

1 Least Squares First! It's Yuge!

De eerste vier cijfers van een student die blijkbaar moest leren studeren zijn: week 1 een 1, week 2 een 2, week 3 een 2 en week 4 een 3. We hebben reden om te veronderstellen dat het een (stijgende) lijn is van de vorm $c = aw + b$, met $(w, c) = (1,1), (2,2), (3,2)$ en $(4,3)$. We gaan een goede voorspelling doen van wat deze student in week 5 gaat halen.

1. Wat zijn de onbekenden in dit probleem?
2. Geef de vergelijkingen waar die onbekenden aan zouden moeten voldoen.
3. Maak een matrixvergelijking van dit probleem: herschrijf je vergelijkingen in de vorm $A\vec{x} = \vec{b}$, en geef A , $\vec{x}$ en $\vec{b}$.
4. Of de vergelijkingen van vraag 2 strijdig (*inconsistent*) zijn of niet, we gaan gewoon de kleinste-kwadraten-methode (*least squares method*) toepassen om de modelparameters zo goed mogelijk te bepalen. De optimale parametervector $\vec{x}_*$ uit de kleinste-kwadratenmethode voldoet aan een matrixvergelijking $C\vec{x}_* = \vec{d}$, waarbij de C en $\vec{d}$ afhangen van je antwoord op vraag 3. Geef C en $\vec{d}$.
5. Als je het allemaal goed gedaan hebt voldoen $a_* = 0.6$ en $b_* = 0.5$. (Hint: je kunt dit even gebruiken om je antwoord te controleren!) Maak een duidelijke tekening van de data en het optimale model.
6. Gebruik je tekening om uit te leggen wat er nu eigenlijk optimaal is aan die lijn met waarden 0.6 en 0.5.
7. Gebruik het model om te voorspellen welk cijfer de student zal halen in week 5.
8. Gebruik de matrix A en de vector $\vec{b}$ om voor ieder datapunt de 'fout' (*error*) te bepalen tussen model en data. Geef je antwoord als een 4-dimensionale foutvector $\vec{e}$.
9. Wat is er nu zo goed aan die 'foutvector' $\vec{e}$ gebaseerd op de kleinste-kwadraten-methode om $\vec{x}_*$ te bepalen? (Dit is uiteraard gerelateerd aan vraag 6, maar nu op een andere manier bezien in de geometrie van de kleinste-kwadratenmethode.)
10. **Bonus:** Bereken de projectie $\vec{v}$ van $\vec{b}$ op de deelruimte (*subspace*) $\text{col}(A)$.
11. Als we als model hadden aangenomen dat de student iedere week hetzelfde cijfer had gehaald, dan zou de kleinste-kwadraten-methode als beste schatting voor dat cijfer het gemiddelde hebben genomen van de weekcijfers. Toon dat aan, dus stel het betreffende model op en los het op. Gebruik hierbij dezelfde data als in de rest van deze opdracht: $(w, c) = (1, 1), (2, 2), (3, 2)$ en $(4, 3)$.

2 Scoor Vol Doende

12. Wat betekent SVD, en wat zie je aan de SVD van een matrix expliciet wat je niet makkelijk aan de matrix zelf ziet?
13. Maak de volgende text kloppend door termen te selecteren uit de opties onderaan. Niet alle opties worden benut, en het zou kunnen zijn dat je er eentje meer dan eens nodig hebt. Voor wie het woord niet kent: de *reciproke* van een getal α is $1/\alpha$.

Een lineaire afbeelding (transformatie) van $\mathbb{R}^m$ naar $\mathbb{R}^n$ kan worden gerepresenteerd door een matrix M met de afmetingen $\dots(a)$. Van zo'n matrix kunnen we een decompositie maken met behulp van de SVD als $M = U \Sigma V^T$.

De matrix U is een $\dots(b)$, waarvan de kolommen bestaan uit een orthonormale basis van $\dots(c)$ van de matrix $\dots(d)$.

De matrix V is een $\dots(e)$, waarvan de kolommen bestaan uit een orthonormale basis van $\dots(f)$ van de matrix $\dots(g)$.

De matrix Σ is een $\dots(h)$. De niet-nul waarden van de matrix Σ zijn gelijk aan de $\dots(i)$ van de matrix M en zijn ook gelijk aan de wortels van de $\dots(j)$ van de matrix MM^T (or $M^T M$).

Er is een conventie over de ordening van de $\dots(k)$, om de SVD meer uniek te maken. Met die conventie is er toch nog altijd enige vrijheid in keuze van de matrices; de matrix U is wel/niet(l) uniek, Σ is wel/niet(m) uniek, en V is wel/niet(n) uniek.

1	$m \times n$	11	M	21	orthonormale matrix	31	eigenvectoren
2	$n \times m$	12	M^T	22	orthogonale matrix	32	eigenwaarden
3	$n \times n$	13	$M^T M$	23	symmetrische matrix	33	eigenruimten
4	$m \times m$	14	MM^T	24	vierkante matrix	34	singuliere vectoren
		15	$\Sigma^T \Sigma$	25	diagonaalmatrix	35	singuliere waarden
		16	U	26	niet-vierkante 'diagonaalmatrix'	36	wortels van singuliere waarden
		17	Σ	27	identiteitsmatrix	37	wortels van eigenwaarden
		18	V	28	permutatiematrix	38	reciproke eigenwaarden
		19	V^T	29	projectiematrix	39	reciproke singuliere waarden

Gegeven is de SVD van een matrix $B = U \Sigma V^T$ op zeven onbekenden (paaseitjes!) na:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 1 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & a \\ 1/3 & 2/3 & b \\ -2/3 & 2/3 & c \end{bmatrix}^T.$$

LET OP! Zoals gebruikelijk bij een SVD staat er een transpose bij die laatste matrix!

14. Bereken a , b , c . Er zijn 2 mogelijke uitkomsten, geef ze beide.
15. Slechts één van de mogelijkheden voor a , b , c maakt van U een rotatiematrix. Welke?
16. Bereken f en g .
17. Wat zijn de waarden van d en e ? (a): $(d, e) = (-1, 0)$, (b): $(d, e) = (1, 0)$, (c): beide kunnen.
18. **Bonus:** Lees de kern (*nullspace*) van B af uit de SVD.
19. Het is mogelijk twee loodrechte vectoren $\vec{y}$ en $\vec{z}$ in het domein $\mathbb{R}^3$ te vinden, die door de transformatie B naar twee loodrechte vectoren in het bereik (*range*) $\mathbb{R}^2$ worden gestuurd. Bepaal $\vec{y}$ en $\vec{z}$.

20. Bepaal de SVD van B^T . (Geef hem in een compacte algebraïsche notatie.)

21. De *pseudoinverse* van een matrix B is de matrix

$$B^+ = \frac{1}{\sigma_1} \vec{v}_1 \vec{u}_1^T + \frac{1}{\sigma_2} \vec{v}_2 \vec{u}_2^T + \cdots \frac{1}{\sigma_r} \vec{v}_r \vec{u}_r^T,$$

waarbij $r = \text{rank}(B)$, en $\vec{u}_i$ en $\vec{v}_i$ de i -de kolommen van U en V zijn in zijn SVD, en σ_i de i -de singuliere waarde is. Bereken B^+ voor bovenstaande B . (Je hebt hier een paar van de onbekenden a t/m g nodig.)

22. Bereken $B B^+$ om te laten zien dat B^+ inderdaad een soort inverse is. (Deze kan ook zonder het numerieke antwoord op de vorige vraag!)