

Differentiëren, afgeleide functies en Taylorbenaderingen

Theorie: Differentiequotiënt en raaklijn

In toepassingen zijn we vaak geïnteresseerd in de manier waarop een grootte verandert. Snelheid is een alledaags begrip en we maken daarbij onderscheid tussen *gemiddelde snelheid* en *momentane snelheid*. De gemiddelde snelheid van een bewegend voorwerp over een bepaald tijdsverloop is gelijk aan de snelheid van een eenparige beweging, zodanig dat over datzelfde tijdsverloop de verplaatsing dezelfde is. Deze gemiddelde snelheid kan afwijken van de momentane snelheid, d.w.z. de snelheid op een bepaald tijdstip. Laten we dit veralgemeniseren voor een grootte $f(t)$ die van tijd t afhangt. Laten we hierbij de taal van wiskundige functies gebruiken.

Definitie

We bekijken een functie $f(t)$ over het tijdsinterval $a \leq t \leq b$. De **gemiddelde toenamesnelheid** van de functie over dit interval is te definiëren als het **differentiequotiënt**

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De grootheden Δf en Δt heten **differenties**. Het differentiequotiënt hangt dus af van de functiewaarden f op de randen van het tijdsinterval $[a, b]$, de lengte van het tijdsinterval en bijvoorbeeld het startmoment $t = a$.

Regel

De gemiddelde toenamesnelheid van de functie $f(t)$ over het tijdsinterval $a \leq t \leq b$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$.

Als je nu het startmoment $t = a$ vast kiest, maar de lengte Δt van het tijdsinterval steeds kleiner maakt, dan zal voor een ‘nette’ functie f het differentiequotiënt in de buurt van een zeker getal, zeg m , komen te liggen. Dit getal m is de **richtingscoëfficiënt** van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$. Dit heeft te maken met het feit dat de grafiek van een ‘nette’ functie in (bijna) elk punt ‘glad’ is, d.w.z. in (bijna) elk punt bij sterk inzoomen op een rechte lijn lijkt. Deze rechte lijn heet de **raaklijn** in het beschouwde punt.

Voorbeeld

Voor de kwadratische functie $f(t) = 3t^2 - 2t - 1$ berekenen we het differentiequotiënt over de tijdsintervallen $[1, 1.1]$, $[1, 1.01]$, $[1, 1.001]$ en $[1, 1.0001]$

$$\Delta t = 0.1 \quad \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(1.1) - f(1)}{0.1} = \frac{0.433 - 0}{0.1} = 4.3$$

$$\Delta t = 0.01 \quad \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(1.01) - f(1)}{0.01} = \frac{0.0403 - 0}{0.01} = 4.03$$

$$\Delta t = 0.001 \quad \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(1.001) - f(1)}{0.001} = \frac{0.004003 - 0}{0.001} = 4.003$$

$$\Delta t = 0.0001 \quad \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(1.0001) - f(1)}{0.0001} = \frac{0.00040003 - 0}{0.0001} = 4.0003$$

Je vermoedt nu wel dat $\frac{\Delta f}{\Delta t} \rightarrow 4$ op het tijdsinterval $1, 1 + \Delta t$ als $t \rightarrow 0$. We zullen dit later verifiëren.

Voorbeeld: Mathcentre hulpbronnen

The Gradient of a Straight-Line Segment (20:46)

Opgaven: Berekenen van een differentiequotiënt

Vraag 1.1

Bereken de gemiddelde toenamesnelheid van $f(t) = t^3$ over het interval $1 \leq t \leq 2$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \dots\dots\dots$$

Vraag 1.2

Bereken de gemiddelde toenamesnelheid van $f(x) = x^2$ over het interval $2 \leq x \leq 3$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \dots\dots\dots$$

Vraag 1.3

Bereken de gemiddelde toenamesnelheid van $f(x) = x^3$ over het interval $[x, x + h]$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \dots\dots\dots$$

Theorie: Een numerieke afgeleide (Python opdracht)

We nemen de functie uit het eerste voorbeeld:

$$f(t) = 3t^2 - 2t - 1$$

We gebruiken het differentiequotiënt

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

op het interval $[1, 1 + \Delta t]$ om de afgeleide $f'(1) = 4$ te benaderen door verschillende waarden voor Δt te gebruiken.

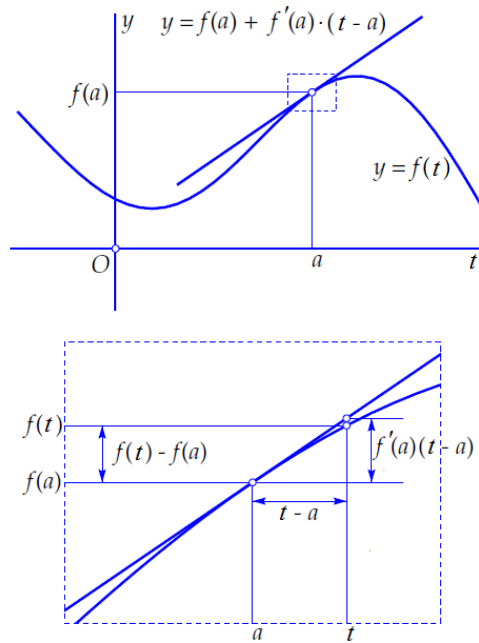
Schrijf een Python programma dat onderstaande tabel aflevert met benaderingen van $f'(1)$ via een differentiequotiënt met $\Delta t = 10^{-n}$ voor zeker natuurlijk getal n :

n	$\frac{\Delta f}{\Delta t}$
1	4.300000000000000604
2	4.02999999999997804
3	4.0029999999999062
4	4.00029999999773622
5	4.00003000002868703
6	4.00000299993763520
7	4.00000029987523931
8	3.99999997569011612
9	4.00000033096148400
10	4.00000033096148400
11	4.00000033096148400
12	4.00035560232936405
13	3.99680288865056355
14	3.99680288865056355
15	4.44089209850062616
16	0.000000000000000000

Deze tabel toont aan dat we voor een goede benadering van een afgeleide enerzijds Δt klein moeten kiezen omdat anders de afbreekfout groot is, maar anderzijds Δt ook niet te klein kunnen kiezen omdat we dan last krijgen van afrondfouten. Zoals we later in de cursus zullen zien ligt de oplossing voor numeriek differentiëren in het gebruik van betere benaderingsmethoden.

Theorie: Afgeleide functie

Hieronder is de grafiek van een nette functie $f(t)$ getekend, met daarbij ook de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. Vlak in de buurt van dit punt zijn de grafiek en de raaklijn nauwelijks van elkaar te onderscheiden. Als illustratie hiervan is het rechthoekje rond het punt $(a, f(a))$ in de figuur eronder nog eens vergroot weergegeven.



Definitie

Voor t vlak bij a geldt blijkbaar

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \approx \frac{m \cdot (t - a)}{t - a} = m$$

Preciezer geformuleerd in termen van een limiet (limieten worden nog behandeld):

$$m = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

Men noemt m de **afgeleide** van $f(t)$ in a en noteert dit met $f'(a)$ en met $\frac{df}{dt}(a)$.

Regel

De vergelijking van de raaklijn in het punt $(a, f(a))$ is gelijk aan

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (t - a).$$

Voor t in de buurt van a geldt dus:

$$f(t) \approx f(a) + f'(a) \cdot (t - a).$$

Bovenstaande betekent ook dat als de functiewaarde en afgeleiden voor een zekere t bekend zijn, men ook functiewaarden op afstand dt goed kan schatten met de volgende formule:

$$f(t + dt) \approx f(t) + f'(t) \cdot dt.$$

Hoe dichter in de buurt van t (ofwel hoe kleiner de tijdstap dt), des te beter is de schatting van de functiewaarde.

Definitie

Voor een ‘nette’ functie $f(t)$ op een interval is er dus in elk punt t van dat interval een afgeleide $f'(t)$ gedefinieerd. Daarmee is de afgeleide op het interval zelf een functie geworden, de **afgeleide functie**. Veelgebruikte notaties voor de afgeleide functie van $f(t)$ zijn f' , $\frac{df}{dt}$, $f'(t)$, $\frac{df}{dt}(t)$ en $\frac{d}{dt}f(t)$. Het bepalen van een afgeleide van een gegeven functie heet **differentiëren**.

