

Functies van meer variabelen

Theorie: Basisbegrippen

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot functies van één veranderlijke, die simpelweg functioneren als machientjes die uit één getal een nieuw getal produceren volgens een gegeven formule. Maar je kunt natuurlijk ook machientjes en formules bedenken die uit twee getallen een nieuw getal produceren. We spreken dan van een functies van twee veranderlijken, ook wel **functies van twee variabelen** genoemd.

Voorbeeld: Eenvoudige voorbeelden

- Oppervlakte O van een driehoek met basis b en hoogte h : $O(b, h) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$
- Afstand s afgelegd bij eenparige beweging met snelheid v en tijdsduur t : $s(v, t) = v \cdot t$

De terminologie van functies die we al kennen wordt ook bij functies van meer variabelen gebruikt. Het tweede voorbeeld is in functieform opgeschreven, maar vaker kom je het tegen in de vorm van relaties tussen grootheden: $s = v \cdot t$. De snelheid v en tijdsduur t zijn dan de **onafhankelijke variabelen** en de afgelegde afstand s is de **afhankelijke variabele**, omdat de waarde hiervan afhangt van de waarden van de afhankelijke variabelen. Het **functievoorschrift** is de uitdrukking $v \cdot t$. De afhankelijke variabelen zijn *expliciet* opgeschreven, geïsoleerd van de onafhankelijk variabelen. Veel relaties worden evenwel niet zo expliciet als functie gegeven. Een voorbeeld:

Voorbeeld

De lenzenformule voor een lens met een brandpuntsafstand f is

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f},$$

waarin v de voorwerpsafstand is en b de beeldafstand.

Dit heet een **impliciet verband** tussen grootheden. Soms is zo'n verband een functie, maar lang niet altijd: denk bijvoorbeeld aan de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ voor de bol met centrum $((0,0,0))$ en straal 1, waarin z niet als functie van x en y kan geschreven worden).

Definitie

Een relatie tussen drie variabelen x, y, z , waarbij x en y als onafhankelijke variabelen optreden, is een **functie** $z = z(x, y)$ als bij elke toelaatbare waarden voor x en y precies één waarde voor z behoort. Elke toelaatbare waarden voor x en y noemt men een **origineel**; elke bijpassende waarde voor z heet dan de **functiewaarde** van dat origineel. Een functie verbindt dus op eenduidige wijze elk origineel met een functiewaarde. Alle originelen bij elkaar vormen het **domein** van de functie en alle functiewaarden die kunnen voorkomen vormen samen het **bereik** van de functie.

Opgaven: Functiewaarden uitrekenen

Vraag 1

Bereken de waarde van $f(4, 1)$ voor de functie

$$f(x, y) = 2x^4 + 2y$$

$$f(4, 1) = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Bereken de waarde van $f(-2, 4)$ voor de functie

$$f(x, y) = (-3x + 3y)^2 + 9xy + 3x$$

$$f(-2, 4) = \dots\dots\dots$$

Opgaven: Bereik en domein vaststellen

Vraag 1

Wat is het bereik van de functie $z(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$?

Schrijf je antwoord op in de vorm van een ongelijkheid of ongelijkheden in de variabele z

.....

Vraag 2

Wat is het bereik van de functie $z(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$?

Schrijf je antwoord op in de vorm van een ongelijkheid of ongelijkheden in de variabele z

.....

Vraag 3

Het domein van de functie $z(x, y) = \sqrt{5y - x^2} + 2$ kan beschreven worden door de ongelijkheid $y \geq f(x)$. Welke functie $f(x)$ moet je dan nemen?

$f(x) = \dots\dots\dots$

Theorie: Isoleren van een variabele

Een impliciet verband tussen drie of meer variabelen herschrijven in een vorm waarbij één van de variabelen, zeg v , in zijn eentje aan de linkerkant van een vergelijking staat, d.w.z. een vergelijking van de vorm $v = \text{formule zonder } v$ creëren, heet het vrijmaken of **isoleren van de variabele** v . Je krijgt dan een functievoorschrift van een functie van meer variabelen. Onderstaand voorbeeld laat zien hoe dit in zijn werk kan gaan.

Voorbeeld

In de relatie $y = \frac{13x + 8z}{-9x + 11z}$ zie je meteen dat y een functie van x en z is.

Is z nu ook een functie van x en y en, zo ja, wat is het functievoorschrift dan?

Met andere woorden, kun je z uitdrukken in x en y in de vorm $z = \text{formule in } x \text{ en } y$.

