1}{1-2} = -1$  en maximum  $f(1\frac{1}{2}\pi) = \frac{-2-1}{-1-2} = 1$ .

Randmaximum  $f(0) = \frac{1}{2}$  en randminimum  $f(2\pi) = \frac{1}{2}$ .



**e** 
$$f''(x) = \frac{3\sin(x)(\sin(x) - 2)^2 + 3\cos(x) \cdot 2(\sin(x) - 2) \cdot \cos(x)}{(\sin(x) - 2)^4} =$$
$$\frac{3\sin(x)(\sin(x) - 2) + 6\cos(x)\cos(x)}{(\sin(x) - 2)^3} = \frac{3\sin^2(x) - 6\sin(x) + 6\cos^2(x)}{(\sin(x) - 2)^3} = 0$$

geeft  $3\sin^2(x) - 6\sin(x) + 6\cos^2(x) = 0 \Rightarrow 3\sin^2(x) - 6\sin(x) + 6(1 - \sin^2(x)) = 0$  dus

$$-3\sin^2(x) - 6\sin(x) + 6 = 0 \Rightarrow \sin^2(x) + 2\sin(x) - 2 = 0.$$

Met de  $abc$ -formule vind je  $\sin(x) = -1 + \sqrt{3}$ . ( $\sin(x) = -1 - \sqrt{3} < -1$  dus vervalt)

Dit laatste invullen in het functievoorschrift geeft

de  $y$ -coördinaat van de buigpunten:  $\frac{2(-1 + \sqrt{3}) - 1}{-1 + \sqrt{3} - 2} = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{-3 + \sqrt{3}}.$

**2a** 
$$f'(x) = \frac{(e^{0.5x} + xe^{0.5x} \cdot \frac{1}{2})(x-1) - xe^{0.5x} \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}e^{0.5x}(x^2 - x - 2)}{(x-1)^2}$$

Uiterste waarde als  $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$  dus voor  $x = -1$  of  $x = 2$ .

De uiterste waarden zijn: maximum  $f(-1) = \frac{1}{2}\sqrt{e^{-1}}$  en minimum  $f(2) = 2e$ .

**b** De noemer gelijk stellen aan nul geeft de verticale asymptoot  $x = 1$ .

Horizontale asymptoot  $y = 0$  want  $\sqrt{e^x} \rightarrow 0$  als  $x \rightarrow -\infty$ .

**3** Raken:  $f(x) = g_c(x) \wedge f'(x) = g'_c(x)$ .

Dus  $\ln(x) = cx^2 \wedge \frac{1}{x} = 2cx$ .

Uit de laatste vergelijking volgt  $cx^2 = \frac{1}{2}$  dus is  $\ln(x) = \frac{1}{2}$  en is  $x = \sqrt{e}$ .



Dit laatste invullen in  $cx^2 = \frac{1}{2}$  geeft  $ce = \frac{1}{2}$  ofwel  $c = \frac{1}{2e}$ .

De grafieken van  $f(x) = \ln(x)$  en  $g_{\frac{1}{2e}}(x) = \frac{x^2}{2e}$  raken elkaar.

$$4a \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} \rightarrow \frac{1}{1 - 0 + 0} = 1 \text{ als } x \rightarrow \pm \infty \text{ dus horizontale}$$

asymptoot  $y = 1$ .

Uit  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$  volgt verticale asymptoot  $x = 2$ .

$$b \quad g(x) = \frac{x}{x - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{1}{1 - 0} = 1 \text{ als } x \rightarrow \pm \infty \text{ dus horizontale asymptoot } y = 1.$$

Uit  $1 - \frac{1}{x^2} = 0$  volgen verticale asymptoten  $x = 1$  en  $x = -1$ .

c De grafiek van  $h(x) = \sin(x) - \tan(2x)$  heeft geen horizontale asymptoten.  
Verticale asymptoten bij  $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$  dus  $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$  ( $k$  geheel).

$$d \quad k(x) = \frac{\ln(x^4)}{e^{x-2} - 4} \rightarrow 0 \text{ als } x \rightarrow \infty$$

dus horizontale asymptoot  $y = 0$ .