Voorbeeld

Laten we de afgeleide functie voor de kwadratische functie uit bovenstaand voorbeeld eens uitrekenen.

Voor de kwadratische functie $f(t) = 3t^2 - 2t - 1$ berekenen we het differentiequotient over het tijdsinterval $[t, t + \Delta t]$.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta t} &= \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\&= \frac{(3(t + \Delta t)^2 - 2(t + \Delta t) - 1) - (3t^2 - 2t - 1)}{\Delta t} \\&= \frac{(3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2(t + \Delta t) - 1) - (3t^2 - 2t - 1)}{\Delta t} \\&= \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2\Delta t}{\Delta t} \\&= 6t - 2 + 3\Delta t \\&\rightarrow 6t - 2 \quad \text{als } \Delta t \rightarrow 0\end{aligned}$$

Dus: $f'(t) = 6t - 2$ en in het bijzonder $f'(1) = 4$.

Het bepalen van een afgeleide op bovenstaande wijze is omslachtig, maar gelukkig bestaan er lijstjes met afgeleiden van standaardfuncties en rekenregels om efficiënt functies te differentiëren bij combinaties van functies.

Voorbeeld: Mathcentre hulpbronnen

Differentiation First Principles - Tangent (30:44)

Theorie: Een eenvoudige afgeleide

Laat a en b reële getallen zijn.

Regel

Laat f de lineaire functie zijn gedefinieerd door

$$f(t) = a \cdot t + b$$

Dan is de afgeleide een constante:

$$f'(t) = a$$

Meer

Voor elk reëel getal t en $\Delta t \neq 0$ is het differentiequotiënt

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{(a \cdot (t + \Delta t) + b) - (a \cdot t + b)}{\Delta t}$$

$$= \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta t} \quad \text{haakjes uitgewerkt}$$

$$= a \quad \text{vereenvoudigd met } \Delta t \neq 0$$

Omdat het differentiequotiënt gelijk is aan de constante a , zal de afgeleide in elk punt t ook gelijk zijn aan a .

Regel

Een speciaal geval is de constante f gedefinieerd door

$$f(t) = b$$

Dan is de afgeleide gelijk aan:

$$f'(t) = 0$$

Meer

Voor elk reëel getal t en $\Delta t \neq 0$ is het differentiequotiënt

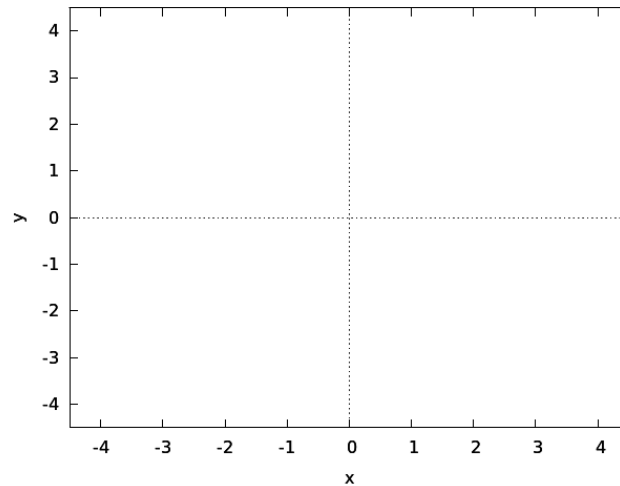
$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{b - b}{\Delta t} = 0$$

Omdat het differentiequotiënt gelijk is aan nul, zal de afgeleide in elk punt t ook gelijk zijn aan nul.

Opgaven: Een raaklijn tekenen

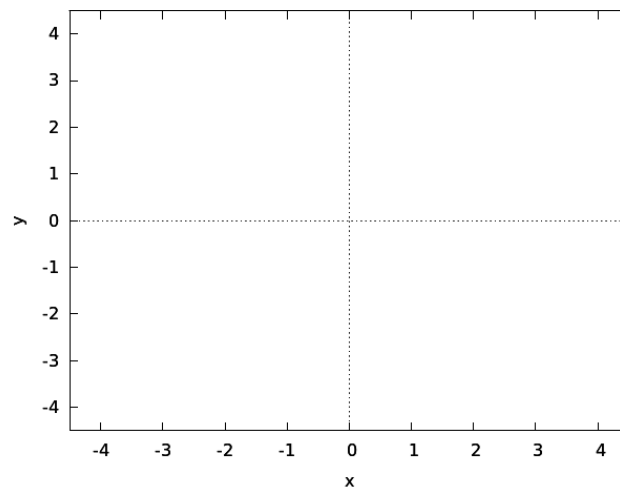
Vraag 1

Stel dat $f(x)$ een lineaire functie is met afgeleide $f'(x) = -1$ en as-afsnede $(0, -1)$. Teken hieronder deze lijn.



Vraag 2

Stel dat $f(x)$ een lineaire functie is met afgeleide $f'(x) = -2$ en as-afsnede $(0, -2)$. Teken hieronder deze lijn.



Theorie: Afgeleide van een machtsfunctie

Eerst maar eens een voorbeeld van een afgeleide van een machtsfunctie, berekend op basis van de basisdefinitie van afgeleide.

Voorbeeld

Bereken het differentiequotient van $f(x) = x^2$ over het interval $[x, x + \Delta x]$ en bepaal hiermee de afgeleide functie $f'(x)$.

Oplossing

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\&= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\&= \frac{x^2 + 2x \cdot (\Delta x) + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\&= 2x + (\Delta x) \\&\rightarrow 2x \quad \text{als } \Delta x \rightarrow 0\end{aligned}$$

Dus: $f'(x) = 2x$

Bij het bekijken van voldoende voorbeelden wordt het patroon zichtbaar.

Voorbeeld: Afgeleide van een machtsfunctie

De afgeleide van de functie $f(x) = x^p$ is gelijk aan $f'(x) = p \cdot x^{p-1}$ voor elk getal p .

Voorbeeld: Mathcentre hulpbronnen

Differentiating Powers by First Principles

Opgaven: Differentiëren van een machtsfunctie

Vraag 1

Bereken de afgeleide van de functie $f(y) = y^{1.9}$.

$f'(y) = \dots\dots\dots$

Vraag 2

Bereken de afgeleide van de functie $f(y) = 2y^{-0.6}$.

$f'(y) = \dots\dots\dots$

Vraag 3

Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = 5x^{-3}$.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 4

Schrijf de functie $f(y) = 9\sqrt{y}$ eerst in de gedaante van een machtsfunctie en bereken daarna de afgeleide $f'(y)$.

$$f(y) = \dots\dots\dots$$

$$f'(y) = \dots\dots\dots$$

Theorie: De constante factorregel en de som- en verschilregel

De volgende regels worden gebruikt worden bij het differentiëren van een functie die

- een veelvoud van een andere functie is;
- de som of het verschil van twee andere functies is.

Voorbeeld: Rekenregels

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \text{voor elke constante } c$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Meer

Voor de liefhebber geven we het bewijs van de constante factorregel en de som- en verschilregel

Voor $F(x) = c \cdot f(x)$, $s(x) = f(x) + g(x)$ en $v(x) = f(x) - g(x)$ geldt

$$\begin{aligned}\frac{\Delta F}{\Delta x} &= \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\&= \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} \\&= c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\&\rightarrow c \cdot f'(x) \quad \text{als } \Delta x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\&= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\&\rightarrow f'(x) + g'(x) \quad \text{als } \Delta x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta v}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - g(x + \Delta x) - (f(x) - g(x))}{\Delta x} \\&= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\&\rightarrow f'(x) - g'(x) \quad \text{als } \Delta x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

We noemen bovenstaande regels voor het differentiëren van een functie achtereenvolgens de **constante factorregel**, de **somregel** en de **verschilregel**.

De laatste rekenregel is enigszins overbodig omdat deze al volgt uit de eerste twee:

$$\begin{aligned}
 (f(x) - g(x))' &= \left(f(x) + (-1 \cdot g(x)) \right)' \\
 &= f'(x) + (-1 \cdot g(x))' \\
 &= f'(x) + (-1 \cdot g'(x)) \\
 &= f'(x) - g'(x)
 \end{aligned}$$

Opgaven: Constante factorregel, som- en verschilregel toepassen

Vraag 1

Bereken de afgeleide van de functie $f(t) = 2.7 \cdot t^{-3.7} - 39$.

$$f'(t) = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Bereken de afgeleide van de functie $f(u) = u^{0.4} - u^{-0.6}$.

$$f'(u) = \dots\dots\dots$$

Vraag 3

Schrijf de functie $f(t) = t^5 \cdot \sqrt{t} + \frac{1}{t^7}$ eerst in de gedaante van een som van machtsfuncties en bereken daarna de afgeleide $f'(t)$.