Je kunt de oplossing ook bereiken door tussenstappen in de vorm van vergelijkingen in te toetsen:

je ziet dan steeds of je nog op de goede weg bent,

maar uiteindelijk moet je de vergelijking in de vorm $z = \dots$ zien te krijgen.

Uitwerking: Je probeert de variabele z te isoleren in het gegeven verband $y = \frac{13x + 8z}{-9x + 11z}$.

Vermenigvuldig links en rechts met $-9x + 11z$ en vereenvoudig:

$$(-9x + 11z)y = \frac{(13x + 8z)(-9x + 11z)}{(-9x + 11z)}$$

$$-9xy + 11yz = 13x + 8z$$

Je hebt dan een vergelijking zonder noemers gekregen en je hoeft voorlopig alleen veeltermvergelijkingen te manipuleren.

Zet alle termen met z aan de linkerkant, breng alle termen zonder z naar de rechterkant en ontbind in factoren:

$$11yz - 8z = 9xy + 13x$$

$$z(11y - 8) = x(9y + 13)$$

Delen door $11y - 8$ geeft de gevraagde formulevorm:

$$z = \frac{x(9y + 13)}{11y - 8}$$

Dit kan gelezen worden als een functievoorschrift van z in x en y .

Opgaven: Omzetten verband in functievoorschrift

Vraag 1

In de relatie $y = \frac{7x + 9z}{-2x + 5z}$ zie je meteen dat y een functie van x en z is.

Is z nu ook een functie van x en y en, zo ja, wat is het functievoorschrift dan?

Met andere woorden, kun je z uitdrukken in x en y in de vorm $z = \text{formule in } x \text{ en } y$.

Je kunt de oplossing ook bereiken door tussenstappen in de vorm van vergelijkingen in te toetsen: je ziet dan steeds of je nog op de goede weg bent,

maar uiteindelijk moet je de vergelijking in de vorm $z = \dots$ zien te krijgen.

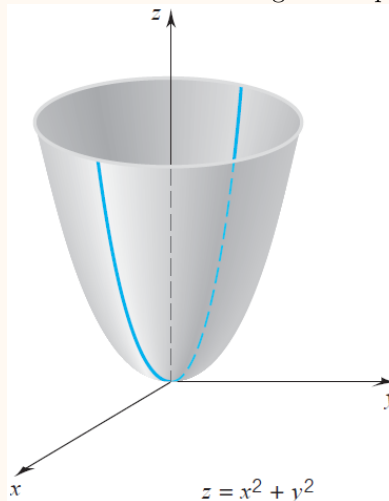
.....

Theorie: Grafieken en coördinaatlijnen

De grafiek van een functie f van één variabele is per definitie de verzameling punten (x, y) met $y = f(x)$. Op dezelfde manier kun je de **grafiek** van een functie f van twee variabelen definiëren als de verzameling punten (x, y, z) met $z = f(x, y)$. De tekening van de grafiek is een **oppervlak** in de 3-dimensionale ruimte.

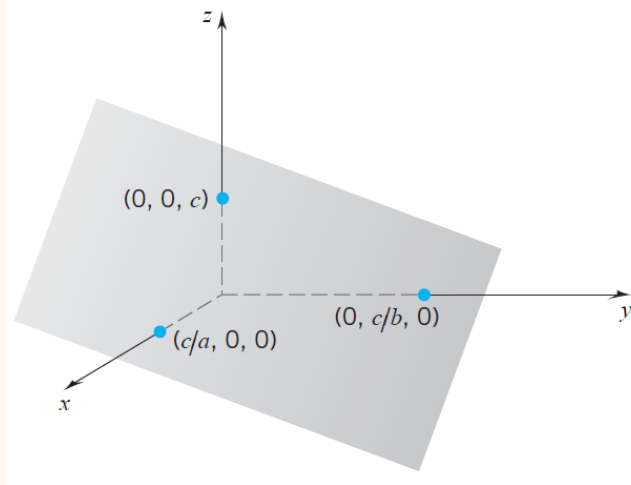
Voorbeeld: Voorbeeld 1

De functie $f(x, y) = x^2 + y^2$ heeft een domein waarin alle waarden van x en y toegestaan zijn. De grafiek is in onderstaande figuur (voor een stukje) getekend en is een paraboloid die ook geconstrueerd kan worden door omwenteling van de parabool $z = x^2$ om de z -as.



