5085LIAL6Y Lineaire Algebra KI/INF: Eerste Deeltentamen ***[Huiswerkversie]***
2 maart 2017, 9-11, IWO 4.04C(Blauw)

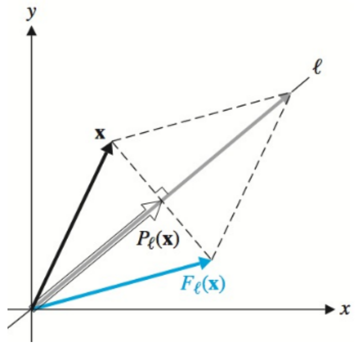
- De vragen zijn opgesplitst in deelvragen om je denkproces te structureren en zoveel mogelijk te kunnen goedrekenen. De deelvragen hangen daardoor deels samen. Maar ze zijn ook zoveel mogelijk onafhankelijk gemaakt. Als je iets niet weet kan je vaak een paar deelvragen later weer instromen!
- Een vraag met [**PAPIER**] wordt op papier nagekeken, de andere vragen zijn SOWISO vragen.
- Iedere vraag is 1 punt waard (als je hem goed hebt). Lees hem na afloop even na: heb je de *hele* vraag beantwoord?
- Niet-grafische rekenmachientjes en fopspenen toegestaan. Blijf kalm en veel succes!

1 Oorspronkelijk vlak

Een vlak V gaat door de oorsprong $O = (0, 0, 0)$ en de punten $A = (1, 0, -1)$ en $B = (2, 1, 0)$.

1. Geef een vectorvergelijking (*vector form*) van het vlak V.
2. Geef een normaalvergelijking (*normal form*) van het vlak V.
3. Geef een eenheidsnormaalvector $\vec{n}$ (*unit normal vector*) voor V. Geef een exact antwoord. Controleer je antwoord degelijk, want een aantal volgende vragen hebben $\vec{n}$ nodig!
4. [**PAPIER**] Ligt het punt $P = (-2, 1, 2)$ op het vlak V? Geef de argumentatie.
5. Geef de *normal form* van een vlak W dat parallel loopt aan V en door het punt $P = (-2, 1, 2)$ gaat. Geef je antwoord in de vorm $a\,x + b\,y + c\,z = d$ (wat Poole de 'general form' noemt).
6. [**PAPIER**] ***[Deze niet als p-HW1 vraag!]*** De orthogonale projectie op dit vlak W is geen lineaire operatie. Waarom niet?
7. Bepaal exact de afstand van het vlak W (van vraag 5) tot de oorsprong O. ***['exact' betekent voor SOWISO: niet een numerieke benadering]***
8. De *orthogonale support vector* van een vlak is een plaatsvector $\vec{s}$ van een punt S in het vlak, die bovendien loodrecht op het vlak staat. Bepaal de orthogonale support vector $\vec{s}$ van het vlak W van vraag 5. Geef je antwoord in de vorm $\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix}$ met s_x, s_y en s_z de x, y en z coördinaten van de vector $\vec{s}$.

2 Spiegeltje, spiegeltje...



Een spiegeling $F_\ell(\,)$ in een 2D lijn (door de oorsprong) is gerelateerd aan de orthogonale projectie $P_\ell(\,)$ op die lijn. Bijstaande figuuur suggereert dat

$$\tfrac{1}{2}\big(\vec{x} + F_\ell(\vec{x})\big) = P_\ell(\vec{x}).$$

Als we de orthogonale projectie kennen kunnen we dus de spiegeling afleiden. Daar gaan we mee aan de slag.

9. [**PAPIER**] Als de richting van de lijn door de oorsprong gegeven wordt door de vector $\vec{d}$, bewijs dan dat de orthogonale projectie van $\vec{x}$ is gegeven door:

$$P_\ell(\vec{x}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{x}}{\vec{d}\cdot\vec{d}}\,\vec{d}.$$

door te verifiëren dat het resultaat de twee eigenschappen heeft die je van zo'n projectie verwacht (de juiste lengte en richting).