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

$$f'(t) = \dots\dots\dots$$

Vraag 4

Schrijf de functie $f(x) = \frac{5x^{10} + 5x^4 - 3x^3}{x^3}$ eerst in de gedaante van een som van machtsfuncties (als veelterm dus) en bereken daarna de afgeleide $f'(x)$.

$$f(x) = \dots\dots\dots$$

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Theorie: De productregel

Bekijk eerst maar eens een voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies

$$f(t) = t^2 - 5$$

$$g(t) = t^2 - 4t - 5$$

$$p(t) = f(t) \cdot g(t)$$

$$= (t^2 - 5) \cdot (t^2 - 4t - 5)$$

Bereken

$$f'(t)$$

$$g'(t)$$

$$p'(t) \quad (\text{werk eerst haakjes in } p(t) \text{ uit})$$

$$f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

Oplossing Uitwerken van het product geeft:

$$p(t) = (t^2 - 5) \cdot (t^2 - 4t - 5)$$

$$= t^4 - 4 \cdot t^3 - 10 \cdot t^2 + 20 \cdot t - 10$$

Dus:

$$f'(t) = 2t$$

$$g'(t) = 2t - 4$$

$$p'(t) = 4 \cdot t^3 - 12 \cdot t^2 - 20 \cdot t + 20$$

$$f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t) = 2t \cdot (t^2 - 4t - 5) + (t^2 - 5) \cdot (2t - 4)$$

$$= (2t^3 - 8t^2 - 10t) + (2t^3 - 4t^2 - 10t + 20)$$

$$= 4 \cdot t^3 - 12 \cdot t^2 - 20 \cdot t + 20$$

Merk in dit geval op:

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

Het patroon is duidelijk en kan veralgemeniseerd worden tot de **productregel** voor differentiëren.

Voorbeeld: Productregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

of in verkorte notatie

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Meer

Voor de liefhebber geven we het bewijs van de productregel $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Voor $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geldt

$$\begin{aligned}\frac{\Delta p}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\&= \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\&= \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\&= \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \\&\rightarrow f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{als } \Delta x \rightarrow 0\end{aligned}$$

Je kunt deze productregel ook homogeniseren:

$$\frac{(f \cdot g)'}{f \cdot g} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$$

In deze vorm is gemakkelijk te zien wat er met een product van drie functies moet gebeuren:

$$\frac{(f \cdot g \cdot h)'}{f \cdot g \cdot h} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \frac{h'}{h}$$

Voorbeeld: Mathcentre hulpbronnen

Product Rule (14:37)

Opgaven: Toepassen van productregel

Vraag 1

Bereken met de productregel de afgeleide functie van $f(x) = 2x \cdot (x^3 + 1)$ en schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk op.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Bereken met de productregel de afgeleide functie van $f(x) = (4x^2 + 4x + 3) \cdot (2x - 3)$ en schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk op.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 3

Bereken met de productregel de afgeleide functie van $f(x) = 3x^5(\frac{1}{5}x^2 - 9)$ en schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk op.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 4

Bereken met de productregel de afgeleide functie van $f(x) = x^4(x^3 + 3)$ en schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk op.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Theorie: De quotiëntregel

We beginnen eerst maar eens met een speciaal geval van de quotiëntregel voor differentiëren:

Regel
$\text{Als } q(x) = \frac{1}{g(x)}, \text{ dan } q'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

Meer

Voor de liefhebber geven we het niet zo moeilijke bewijs:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta q}{\Delta x} &= \frac{q(x + \Delta x) - q(x)}{\Delta x} \\&= \left(\frac{1}{g(x + \Delta x)} - \frac{1}{g(x)} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} \\&= \left(\frac{g(x) - g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} \\&= -\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)} \\&= -\frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)} \\&\rightarrow -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{als } \Delta x \rightarrow 0\end{aligned}$$

De algemene **quotiëntregel** voor differentiëren is:

Voorbeeld: Quotiëntregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Meer

Voor de liefhebber geven we het bewijs van de quotiëntregel $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Voor $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ geldt m.b.v. de productregel en bovenstaand speciaal geval:

$$\begin{aligned} q'(x) &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right)' \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)} \right)' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2} \right) \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Een paar voorbeelden illustreren de quotiëntregel, die we in het kort noteren als $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

Voorbeeld

Differentieer de volgende functie met de quotiëntregel:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

waarbij

$$f(x) = -2x, \quad g(x) = 3x^2 + 2$$

Bereken achtereenvolgens $f'(x)$ en $g'(x)$.

Bereken en vereenvoudig de afgeleide van het quotiënt, d.w.z. $q'(x)$.

Oplossing

$$f'(x) = -2$$

$$g'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$$

$$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{quotiëntregel}$$

$$= \frac{-2 \cdot (3x^2 + 2) + 2x \cdot 6x}{(3x^2 + 2)^2} \quad \text{substitutie}$$

$$= \frac{6x^2 - 4}{(3x^2 + 2)^2} \quad \text{vereenvoudiging}$$

Voorbeeld

Differentieer de volgende functie met de quotiëntregel:

$$q(x) = \frac{2x - 3}{5x - 2}$$

Schrijf $q'(x)$ in de eenvoudigste vorm.

Oplossing

$$q'(x) = \frac{(2x - 3)' \cdot (5x - 2) - (2x - 3) \cdot (5x - 2)'}{(5x - 2)^2}$$

quotiëntregel

$$= \frac{2 \cdot (5x - 2) - (2x - 3) \cdot 5}{(5x - 2)^2}$$

afgeleiden van lineaire functies

$$= \frac{11}{(5x - 2)^2}$$

vereenvoudiging

Voorbeeld: Mathcentre hulpbronnen

Quotient Rule (16:47)

Opgaven: Toepassen van quotiëntregel

Vraag 1

Differentieer de functie

$$f(x) = \frac{-4}{2 - 3x^2}$$

Kies een handige rekenregel om de opgave uit te werken.

Tip: je hoeft de haakjes in een antwoord niet uit te werken.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Differentieer de functie

$$f(x) = \frac{3x^2 + 3x - 3}{x^2}$$

Kies een handige rekenregel om de opgave uit te werken.

Breng niet alles in het antwoord onder één noemer.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 3

Differentieer de functie

$$f(x) = \frac{2x(x^{-4} - 5)}{x}$$

Kies een handige rekenregel om de opgave uit te werken.
Breng niet alles in het antwoord onder één noemer.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 4

Differentieer de functie

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x + 8}$$

Kies een handige rekenregel om de opgave uit te werken.
Tip: je hoeft de haakjes in de noemer niet uit te werken.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Theorie: De kettingregel

Bekijk eerst maar eens een paar voorbeelden.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies

$$f(t) = t^4$$

$$g(t) = 2t - 3$$

$$\begin{aligned} s(t) &= f(g(t)) \\ &= (g(t))^4 \\ &= (2t - 3)^4 \end{aligned}$$

Bereken

$$f'(t)$$

$$g'(t)$$

$$s'(t) \quad (\text{werk eerst haakjes in } s(t) \text{ uit})$$

$$f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

Oplossing Uitwerken van de samengestelde functie geeft:

$$\begin{aligned} s(t) &= (2t - 3)^4 \\ &= 16 \cdot t^4 - 96 \cdot t^3 + 216 \cdot t^2 - 216 \cdot t + 81 \end{aligned}$$

Dus:

$$f'(t) = 4t^3$$

$$g'(t) = 2$$

$$s'(t) = 64 \cdot t^3 - 288 \cdot t^2 + 432 \cdot t - 216$$

$$\begin{aligned} f'(g(t)) \cdot g'(t) &= 4(2t - 3)^3 \cdot 2 \\ &= 8(8 \cdot t^3 - 36 \cdot t^2 + 54 \cdot t - 27) \\ &= 64 \cdot t^3 - 288 \cdot t^2 + 432 \cdot t - 216 \end{aligned}$$

Merk in dit geval op:

$$\left(f(g(t)) \right)' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$g(x) = x^2 - 4x - 4$$

$$\begin{aligned} s(x) &= f(g(x)) \\ &= (g(x))^2 - 2 \\ &= (x^2 - 4x - 4)^2 - 2 \end{aligned}$$

Bereken

$$f'(x)$$

$$g'(x)$$

$$s'(x) \quad (\text{werk eerst haakjes in } s(x) \text{ uit})$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Oplossing Uitwerken van de samengestelde functie geeft:

$$\begin{aligned} s(x) &= (x^2 - 4x - 4)^2 - 2 \\ &= x^4 - 8 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 32 \cdot x + 14 \end{aligned}$$

Dus:

$$f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = 2x - 4$$

$$s'(x) = 4 \cdot x^3 - 24 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 32$$

$$\begin{aligned} f'(g(x)) \cdot g'(x) &= 2(x^2 - 4x - 4) \cdot (2x - 4) \\ &= (2x^2 - 8x - 8) \cdot (2x - 4) \\ &= 4x^3 - 8x^2 - 16x^2 + 32x - 16x + 32 \\ &= 4 \cdot x^3 - 24 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 32 \end{aligned}$$

Merk in dit geval op:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Het patroon is duidelijk en kan veralgemeeniseerd worden tot de **kettingregel** voor differentiëren.