Voorbeeld: Voorbeeld 2

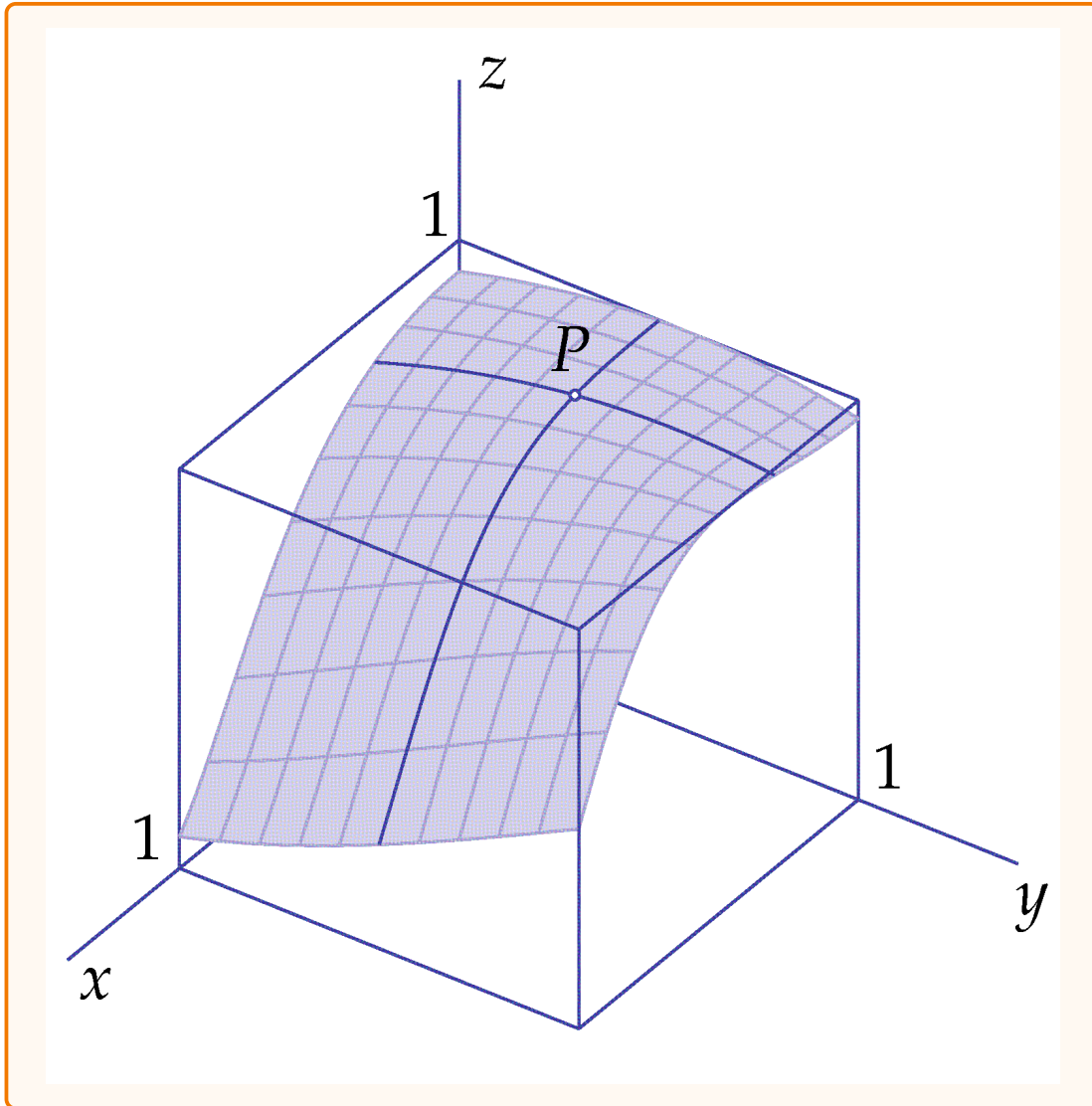
De grafiek van de functie $f(x, y) = c - ax - by$ is een vlak door de punten $(c/a, 0, 0)$, $(0, c/b, 0)$ en $(0, 0, c)$.