Verticale asymptoot  $x = 0$ . En  $e^{x-2} - 4 = 0$  geeft verticale asymptoot  $x = 2 + \ln(4)$ .

$$e \quad l(x) = \frac{\ln(x^2) + 4}{\ln(x) - 4} = \frac{2\ln(x) + 4}{\ln(x) - 4} = \frac{2 + \frac{4}{\ln(x)}}{1 - \frac{4}{\ln(x)}} \rightarrow \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2 \text{ als } x \rightarrow \infty.$$

Dus de horizontale asymptoot is  $y = 2$ .

Uit  $\ln(x) - 4 = 0$  volgt dat  $x = e^4$  een verticale asymptoot is.

N.B.  $x = 0$  is geen verticale asymptoot want

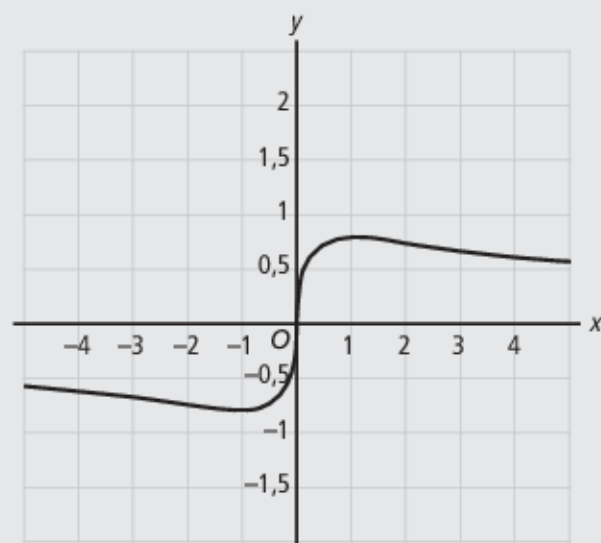
$$l(x) = \frac{\ln(x^2) + 4}{\ln(x) - 4} = \frac{2\ln(x) + 4}{\ln(x) - 4} = \frac{2 + \frac{4}{\ln(x)}}{1 - \frac{4}{\ln(x)}} \rightarrow \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2 \text{ als } x \downarrow 0.$$

$$f \quad m(x) = \frac{e^x}{e - e^x} \rightarrow \frac{0}{e - 0} = 0 \text{ als } x \rightarrow -\infty. \text{ Dus horizontale asymptoot } y = 0.$$

$$m(x) = \frac{e^x}{e - e^x} = \frac{1}{\frac{e}{e^x} - 1} \rightarrow \frac{1}{0 - 1} = -1 \text{ als } x \rightarrow \infty. \text{ Dus horizontale asymptoot } y = -1.$$

Uit  $e - e^x = 0$  volgt dat  $x = 1$  een verticale asymptoot is.

5a



$$b \quad f(-x) = \sqrt[3]{\frac{-x}{1 + (-x)^2}} = \sqrt[3]{\frac{-x}{1 + x^2}} = -\sqrt[3]{\frac{x}{1 + x^2}} = -f(x)$$



$$\text{c} \quad f(x) = \left( \frac{x}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{x}{1+x^2} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{x}{1+x^2} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ of } x = -1$$

$$f(-1) = \sqrt[3]{\frac{-1}{1+1}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ en } f(1) = \sqrt[3]{\frac{1}{1+1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

De toppen zijn  $(-1, -\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$  en  $(1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}})$ .

$$\text{d} \quad \sqrt[3]{\frac{x}{1+x^2}} = 2x \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} = 8x^3 \Rightarrow 8x^3 + 8x^5 = x$$

$$x(8x^4 + 8x^2 - 1) = 0$$

Dan is  $x = 0$  of  $8x^4 + 8x^2 - 1 = 0$ .

$$\text{Met de abc-formule vind je } x^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{96}}{16} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{6}}{16} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{6}.$$

Alleen  $x^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$  geeft oplossingen.