Voorbeeld: Kettingregel

$$(f \circ g)'(x) = \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{mits de afgeleiden bestaan})$$

Voorbeeld

Een bijzonder geval van toepassing van de kettingregel is het berekenen van de afgeleide van een functie na een lineaire transformatie.

Als $s(x) = f(a \cdot x + b)$, dan $s'(x) = a \cdot f'(x)$

Het eerste probleem bij dit alles is misschien nog wel het herkennen van de samenstelling van functies.

Een handige notatie kan helpen; zie onderstaande twee voorbeelden.

Voorbeeld

De functie

$$h(x) = (3x^2 - 1)^5$$

is te schrijven als samenstelling van twee functies:

$$f(u) = u^5 \text{ en } u = 3x^2 - 1$$

De afgeleiden van deze functies zijn:

$$f'(u) = \frac{df}{du} = 5u^4 \text{ en } u'(x) = \frac{du}{dx} = 6x.$$

Herinner je dat de notatie $\frac{df}{du}$ betekent dat je f naar u differentieert en daarna desgewenst

voor u kunt invullen $3x^2 - 1$. De notatie $\frac{du}{dx}$ betekent dat je u naar x differentieert.

Volgens de kettingregel geldt dan:

$$h'(x) = \frac{d(f(u(x)))}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5(3x^2 - 1)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 - 1)^4$$

Voorbeeld

De functie

$$h(t) = \sqrt{3t^2 + 4}$$

is te schrijven als samenstelling van twee functies:

$$f(u) = \sqrt{u} \text{ en } u = 3t^2 + 4$$

De afgeleiden van deze functies zijn:

$$f'(u) = \frac{df}{du} = (\sqrt{u})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ en } u'(t) = \frac{du}{dt} = 6t.$$

Volgens de kettingregel geldt dan:

$$h'(t) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{3t^2 + 4}} \cdot 6t = \frac{3t}{\sqrt{3t^2 + 4}}$$

Voorbeeld: Mathcentre hulpbronnen

Chain Rule (24:35)

Opgaven: Toepassen van kettingregel

Vraag 1

Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = (5x - 4)^2$ met behulp van de kettingregel.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = \sqrt{2r^2 - 4}$ met behulp van de kettingregel.

$$f'(r) = \dots\dots\dots$$

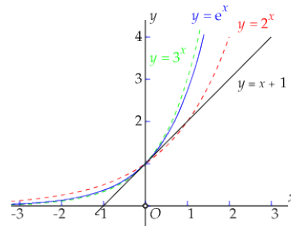
Vraag 3

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = (8r - 5)^4 \sqrt{8r - 5}$ met behulp van de kettingregel.

$$f'(r) = \dots\dots\dots$$

Theorie: Afgeleiden van exponentiële functies

We roepen in herinnering dat dé exponentiële functie $f(x) = e^x$ geïntroduceerd is als de exponentiële functie met een zodanig grondtal (aangeduid met e) dat de grafiek van f en de rechte lijn met vergelijking $y = x + 1$ elkaar raken in het punt $(0, 1)$.



Dit betekent dat de functiewaarden van $f(x)$ en $y(x) = 1 + x$ weinig van elkaar verschillen voor kleine waarden van x . Met andere woorden: $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$ voor kleine Δx , oftewel

$$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow 1 \text{ als } \Delta x \rightarrow 0$$

Voor het differentiequotiënt van f geldt dus

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \frac{e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &\rightarrow e^x \text{ als } \Delta x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

We hebben zojuist bewezen dat de afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = e^x$ gelijk is aan de functie zelf. Dit is het belangrijkste om te onthouden.

Voorbeeld: Afgeleide van de exponentiële functie

Als $f(x) = e^x$ dan $f'(x) = e^x$

De afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = e^x$ is gelijk aan de functie zelf. Deze functie heeft dus de eigenschappen dat $f'(x) = f(x)$. Dit is niet de enige functie met deze eigenschap: voor de functie $g(x) = c \cdot e^x$, met constante c , geldt dit ook.

Met bovenstaand resultaat en eerdere rekenregels kan de afgeleide voor een exponentiële functie met elk grondtal gevonden worden. Maar eigenlijk moet je de afgeleide van deze standaardfunctie uit het hoofd leren.

Voorbeeld: Afgeleide van een exponentiële functie met grondtal a

Als $f(x) = a^x$ dan $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$ voor elk grondtal $a > 0$

Meer

Voor de liefhebber geven we het wiskundige bewijs van $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$. Eerst schrijven we de functie anders op: $f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln(a)} = (e^x)^{\ln(a)}$. Met de kettingregel en de afgeleide voor een machtsfunctie kunnen we nu $f(x)$ differentiëren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((e^x)^{\ln(a)} \right)' \\ &= \ln(a) \cdot (e^x)^{\ln(a)-1} \cdot (e^x)' \\ &= \ln(a) \cdot (e^x)^{\ln(a)-1} \cdot e^x \\ &= \ln(a) \cdot (e^x)^{\ln(a)} \\ &= \ln(a) \cdot a^x \end{aligned}$$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $f(t) = 10 \cdot 5^t$

Oplossing

$$\begin{aligned} f'(t) &= 10 \cdot (5^t)' \\ &= 10 \cdot 5^t \cdot \ln(5) \\ &= 10 \cdot \ln(5) \cdot 5^t \end{aligned}$$

Merk op dat de functie $f(t)$ de volgende eigenschap bezit: $f'(t) = \ln(5) \cdot f(t)$.

Opgaven: Differentiëren van exponentiële functies

Vraag 1

Pas de rekenregels voor differentiëren en de formule voor de afgeleide van de exponentiële functie toe om de afgeleide van de functie $f(t) = 2e^t - 92$ uit te rekenen.

$$f'(t) = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Pas de rekenregels voor differentiëren en de formule voor de afgeleide van de exponentiële functie toe om de afgeleide van de functie $f(r) = r^4 e^{-r}$ uit te rekenen.

$$f'(r) = \dots\dots\dots$$

Vraag 3

Pas de rekenregels voor differentiëren en de formule voor de afgeleide van de exponentiële functie toe om de afgeleide van de functie $f(t) = (3t^2 + 4) \cdot e^t$ uit te rekenen.

$$f'(t) = \dots\dots\dots$$

Vraag 4

Pas de rekenregels voor differentiëren en de formule voor de afgeleide van de exponentiële functie toe om de afgeleide van de functie $f(t) = e^{4t-1}$ uit te rekenen.

$$f'(t) = \dots\dots\dots$$

Vraag 5

Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = 300 \cdot 1.85^x$.
Rond eventueel af tot 2 decimalen.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 6

Bereken de afgeleide van de functie $f(t) = 5.29 \cdot 0.11^t + 97$.
Rond eventueel af tot 2 decimalen.

$$f'(t) = \dots\dots\dots$$

Vraag 7

Bereken de afgeleide van de functie $f(t) = 19 \cdot 4^{2t+2}$.
Rond eventueel af tot 2 decimalen.

$$f'(t) = \dots\dots\dots$$

Vraag 8

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = (3r^2 + 2) \cdot 1.45^r$.
Rond eventueel af tot 2 decimalen.

$$f'(r) = \dots\dots\dots$$

Theorie: Afgeleiden van logaritmische functies

Nu we de afgeleide van een exponentiële functie kennen is ook de afgeleide van een logaritmische functie te bepalen. Om te onthouden:

Voorbeeld: Afgeleide van een logaritmische functie

Als $f(x) = \log_a(x)$ dan $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ voor elk grondtal $a > 0$, $a \neq 1$

Meer

Voor de liefhebber geven we het bewijs van $(^a\log(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$.