Bij een tekening van een grafiek van een functie van twee variabelen worden vaak i.p.v. coördinaatassen andere middelen ingezet om de ruimtelijke suggestie te vergroten. Bijvoorbeeld wordt om de figuur een kubus of balk heen getekend waarvan het xy -vlak gelijk is aan het rechthoekige deel van het domein waarvoor punten van het oppervlak getekend worden. Ook wordt in wiskundige software kleuring van het oppervlak gebruikt om diepte te suggereren. Vaak is tevens het **coördinatennet** aangegeven, gevormd door lijnen op het oppervlak, waar x , dan wel y constant is; dit worden **coördinaatlijnen** genoemd. In onderstaand voorbeeld zijn deze visualisatie trucs toegepast.

Voorbeeld: Voorbeeld 3

De grafiek van de functie $f(x, y) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1))$ is een gekromd oppervlak. In onderstaande tekening zijn de coördinaatlijnen door het punt $P = (0.3, 0.5, f(0.3, 0.5))$ donkerder getekend. De ene lijn hoort dus bij alle punten op het oppervlak waarvoor geldt dat $x = 0.3$, de andere lijn hoort bij alle punten waarvoor geldt dat $y = 0.5$. Het gehele coördinatennet is getekend voor $x = 0.0, 0.1, \dots, 0.9, 1.0$ en voor $y = 0.0, 0.1, \dots, 0.9, 1.0$. Het coördinatennet en de kubus maken dus geen deel uit van de grafiek van f .



Theorie: 3D Grafieken in Python

Het `matplotlib` pakket levert ook functionaliteit om grafieken van functies van twee variabelen te creëren. Hierbij zullen we vooral de object-georiënteerde stijl voor visualiseren gebruiken. Deze stijl van werken mag misschien wat omslachtiger zijn, maar het biedt wel meer mogelijkheden om te specificeren wat we precies willen. Om beter te snappen hoe dit in zijn werk gaat leggen we het eerst uit aan de hand van een eerder voorbeeld

OO visualisatie versus pyplot aanpak

We tekenen de grafiek van de functie $f(x) = e^{-x^2}$.

In de `pyplot` aanpak kan het tekenen van de grafiek van f als volgt gaan (met labels in $\text{\LaTeX}$ notatie gespecificeerd).

```
>>> import numpy as np
```

```

>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> def f(x): return np.exp(-x**2)
>>> x = np.linspace(-3,3,100)
>>> y=f(x)
>>> # hierna komt het plot-gedeelte
>>> plt.plot(x,y)
>>> plt.legend(['$\exp(-x^2)$'])
>>> plt.xlabel('$x$')
>>> plt.ylabel('$y$')
>>> plt.axis([-3.05, 3.05, -0.05, 1.05])
>>> plt.show()

```

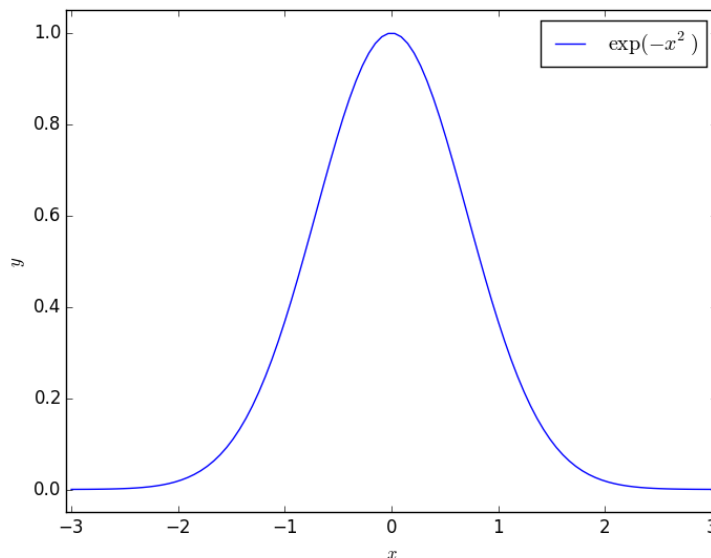
In object-georiënteerde stijl gaat het plot-gedeelte na de functiedefinitie als volgt: eerst introduceer je een **Figure** instantie, **fig** genaamd, en daarmee creëer je een **Axis** instantie, **ax** genaamd, via de **add_axes** methode van de **Figure** klasse.

```

>>> fig = plt.figure()
>>> ax = fig.add_axes([0.1, 0.1, 0.9, 0.9]) # links, onder, breedte, hoogte (tussen 0 en 1)
>>> ax.plot(x,y)
>>> ax.set_xlabel('$x$')
>>> ax.set_ylabel('$y$')
>>> ax.legend(['$\exp(-x^2)$'])
>>> ax.set_xlim([-3.05, 3.05])
>>> ax.set_ylim([-0.05, 1.05])
>>> plt.show()

```

In beide gevallen is het resultaat het volgende plaatje.