10. [**PAPIER**] De projectie op zich is weer '*de identiteitsoperatie ('doe niks') minus de projectie op de normaalvector $\vec{n}$ van de lijn*'. Het voordeel van die zienswijze is dat hij niet alleen de projectie op een lijn in 2D geeft, maar ook op een vlak in 3D (en zelfs op een hypervlak in n-D). Herschrijf $P_\ell(\vec{x})$ in die vorm.

11. [**PAPIER**] Je hebt nu dus een formule om de projectie op de lijn te schrijven met behulp van de projectie op de normaalvector. Die formule werkt ook in 3D voor de projectie op een vlak, als je de normaalvector van het vlak hanteert.

Gebruik nu de constructie en formule uit het plaatje (dat je kunt beschouwen als "een vlak van opzij gezien") om de formule voor de spiegeling $F_{\vec{n}}(\vec{x})$ te bepalen. Hierbij is $F_{\vec{n}}(\vec{x})$ de spiegeling van een vector $\vec{x}$ in een vlak door de oorsprong, met normaalvector $\vec{n}$. Zorg ervoor dat je formule ook werkt als $\vec{n}$ geen eenheidsnormaalvector is.

$$F_{\vec{n}}(\vec{x}) =$$

12. [**PAPIER**] Laat zien dat voor de normaalvector $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ je formule, van het antwoord op de vorige vraag, leidt tot de matrix:

$$F_{\vec{n}} = \frac{1}{n_1^2+n_2^2+n_3^2}\begin{bmatrix} -n_1^2+n_2^2+n_3^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_2n_1 & n_1^2-n_2^2+n_3^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_3n_1 & -2n_3n_2 & n_1^2+n_2^2-n_3^2 \end{bmatrix}$$

13. Als je de formule voor de matrix $F_{\vec{n}}$ niet kon afleiden mag je hem voor waar aannemen in de volgende vragen.

Bepaal de matrix van de spiegeling in het vlak $x_3 = 0$. Laten we die gemakshalve S_1 noemen, je hebt hem straks weer nodig.

14. Bepaal de matrix van de spiegeling in het vlak met normaalvector $\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Laten we die gemakshalve S_2 noemen, je hebt hem straks weer nodig.

15. Bepaal de matrix van de samengestelde operatie: eerst met S_1 spiegelen en dan met S_2 (dus niet andersom!).

16. Transformeer het punt met vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ met de samengestelde operatie uit de vorige vraag.

17. [**PAPIER**] Twee spiegelingen in vlakken zijn samen een rotatie. Dus de operatie 'eerst S_1 dan S_2' is een rotatie R. Geef de hoek (exact) en de as van die rotatie R. ***[Op het tentamen was dit een BONUS vraag.]***

18. [**PAPIER**] Beschouw een algemene rotatie R in $\mathbb{R}^3$ om een as $\vec{a}$ over een hoek ϕ. Als je een vector $\vec{x}$ roteert en dus $R\vec{x}$ maakt, onder welke omstandigheden (dus: voor welke $\vec{x}$, $\vec{a}$, ϕ) zijn $\vec{x}$ en $R\vec{x}$ afhankelijk?

19. [**PAPIER**] Beschouw de spiegeling S_1 uit vraag 13. Er zijn deelruimtes V van $\mathbb{R}^3$ die getransformeerd worden in zichzelf door de spiegeling S_1; voor zo'n V geldt dus: 'voor alle $\vec{x}$ in V ligt ook $S_1(\vec{x})$ in V'. Geef minstens vier van dit soort 'invariante deelruimtes', allemaal van verschillende dimensies.

20. [**PAPIER**] Geef *alle* invariante deelruimtes van de spiegeling S_1 uit vraag 13. ***[Op het tentamen was dit een BONUS vraag.]***

21. [**PAPIER**] Bepaal het beeld (image) en de kern (null space) van S_2 uit vraag 14.