Merk op dat de identieke functie $s(x) = x$ gelijk is de samenstelling van de functie $f(u) = a^u$ met $u = {}^a\log(x)$. Volgens de kettingregel en de formule voor de afgeleide van een machtsfunctie geldt:

$$1 = s'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x) = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'(x) = x \cdot \ln(a) \cdot u'(x)$$

Dus:

$$u'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $f(t) = \log_7(9t)$

Oplossing $f(t) = \log_7(9t)$ is de samenstelling van $y = \log_7(u)$ en $u = 9t$.

Dan: $\frac{dy}{du} = \frac{1}{\ln(7) \cdot u}$ en $\frac{du}{dt} = 9$. De kettingregel geeft:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= \frac{1}{\ln(7) \cdot 9t} \cdot 9 \\ &= \frac{1}{\ln(7)} \cdot \frac{1}{t} \end{aligned}$$

Merk op dat de functie $f(t)$ de volgende eigenschap bezit: $f'(t)$ is een veelvoud van $\frac{1}{t}$.

Een bijzonder geval is de afgeleide van de natuurlijke logaritme:

Voorbeeld: Afgeleide van $\ln$

Als $f(x) = \ln(x)$ dan $f'(x) = \frac{1}{x}$

Opgaven: Differentiëren van logaritmische functies

Vraag 1

Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \ln(19x) - \ln(9x)$.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Reken de afgeleide van de functie $f(x) = x^6 \ln(3x)$ exact uit.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Vraag 3

Reken de afgeleide van de functie $f(r) = \log_3(8r)$ exact uit.

$$f'(r) = \dots\dots\dots$$

Theorie: Logaritmisch differentiëren

Stel dat je een functie van de vorm

$$y(x) = (f(x))^{g(x)}$$

met $f(x) > 0$ wilt differentiëren. Dit kun je bewerkstelligen door de functie te herschrijven als

$$y(x) = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

en dan de kettingregel en productregel voor differentiëren toe te passen.

Nota bene: de herschrijving van de functie krijg je door aan weerszijden van de oorspronkelijke uitdrukking de natuurlijke logaritme toe te passen. Dit geeft $\ln(y(x)) = \ln((f(x))^{g(x)}) = g(x) \cdot \ln(f(x))$. Pas nu aan weerszijden de exponentiële functie en versimpel; het herschrijven is daarmee klaar.

Maar het berekenen van de afgeleide $y'(x)$ kan ook gaan via de methode die bekend staat onder de naam **logaritmisch differentiëren**. Hierbij pas je eerst aan weerszijden van de uitdrukking de natuurlijke logaritme toe; je krijgt dan

$$\ln(y(x)) = g(x) \cdot \ln(f(x)).$$

Hierna bereken je de afgeleide van de uitdrukkingen links en rechts van het gelijkteken; dit geeft met de rekenregels voor differentiëren

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g'(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Dus:

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x) \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g'(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \\ &= (f(x))^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g'(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right). \end{aligned}$$

Aansprekender is het volgende voorbeeld van logaritmisch differentiëren.

Voorbeeld: Voorbeeld van logaritmisch differentiëren

Opdracht:

Bereken $y'(1)$ voor $y(x) = \sqrt{x(x+1)(x+2)}$.

Uitwerking:

Pas op beide zijden van $y(x) = \sqrt{x(x+1)(x+2)}$ de natuurlijke logaritme toe en

vereenvoudig. Dit geeft:

$$\begin{aligned}\ln(y(x)) &= \ln\left(\sqrt{x(x+1)(x+2)}\right) \\ &= \ln\left((x(x+1)(x+2))^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(x(x+1)(x+2)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln(x) + \ln(x+1) + \ln(x+2)).\end{aligned}$$

Differentieer linker- en rechterkant:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right).$$

Voor $x = 1$ krijg je dan:

$$y(1) = \sqrt{6}, \quad \text{en} \quad y'(1) = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{12}\sqrt{6}.$$

Voorbeeld: Mathcentre hulpbronnen

Differentiation by Taking Logarithms (19:17)

Opgaven: Logaritmisch differentiëren

Vraag 1

Bereken $y'(1)$ voor $y(x) = \sqrt{x(x+3)(5x-1)}$

$y'(1) = \dots\dots\dots$

Vraag 2

Bereken $y'(2)$ voor $y(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+3)}$

$y'(2) = \dots\dots\dots$

Theorie: Afgeleiden van goniometrische functies

In onderstaande tabel staan de afgeleiden van de goniometrische functies en hun iversen

<i>functie</i>	<i>afgeleide</i>
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Wat onmiddellijk opvalt is dat de afgeleide van een goniometrische functie zelf ook weer een goniometrische functie is. Meer algemeen: de afgeleide van een periodieke functie is zelf ook weer een periodieke functie. Verder valt op dat de afgeleide van een inverse goniometrische functie een functie wordt waarin geen goniometrische functie meer voorkomt.

Voorbeeld: Mathcentre hulpbronnen

Differentiation of $\sin x$ and $\cos x$ (15:08)

Opgaven: Differentiëren van goniometrische functies

Vraag 1

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = -4\sin(2r) - \cos(2r) - 3$.

$$f'(r) = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = \tan(-5r - 2)$.

$$f'(r) = \dots\dots\dots$$

Vraag 3

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = 2 \sin(r)^2 + \cos(2r)$.

$$f'(r) = \dots\dots\dots$$

Vraag 4

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = \arctan\left(\frac{r-1}{r+1}\right)$ voor $r > -1$.

$$f'(r) = \dots\dots\dots$$

Theorie: Hogere afgeleiden

Differentiatie van een functie $f(x)$ levert de afgeleide $f'(x)$, die ook wel genoteerd wordt als $\frac{df}{dx}(x)$ en $\frac{d}{dx}f(x)$. Deze afgeleide is een functie van x die we opnieuw kunnen differentiëren (tenminste bij ‘nette’ functies). Dat levert de **tweede afgeleide** van $f(x)$ op. Gebruikelijke notaties daarvoor zijn $f''(x)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$ en $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ (Let bij de laatste twee notaties op de verschillende plaatsing van het getal 2 boven en onder de streep).

Voorbeeld

Bepaal de tweede afgeleide van $f(x) = x^9$ en van $g(t) = e^{-9t}$

Oplossing

$$\begin{array}{llll} f(x) = x^9 & \implies & f'(x) = 9x^8 & \implies & f''(x) = 9 \cdot 8x^7 = 72x^7 \\ g(t) = e^{-9t} & \implies & g'(t) = -9e^{-9t} & \implies & g''(t) = -9 \cdot -9e^{-9t} = 81e^{-9t} \end{array}$$

We hebben de afgeleide van een afgeleide gevormd en zo kunnen we doorgaan. Bij n keer differentiëren van de functie $f(x)$ krijgen we de **n -de afgeleide**. In het algemeen wordt voor de n -de afgeleide met $n > 2$ meestal een van de volgende notaties gebruikt: $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$ en $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Voorbeeld

Bepaal de eerste, tweede, derde en vierde afgeleide van $f(t) = e^{-t}$.

Oplossing

$$f(t) = e^{-t}$$

$$f'(t) = f^{(1)}(t) = -e^{-t}$$

$$f''(t) = f^{(2)}(t) = e^{-t}$$

$$f'''(t) = f^{(3)}(t) = -e^{-t}$$

$$f^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) = e^{-t}$$

Door patroonherkenning vinden we de n -de afgeleide van $f(t)$:

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n}(t) = (-1)^n e^{-t}$$

Opgaven: Berekenen van hogere afgeleiden

Vraag 1

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = xe^{-x}$.

Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n -de afgeleide kunt geven.