In dit geval is de object-georiënteerde stijl niet eens veel meer werk, maar het is wel flexibeler zoals onderstaand voorbeeld met een inzet illustreert.

```

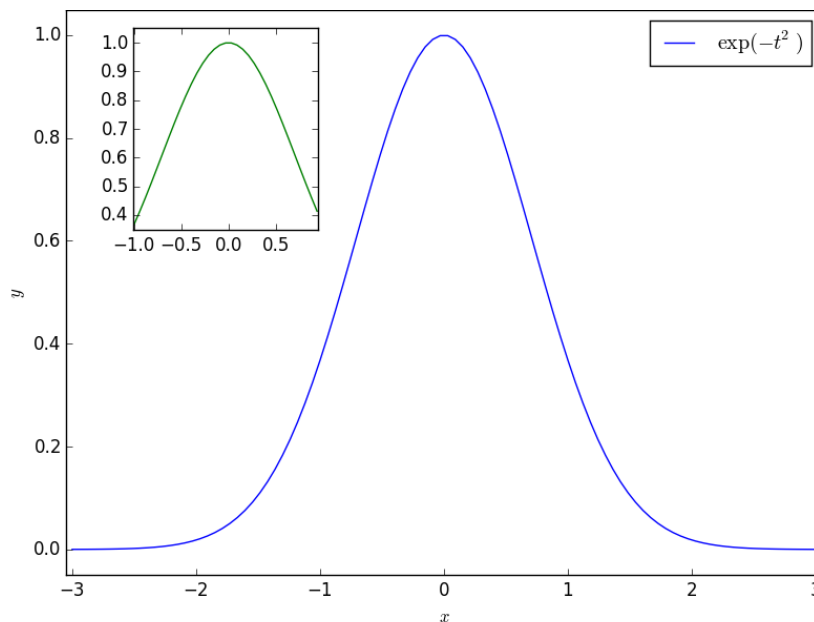
>>> import numpy as np
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> def f(x): return np.exp(-x**2)

```

```

>>> x = np.linspace(-3,3,100)
>>> y=f(x)
>>> fig = plt.figure()
>>> ax = fig.add_axes([0.1, 0.1, 0.9, 0.9])
>>> ax.plot(x,y, 'b-') # hoofddiagram
>>> ax.set_xlabel('$x$')
>>> ax.set_ylabel('$y$')
>>> ax.legend(['$\exp(-t^2)$'])
>>> ax.set_xlim([-3.05, 3.05])
>>> ax.set_ylim([-0.05, 1.05])
>>> ax2 = fig.add_axes([0.18, 0.65, 0.22, 0.32]) # inzet
>>> ax2.plot(x[33:66],y[33:66], 'g-') # deeldiagram
>>> ax2.set_xlim([x[33]-0.01, x[65]+0.01])
>>> ax2.set_ylim([0.35, 1.05])
>>> plt.show()

```



Met het `subplots` commando of het `add_subplot` commando kun je het tekengebied in verschillende stukken verdelen.

Grafiek van een functie van twee variabelen

We tekenen nu de grafiek van de functie $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$. Hiervoor moeten we eerst een instantie van de `Axes3D` klasse maken en toevoegen aan het matplotlib canvas. Dit laatste kan op dezelfde manier gedaan worden als hierboven beschreven is óf door de optie `projection='3d'` toe te voegen aan `add_axes` of `add_subplot` methoden. We creëren het fijnst mogelijke coördinatennet via de `np.meshgrid` functie en tekenen het oppervlak via de `plot_surface` methode. Hierin bepalen de waarden van `rstride` en `cstride` hoe groot de stappen zijn die je maakt in de rij- en kolom-arrays van het fijnst mogelijke coördinatennet: in dit geval zijn de stappen in beide richtingen in grootte gelijk aan 5, hetgeen betekent in een 100×100 rooster dat we een coördinatennet krijgen met afmeting 20×20 .

```

>>> import numpy as np
>>> import matplotlib.pyplot as plt

```

```

>>> from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
>>> def f(x,y): return np.exp(-x**2-y**2)
>>> x=np.linspace(-3,3,100)
>>> y=np.linspace(-3,3,100)
>>> x,y = np.meshgrid(x,y)
>>> z=f(x,y)
>>> fig = plt.figure()
>>> ax = fig.add_subplot(1,1,1, projection='3d')
>>> ax.set_xlabel('$x$')
>>> ax.set_ylabel('$y$')
>>> ax.set_zlabel('$z$')
>>> ax.plot_surface(x, y, z, rstride=5, cstride=5, color='y')
>>> plt.show()

```

Hieronder staan twee andere visualisaties: een draadraampresentatie en een veel fraaiere en meer informatieve kleuring op basis van z -waarde.