De  $x$ -coördinaten van de snijpunten zijn:  $x = 0$  en  $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}}$ .

$$\text{6a} \quad f_a(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \Rightarrow f'_a(x) = \frac{(2x+a)(x^2+x+1) - (x^2+ax+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$\frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + ax^2 + ax + a - (2x^3 + x^2 + 2ax^2 + ax + 2x + 1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2 - ax^2 + a - 1}{(x^2+x+1)^2}$$

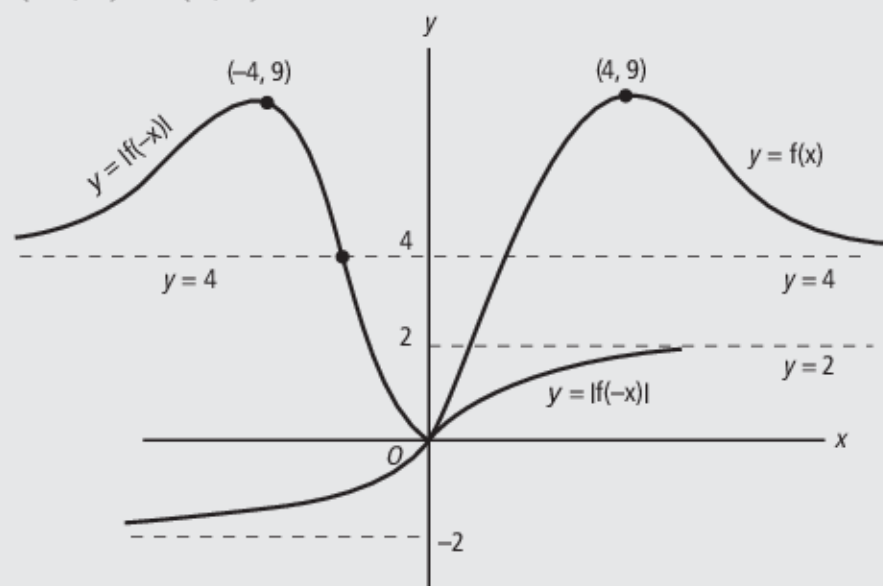
$$\text{Uit } f'_a(2) = \frac{2^2 - a \cdot 2^2 + a - 1}{(2^2 + 2 + 1)^2} = \frac{3 - 3a}{49} > 0 \text{ volgt } a < 1.$$

$$\text{b} \quad f'_a(x) = \frac{x^2 - ax^2 + a - 1}{(x^2+x+1)^2} = 0 \text{ geeft } x^2 - ax^2 + a - 1 = 0.$$

$$\text{Dit laatste kun je herleiden tot } x^2(1-a) = 1-a \text{ dus is } x^2 = \frac{1-a}{1-a} = 1 \text{ mits } a \neq 1.$$

Dit geeft  $x = \pm 1$ , onafhankelijk van  $a$ .

- 7a** De grafiek van  $m(x) = |f(-x)|$  ontstaat uit de grafiek van  $f(x)$  door te spiegelen in de  $y$ -as en vervolgens het deel van de grafiek onder de  $x$ -as te spiegelen in de  $x$ -as. De asymptoten zijn dan  $y = 4$  en  $y = 2$ . Snijpunt met de assen  $(0, 0)$  en de toppen  $(-4, 9)$  en  $(0, 0)$ .