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

$$f''(x) = \dots\dots\dots$$

$$f^{(3)}(x) = \dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \dots\dots\dots$$

Theorie: Stijgen, dalen en extrema

Regel: Stijgen, dalen en stationair zijn van functies

Gedrag van een functie kan onderzocht worden m.b.v. de afgeleide. Het verband tussen de grafiek van een 'nette' functie $f(x)$ op een interval I en de afgeleide functie $f'(x)$ op hetzelfde interval is namelijk:

de grafiek van $f(x)$ is stijgend op $I \iff f'(x) > 0$

de grafiek van $f(x)$ is dalend op $I \iff f'(x) < 0$

de grafiek van $f(x)$ is stationair op $I \iff f'(x) = 0$

Definitie: Extrema

Een **globaal maximum (minimum)** van een functie is een punt waar de functie zijn grootste (kleinste) waarde aanneemt. Een **lokaal maximum (minimum)** van een functie is een punt waar de functie boven (onder) zijn omgeving uitsteekt. De algemene term voor maximum of minimum is **extremum** (meervoud: extrema).

Als je een extremum van een 'nette' functie wilt bepalen, dan kun je eerst op zoek gaan naar een stationair punt. Immers, elk extremum is een stationair punt omdat de afgeleide in dit punt van teken wisselt. Wel moet je elk gevonden stationair punt nader onderzoeken. Er geldt:

Regel: Lokale extrema via tekenverloop

Als $f'(a) = 0$ en het teken van $f'(x)$ verandert in $x = a$ van positief naar negatief, dan heeft $f(x)$ een lokaal maximum in $x = a$.

Als $f'(a) = 0$ en het teken van $f'(x)$ verandert in $x = a$ van negatief naar positief, dan heeft $f(x)$ een lokaal minimum in $x = a$.

Het tweede afgeleide criterium voor lokale extrema is een goed alternatief.

Regel: Het tweede afgeleide criterium

De functie $f(x)$ heeft een lokaal maximum in $x = a$ als $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$.

De functie $f(x)$ heeft een lokaal minimum als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$.

Als $f'(a) = 0$ en $f''(a) = 0$ dan kun je nog niet concluderen wat voor een stationair punt $x = a$ is: het kan een extremum zijn, maar het kan ook nog een **buigpunt** zijn, d.w.z. een punt waarin de afgeleide functie een maximum of minimum aanneemt.

Voor het berekenen van buigpunten van een functie kun je de tweede en derde afgeleide gebruiken:

Definitie: Buigpunt

De functie $f(x)$ heeft een buigpunt in $x = a$ als $f''(a) = 0$ en $f'''(a) \neq 0$.

Voorbeeld: Mathcentre hulpbronnen

Maxima and Minima (38:19)

Theorie: Toepassing 1: veranderingsgedrag van een functie

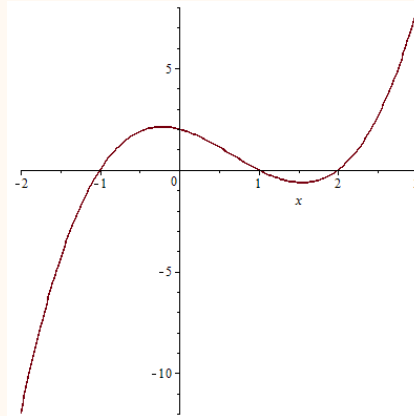
Dit voorbeeld is een onderzoek naar het veranderingsgedrag van een kale wiskundige functie.

Voorbeeld

We bepalen alle stationaire punten en buigpunten van de veeltermfunctie

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

De grafiek van $f(x)$ op het interval $(-2, 3)$ is als volgt:



We berekenen de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f'''(x) = 6$$

Om alle stationaire punten van $f(x)$ te vinden beginnen we met het oplossen van de vergelijking $f'(x) = 0$. Omdat de eerste afgeleide een kwadratische functie is kunnen we de abc -formule gebruiken:

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \iff x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times -1}}{2 \times 3} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}.$$

Bij benadering zijn de stationaire punten dus $x_1 \approx -0.22$ en $x_2 \approx 1.55$. Uit de grafiek lezen we af dat het eerste punt een lokaal maximum is en het tweede een lokaal minimum. Met het criterium van de tweede afgeleide kunnen we de aard van de berekende stationaire punten vaststellen.

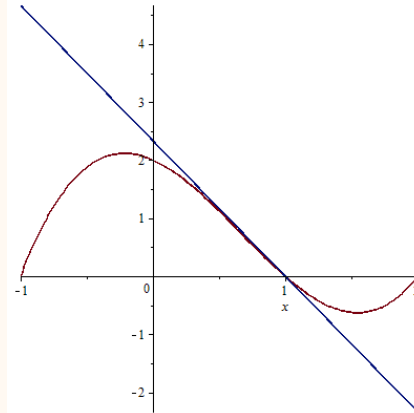
$$f''\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}\right) = -2\sqrt{7} < 0 \implies x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \text{ is een lokaal maximum}$$

$$f''\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}\right) = 2\sqrt{7} > 0 \implies x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \text{ is een lokaal minimum}$$

Het betreft inderdaad lokale extrema omdat de functie $f(x)$ voor grote x sterk lijkt op de kubische functie x^3 en deze functie geen globaal maximum of minimum heeft.

Om alle buigpunten van $f(x)$ te vinden moeten we de vergelijking $f''(x) = 0$ oplossen. In dit geval gaat het om de lineaire vergelijking $6x - 4 = 0$ en de oplossing hiervan is gelijk aan $x = \frac{2}{3}$. Omdat $f'''(x) = 6 \neq 0$ is het berekende punt inderdaad een buigpunt van de functie $f(x)$. De afgeleide is in dit punt niet gelijk aan nul, maar $f'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{7}{3}$. De raaklijn

in het buigpunt is dus een neergaande rechte lijn (met vergelijking $y = -\frac{7}{3}x + \frac{63}{27}$) die de grafiek van $f(x)$ snijdt, zoals in onderstaand diagram te zien is.



Theorie: Toepassing 2: kwantitatieve farmacokinetiek

Dit voorbeeld komt uit de kwantitatieve farmacokinetiek.

Voorbeeld

Stel dat na het innemen van de bètablokker propranolol, die onder meer gebruikt wordt voor het verlagen van de bloeddruk, de concentratie van het farmacon in het bloedplasma ($\mu\text{g/L}$) op tijdstip t (uur) na inname gegeven is door de functie

$$C(t) = 105 \cdot (t - 0.4) \cdot e^{-0.75(t-0.4)}.$$

De vraag is wanneer de concentratie het grootst is en welke maximale waarde aangenomen wordt.

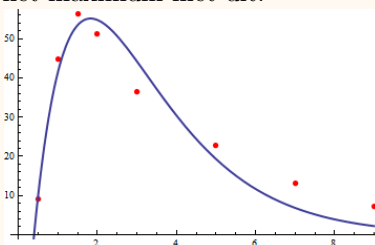
We bereken de afgeleide met behulp van de rekenregels.

$$\begin{aligned} C'(t) &= 105 \cdot e^{-0.75(t-0.4)} + 105 \cdot (t - 0.4) \cdot (-0.75) \cdot e^{-0.75(t-0.4)} \\ &= 105 \cdot e^{-0.75(t-0.4)} \cdot (1 - 0.75(t - 0.4)) \\ &= 105 \cdot e^{-0.75(t-0.4)} \cdot (1.3 - 0.75t) \end{aligned}$$

Om een extremum te vinden lossen we de vergelijking $C'(t) = 0$ op: omdat de exponentiële functie positief is, moet gelden dat $1.3 - 0.75t = 0$ oftewel $t \approx 1.7$. Na pakweg 1 uur en drie kwartier is de plasmaconcentratie maximaal.

Dit is overigens geen fictief voorbeeld want onderstaande grafiek toont de grafiek van deze functie samen met metingen van de plasmaconcentratie op de achtergrond die afkomstig zijn uit een studie over plasmaconcentraties na orale toediening van propranolol, simultaan met een intraveneuze toediening [Bron: Olanoff, L., et. al. (1986). *Clinical Pharmacology and Therapeutics*, 40, 408-414]. Het getal 0.4 dat in deze formule steeds in combinatie met de tijd t voor komt is de geschatte vertragingstijd voor het farmacon bij orale toediening, d.w.z. de tijd nodig voordat het farmacon om van de maag in de dunne darm terecht

te komen om vervolgens geabsorbeerd te worden via de poortader. Als we de tijdschaal opschuiven naar dit tijdstip en hier de oorsprong $t = 0$ vastleggen, dan zou de formule voor de plasmaconcentratie vereenvoudigen tot $c(t) = 105 \cdot t \cdot e^{-0.75t}$, maar veel maakt dit voor de berekening van het maximum niet uit.