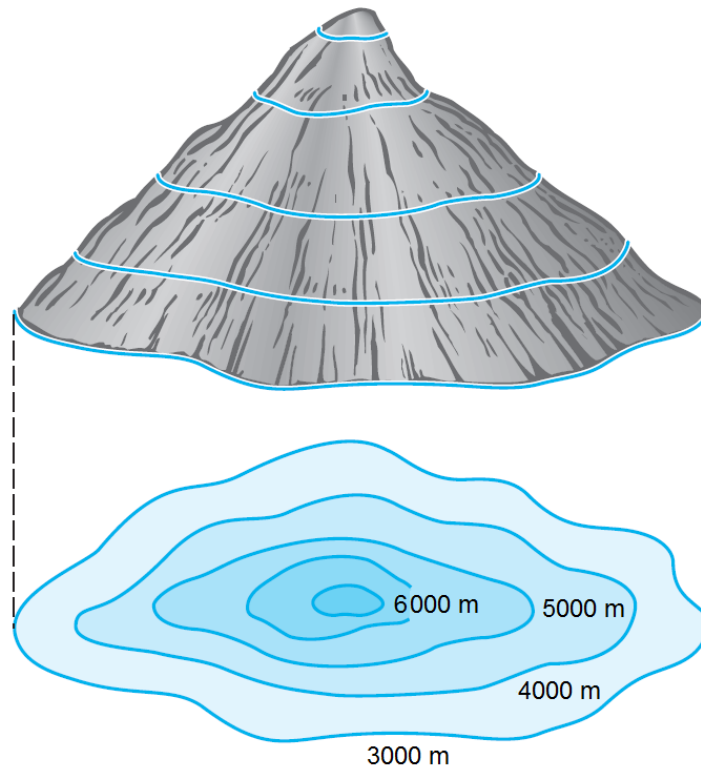
```

>>> import numpy as np
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
>>> from matplotlib import cm
>>> def f(x,y): return np.exp(-x**2-y**2)
>>> x=np.linspace(-3,3,100)
>>> y=np.linspace(-3,3,100)
>>> x,y = np.meshgrid(x,y)
>>> z=f(x,y)
>>> fig = plt.figure(figsize=(14,6))
>>> ax = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
>>> ax.plot_wireframe(x, y, z, rstride=5, cstride=5)
>>> ax = fig.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
>>> p = ax.plot_surface(x, y, z, rstride=1, cstride=1, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0, antialiased=
>>> cb = fig.colorbar(p, shrink=0.5)
>>> plt.show()

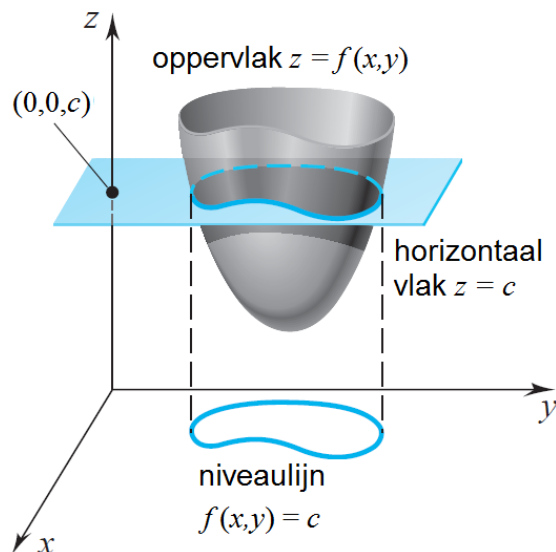
```

Theorie: Niveaulijnen en contourgrafieken

Om bij weerkaarten een indruk te geven van luchtdrukverschillen en om bij topografische kaarten een indruk te geven van hoogteverschillen worden vaak niveaulijnen gebruikt. Lijnen met gelijke luchtdruk heten isobaren. Hoogtelijnen zijn lijnen op een kaart die punten van gelijke hoogte met elkaar verbinden. Onderstaande figuur illustreert de constructie van een hoogtekaart