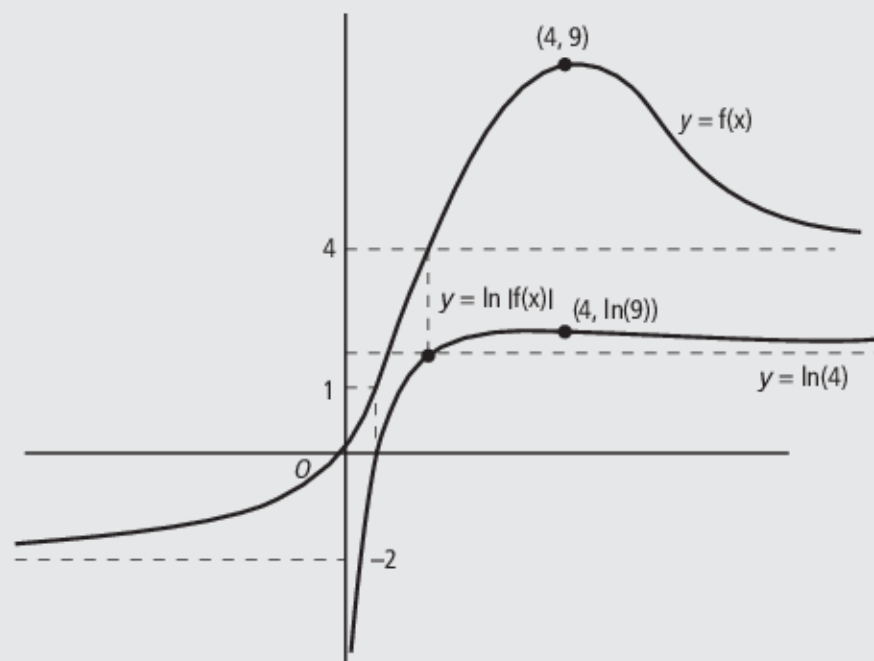


- b** De grafiek van  $g(x) = \ln(f(x))$  bestaat niet voor  $x \leq 0$  omdat dan ook  $f(x) \leq 0$ . Op  $(0, 4]$  is  $g(x)$  stijgend van  $-\infty$  tot  $\ln(9)$ , dus de grafiek van  $g(x)$  heeft verticale asymptoot  $x = 0$ .

Op  $[4, \rightarrow)$  is  $g(x)$  dalend tot de horizontale asymptoot  $y = \ln(4)$ .

Snijpunt met de  $x$ -as is het punt op de  $x$ -as waar  $f(x) = 1$ .

De top van de grafiek is het punt  $(4, \ln(9))$ .

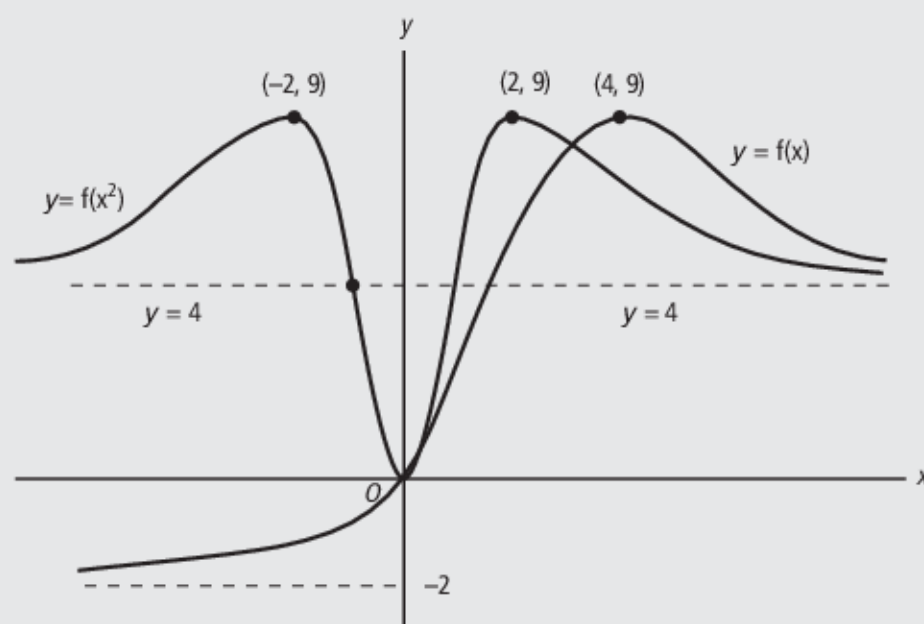


- c De grafiek van  $h(x) = f(x^2)$  is stijgend op het interval  $[0, 2]$  het bereik op dat interval is  $[0, 9]$ .