Opgaven: Toepassen van afgeleiden

Vraag 1

De functie $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 3$ heeft een lokaal maximum, een lokaal minimum en een buigpunt.

Bepaal deze twee extrema en bepaal het karakter m.b.v. het tweede afgeleide criterium.

Bereken ook het buigpunt van $f(x)$.

lokaal maximum van $f(x)$ is gelijk aan $x = \dots\dots\dots$

lokaal minimum van $f(x)$ is gelijk aan $x = \dots\dots\dots$

buigpunt van $f(x)$ is gelijk aan $x = \dots\dots\dots$

Vraag 2

Als model voor het gemiddelde temperatuursverloop van grieppatiënten is gekozen voor de functie van de vorm

$$T(t) = 37 + \frac{a \cdot t}{b + t^2}$$

Hierbij is $T(t)$ de temperatuur (in graden Celsius) op tijdstip t (in uren) na het oplopen van de griep.

Bepaal zowel de maximumtemperatuur $T_{\max}$ als het tijdstip $t_{\max}$ waarop de maximumtemperatuur bereikt wordt.

a. $t_{\max} = \frac{b}{a}$ en $T_{\max} = 37 + \frac{a^2}{(a^2 + 1)\sqrt{b}}$

b. $t_{\max} = \frac{\sqrt{b}}{a}$ en $T_{\max} = 37 + \frac{a^2}{(a^2 + 1)\sqrt{b}}$

c. $t_{\max} = \sqrt{b}$ en $T_{\max} = 37 + \frac{a}{2\sqrt{b}}$

d. $t_{\max} = b$ en $T_{\max} = 37 + \frac{a}{2\sqrt{b}}$

Vraag 3

De relatieve groei van een populatie met omvang $N(t)$ is het quotiënt van groei en populatieomvang:

$$\text{relatieve groei} = \frac{N'(t)}{N(t)}$$

Wat is de relatieve groei van een populatie waarin de omvang beschreven wordt met de functie

$$N(t) = \exp(b - e^{k-a \cdot t})$$

voor zekere parameters a , b en k ?

Ter herinnering: $\exp(x) = e^x$

a. $\frac{N'(t)}{N(t)} = a \cdot b \cdot \ln(N(t))$

b. $\frac{N'(t)}{N(t)} = a \cdot b \cdot N(t)$

c. $\frac{N'(t)}{N(t)} = a(b - N(t))$

d. $\frac{N'(t)}{N(t)} = a(b - \ln(N(t)))$

Vraag 4

Stel dat voor een medicijn de bloedplasmaconcentratie $C(t)$ (in mg/L) van het werkend bestanddeel op tijdstip t (in uren) na orale toediening gegeven is door de functie

$$C(t) = e^{-3t} - e^{-6t}$$

De functie $C(t)$ begint in 0, stijgt naar een maximum en daalt daarna weer naar 0. Op welk tijdstip (in uren) wordt het maximum bereikt?

a. $\ln(2)$

b. $\frac{1}{3} \ln(6)$

c. $\ln(\frac{2}{3})$

d. $\frac{1}{3} \ln(2)$

Theorie: De helling van een geparametriseerde kromme

Een geparametriseerde kromme $x = f(t), y = g(t)$ in het vlak is **differentieerbaar** in t als de coördinaatfuncties f en g differentieerbaar in t zijn. Op een punt van een differentieerbare geparametriseerde kromme waar y ook een differentieerbare functie van x is geeft de kettingregel een verband tussen de afgeleiden y', f', g' :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

oftewel

$$g'(t) = \frac{dy}{dx} \cdot f'(t).$$

Anders opgeschreven:

Regel: Helling van een geparametriseerde kromme

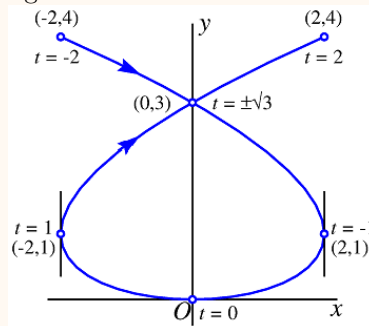
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{mits alle afgeleiden bestaan en } f'(t) \neq 0.$$

Voorbeeld

We bekijken de geparametriseerde kromme

$$x = f(t) = t^3 - 3t, \quad y = g(t) = t^2, \quad (-2 \leq t \leq 2).$$

Een geannoteerde kromme staat in onderstaande figuur; bijzondere punten zijn gemarkeerd, de pijlen geven de omlooprichting van een punt aan bij stijgende waarde van t , en ook zijn twee verticale raaklijnen getekend.



We hebben

$$f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1), \quad g'(t) = 2t$$

en dus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{2t}{3(t-1)(t+1)}, \quad (t \neq \pm 1).$$

We hebben verticale raaklijnen voor parameterwaarden $t = \pm 1$ en een horizontale raaklijn bij $t = 0$ (in de oorsprong).

Ook voor hogere afgeleiden zijn rekenregels af te leiden:

Regel

Een ‘nette’ geparametriseerde kromme $x = f(t), y = g(t)$ in het vlak heeft in elk punt waar $f'(t) \neq 0$ als tweede afgeleide

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

waarbij $y' = \frac{dy}{dx}$ in termen van de variabele t .

Omdat $y' = \frac{g'(t)}{f'(t)}$, kan dit met de quotiëntregel voor differentiëren verder uitgewerkt worden tot

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}.$$

Voorbeeld

Kijken we opnieuw naar het eerdere voorbeeld van de geparametriseerde kromme

$$x = f(t) = t^3 - 3t, \quad y = g(t) = t^2, \quad (-2 \leq t \leq 2)$$

dan volgt uit $f''(t) = 6t$ en $g''(t) = 2$ dat

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3} \\ &= \frac{3(t^2 - 1) \cdot 2 - 2t \cdot 6t}{(3(t^2 - 1))^3} \\ &= -\frac{2}{9} \frac{t^2 + 1}{(t^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Voorbeeld: Mathcentre hulpbronnen

Parametric Differentiation (21:52)

Opgaven: Hellingen van geparametiseerde krommen

Vraag 1

Bereken $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{d^2y}{dx^2}$ als functies van t bij de geparametriseerde kromme $x = -2t^2 - 2t$, $y = 2t^3 + t$.

$$\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \dots\dots\dots$$

Theorie: Taylorveeltermen

Voorbeeld: Benadering een wiskundige functie met een lineaire functie

We hebben al gezien dat we een ‘nette’ functie f in de buurt van een punt $x = a$ kunnen benaderen met de raaklijn gegeven door de vergelijking

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Dit is precies die rechte lijn, die in de buurt van $(a, f(a))$ het dichtst bij de grafiek van f ligt.

De rechte lijn is de grafiek van de volgende veeltermfunctie

$$P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Merk op dat P de enige eerstegraadsveelterm is met de eigenschap dat

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a).$$

Als er één schaap over de dam is volgen er meer: we kunnen het bovenstaande ook voor tweedegraadsveeltermen doen.

Voorbeeld: Benadering van een wiskundige functie met een kwadratische functie

We veronderstellen dat ook de tweede afgeleide van f bestaat (dit is onderdeel van de ‘netheid’ van de functie).

Neem nu de veeltermfunctie

$$P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2}f''(a) \cdot (x - a)^2.$$

Dan geldt

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad P''(a) = f''(a).$$

De grafiek van P is precies die parabool, die in de buurt van $(a, f(a))$ het dichtst bij de grafiek van f ligt. Deze parabool ligt in de buurt van $(a, f(a))$ dichter bij de grafiek van f dan de raaklijn in dit punt.

Voorbeeld

Benadering van een wiskundige functie met een veelterm van graad 3. Je kunt hierna weer doorgaan met derdegraadsveeltermen en de veeltermfunctie

$$P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2}f''(a) \cdot (x - a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a) \cdot (x - a)^3$$

nemen. De grafiek van deze derdegraadsveelterm ligt dan weer dichter dan bij de grafiek van f dan beide voorafgaande benaderingen.

De volgende stelling van Taylor maakt bovenstaande uitspraken precies; bovendien werkt hij voor veeltermen van willekeurige graad. We zeggen dat een functie k keer differentieerbaar is als $f', f'', f''', \dots, f^{(k)}$ bestaan.