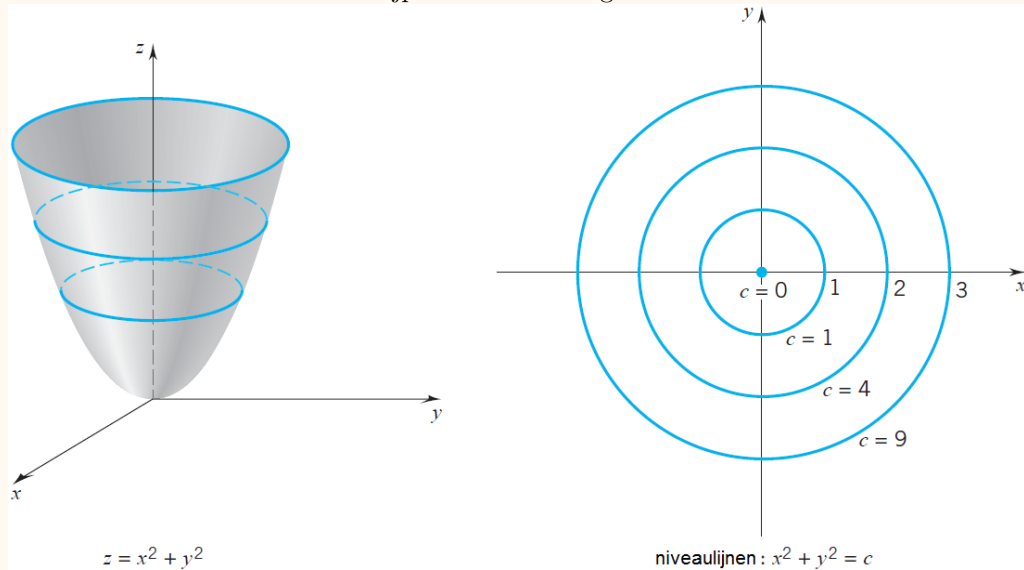
Maar deze constructie zou je ook op oppervlakken van een functie kunnen toepassen. We spreken dan van **isolijnen** of **niveaulijnen**. Ze zijn gedefinieerd als lijnen in de grafiek van een functie van twee variabelen met constante functiewaarden, met ander woorden, punten op het oppervlak waar de functie hetzelfde niveau heeft. Op zo'n lijn op het oppervlak is z dus constant. De projectie op het xy -vlak heet een **contourgrafiek**. Hieronder zie je hoe een contourgrafiek van een functie ontstaat.



We geven een paar voorbeelden.

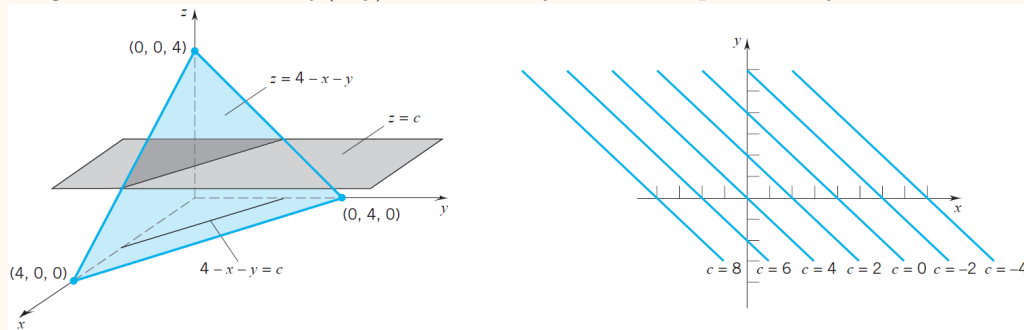
Voorbeeld: Voorbeeld 1

In de grafiek aan de linkerkant van de functie $f(x, y) = x^2 + y^2$ zijn niveaulijnen getekend en aan de rechterkant staat de bijpassende contourgrafiek.