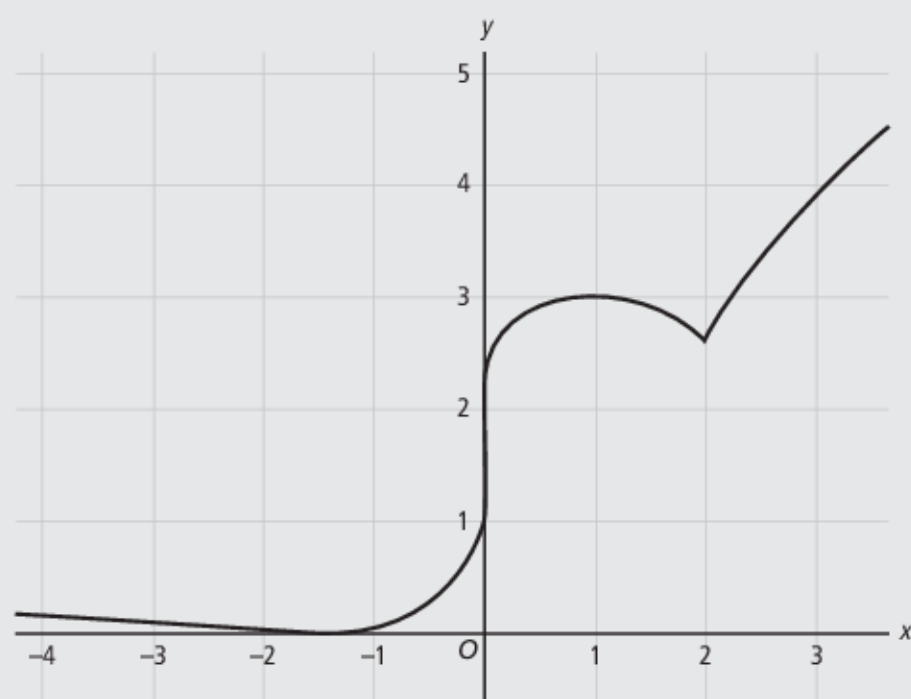
De grafiek van  $h(x)$  daalt op  $[2, \rightarrow)$  met horizontale asymptoot  $y = 4$ .

Op  $\langle \leftarrow, 0]$  is de grafiek van  $h(x)$  het spiegelbeeld in de  $y$ -as van het deel van de grafiek van  $h(x)$  met domein  $[0, \rightarrow)$ .

Horizontale asymptoot  $y = 4$ , toppen  $(-2, 9)$ ,  $(0, 0)$  en  $(2, 9)$ . Snijpunt met de assen  $(0, 0)$ .



8a



$$\mathbf{b} \quad f(x) = 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{(x-2)^2} = 2x^{\frac{1}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot (x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{x-2} = -\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow x-2 = -x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Dit laatste ontbinden geeft  $(x-1)(x+2) = 0$ .

De uiterste waarden zijn  $f(-2) = -2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} = 0$  en  $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ .

$f'(0)$  en  $f'(2)$  bestaan niet. In beide gevallen is er sprake van een verticale raaklijn.

Bij  $x = 2$  is er sprake van een minimum  $f(2) = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{(2-2)^2} = 2\sqrt[3]{2}$ .

Moderne Wiskunde is meer dan dit boek.

De boeken, het digitale lesmateriaal en het docentenmateriaal vormen samen het complete pakket van de methode Moderne Wiskunde.

Werken met computer, boek of digibord, op school of thuis: met Moderne Wiskunde is alles mogelijk.

Ga naar [www.modernewiskunde.noordhoff.nl](http://www.modernewiskunde.noordhoff.nl) voor het digitale lesmateriaal voor leerling en docent.

Noordhoff Uitgevers