Stelling: Stelling van Taylor

Veronderstel dat k een natuurlijk getal is en de functie f tenminste $k + 1$ keer differentieerbaar is. Dan is

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

met

$$P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2}f''(a) \cdot (x - a)^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a) \cdot (x - a)^k$$

een veeltermfunctie van graad k en

$$R(x) = \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi) \cdot (x - a)^{k+1}$$

voor een of andere ξ die tussen a en x in ligt en van x afhangt.

De veelterm P heet de **Taylorveelterm rondom a van graad k** ; R heet de **restterm van orde k** .

Eigenlijk zouden we P_k en R_k moeten schrijven om de afhankelijkheid van k aan te geven, maar die is meestal uit de context duidelijk. Voor numerieke benaderingsmethoden zijn de volgende twee opmerkingen van belang:

$$\frac{R_k(x)}{(x - a)^k} \rightarrow 0 \text{ als } x \rightarrow a$$

en

$$|R_k(x)| \leq M \cdot |x - a|^{k+1} \text{ als } a - r \leq x \leq a + r \text{ voor zekere } M \text{ en } r.$$

Om schrijfwerk te besparen, maar toch een indicatie van de orde van grootte van een afbreekfout aan te geven, maakt men vaak gebruik van het (grote O) **O -symbool van Landau** en schrijft men ook

$$R_k(x) = O((x - a)^{k+1}).$$

Voorbeeld

Onderstaande tabel geeft de kwadratische benaderingen van enkele functies rond de oorsprong.

$$\begin{array}{rclcl} e^x & = & 1 & + & x & + & \frac{1}{2}x^2 & + & O(x^3) \\ \sin x & = & & & x & & & + & O(x^3) \\ \cos x & = & 1 & & & - & \frac{1}{2}x^2 & + & O(x^3) \\ \frac{1}{1-x} & = & 1 & + & x & + & x^2 & + & O(x^3) \\ \sqrt{1+x} & = & 1 & + & \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{8}x^2 & + & O(x^3) \\ \ln(1+x) & = & & & x & - & \frac{1}{2}x^2 & + & O(x^3) \end{array}$$

Theorie: Taylorreeksen

Voorbeeld

De exponentiële functie e^x heeft zichzelf als afgeleide. We nemen $a = 0, x > 0$ en vinden met de stelling van Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + R_k(x)$$

met $R_k(x) = \frac{1}{(k+1)!}e^\xi x^{k+1}$ voor een of andere $0 < \xi < x$.

We nemen nu $x = 1, k = 6$ en bedenken dat het grondtal van de natuurlijke logaritme kleiner dan 3 is (d.w.z. $e < 3$). Dan geldt dus

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + R_6(1)$$

met $0 < R_6(1) < \frac{3}{5040} = \frac{1}{1680} < 0.0006$. We hebben dus e benaderd met $\frac{1957}{720} \approx 2.7180 \dots$ in 4 significante cijfers.

In dit laatste voorbeeld zou je zoveel termen kunnen opnemen als je wilt en de volgende reeksontwikkeling kunnen opschrijven:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Dit heet de **Taylorreeks** van e^x rondom $x = 0$.

Merk op dat in het bijzonder geldt:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Voorbeeld

De Taylorreeksen van de sinus- en cosinusfunctie rondom de oorsprong zijn:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

De Taylorreeksen voor de exponentiele functie, sinusfunctie en cosinusfunctie zijn niet alleen voor alle waarden rondom $x = 0$ geldig, maar zelfs voor alle waarden van x . Dit is niet altijd zo:

Voorbeeld

Voor de Taylorreeks van $\ln(1+x)$ geldt dat

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

maar dat dit alleen waar is voor $-1 < x \leq 1$.

Je kunt er dus ook $\ln(2)$ mee benaderen door de eerste termen van $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ op te tellen. Maar een goede benadering krijg je pas bij gebruik van heel veel termen: zelfs na 1000 termen heb je nog maar 2 decimalen correct.

Het kan ook slimmer door $x = -\frac{1}{2}$ te nemen omdat je je realiseert dat

$$\ln\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

Dan krijg je al na 10 termen uit de Taylorreeks een benadering van $\ln(2)$ die correct is in 4 decimalen.

Opgaven: Berekenen van Taylorveeltermen

Vraag 1

Bepaal de eerste 4 termen van de Taylorreeks van

$$\frac{x}{1-x}$$

rondom $x = 0$ samen met de ordeterm van deze veeltermbenadering.

Je mag hierbij onderstaande tabel van Taylorreeksen van enkel standaardfuncties om de oorsprong gebruiken:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \end{aligned}$$

Eerste 4 termen van Taylorreeks =

ordeterm = $O(\dots)$

Vraag 2

Bepaal de eerste 4 termen van de Taylorreeks van

$$e^{1+x}$$

rondom $x = 0$ samen met de ordeterm van deze veeltermbenadering.

Je mag hierbij onderstaande tabel van Taylorreeksen van enkel standaardfuncties om de oorsprong gebruiken:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \end{aligned}$$

Eerste 4 termen van Taylorreeks =

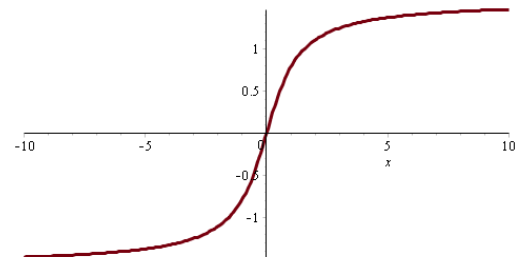
ordeterm = $O(\dots)$

Theorie: Benadering van π via een Taylorreeks (Python opdracht)

De tangens functie heeft op het interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ een inverse functie die arctangens genoemd wordt en genoteerd wordt als $\arctan$; dus

$$\tan(\arctan(x)) = x.$$

De grafiek van $\arctan$ ziet er als volgt uit:



Uit de definitie volgt dat $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ en dus

$$\pi = 4 \arctan(1).$$

Als we een goede benadering van $\arctan(1)$ kunnen berekenen, dan kunnen we zo een goede benadering van het getal π vinden. We doen dit door eerst een Taylorreeksbenadering van de arctangensfunctie te bepalen. Voor de afgeleide van de tangensfunctie geldt:

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Uit de kettingregel volgt met $u = \arctan(x)$ dat

$$\frac{d \tan(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 1$$

en dus

$$(1 + \tan^2 u) \cdot \frac{d \arctan x}{dx} = 1$$

oftwel

$$(1 + x^2) \cdot \frac{d \arctan x}{dx} = 1$$

Met andere woorden:

$$\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

De Taylorreeks van het rechterlid rondom $x = 0$ is eenvoudig uit te rekenen:

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{2k}.$$

Maar dan kunnen we ook wel een reeks vinden waarvan de afgeleide gelijk is aan bovenstaande Taylorreeks; dit is dan per constructie de Taylorreeks van $\arctan x$ rondom $x = 0$. Er geldt:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1}.$$

Python opdracht Gebruik de Taylorreeks van $\arctan x$ rondom $x = 0$ om $\pi \approx 3.14159265\dots$ te benaderen. Maak een Python programma dat een tabel oplevert waarin staat hoeveel termen uit de Taylorreeks nodig zijn om π correct in 1 t/m 5 decimalen te benaderen. Met andere woorden, gebruik de formule van Leibniz (1671)

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

om π te benaderen. Is het convergentiegedrag van deze methode in overeenstemming met de afchatting van de afbreekfout volgens de stelling van Taylor? Pas je programma aan door de volgende eindige som te gebruiken

$$\frac{1}{2n} + 4 \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

als benadering van π . Maak een tabel met benaderingen voor $n = 1, \dots, 100$ samen met afbreekfouten. Wat valt je op?

Theorie: Taylorbenadering van de sinus (Python opdracht)

(a) Teken in één figuur de grafiek van de sinusfunctie en de Taylorreeksveelterm rondom 0 tot orde 7 (dus de eerste 3 termen in de Taylorreeks) op het interval $[-\pi, \pi]$.

(b) Ga visueel na hoever je de Taylorbenadering van de sinusfunctie rondom 0 moet nemen opdat de grafiek van de sinusfunctie en de Taylorveelterm op het interval $[-\pi, \pi]$ nagenoeg samenvallen.