Voorbeeld: Voorbeeld 2

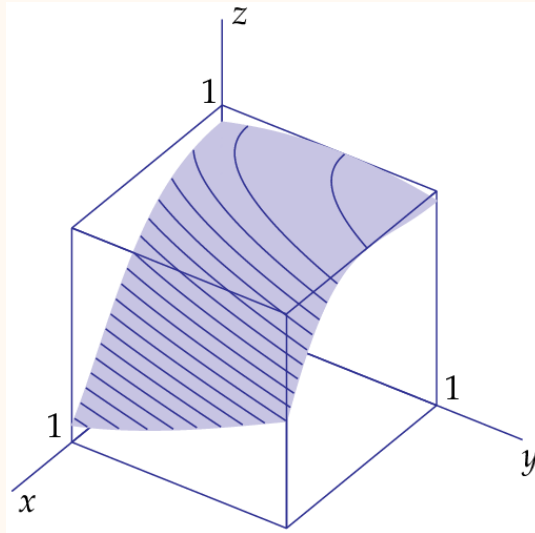
De grafiek van de functie $f(x, y) = 4 - 4x - 4y$ bestaat uit parallelle lijnen.



Visualisatie software staat vaak ook toe niveaulijnen op het oppervlak van een functie van twee variabelen te tonen.

Voorbeeld: Voorbeeld 3

In onderstaande grafiek van de functie $f(x, y) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1))$ zijn de niveaulijnen op het oppervlak getekend voor $z = 1.00, z = 0.95, z = 0.90, \dots$



Laten we de projectie van één van de niveaulijnen op het xy -vlak eens in detail bekijken, namelijk de niveaulijn met waarde 1. Dan moet gelden

$$\frac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1)) = 1$$

. Dit geeft na omwerken de vergelijking

$$\sin(2x^2 - y - 1) = 1$$

Binnen het gekozen coördinatennet geldt dan

$$2x^2 - y - 1 = -\frac{1}{2}\pi$$

oftewel

$$y = 2x^2 + \frac{1}{2}\pi - 1$$

De niveaulijn is dus een parabool.

Theorie: Contourgrafieken in Python

Als voorbeeld voor het tekenen van contourgrafieken gebruiken we de functie

$$f(x, y) = \cos(xy)$$

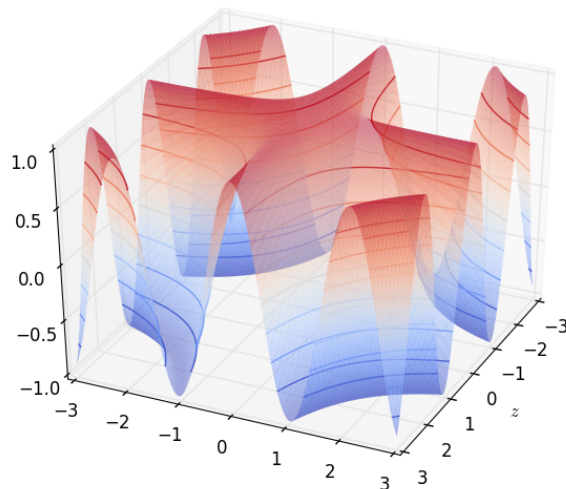
We tekenen eerst maar eens de grafiek van de functie met enkele niveaulijnen hierin zichtbaar gemaakt via de `contour` opdracht. Om een beter beeld te krijgen is een zelfgekozen zichtrichting gespecificeerd met de `view_init` methode en is het oppervlak transparant gemaakt zodat de niveaulijnen goed zichtbaar zijn. Als kleurafbeelding gebruiken we een voorgeprogrammeerd schema waarin een lage z -waarde in de ‘koele’ kleur blauw is en een hoge z -waarde in de ‘warmer’ kleur rood is.

```
>>> import numpy as np
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
>>> from matplotlib import cm
>>> def f(x,y): return np.cos(x*y)
```

```

>>> x = np.linspace(-3, 3, 500)
>>> y = np.linspace(-3, 3, 500)
>>> x, y = np.meshgrid(x, y)
>>> z = f(x,y)
>>> fig = plt.figure()
>>> ax = fig.add_subplot(1,1,1, projection='3d')
>>> ax.contour(x, y, z, cmap=cm.coolwarm)
>>> ax.set_xlabel('$x$')
>>> ax.set_ylabel('$y$')
>>> ax.set_zlabel('$z$')
>>> ax.plot_surface(x, y, z, rstride=4, cstride=4, cmap=cm.coolwarm,
>>>                 linewidth=0, alpha=0.4)
>>> ax.view_init(35, 25)
>>> ax.set_zlim([-1.1, 1.1])
>>> plt.show()

```



Bij een contourgrafiek projecteert men de niveaulijnen op het xy -vlak. Hieronder is dit op twee manieren gedaan, namelijk mét en zonder opvulling van de ruimte tussen de niveaulijnen. Het verschil zit hem in de aanroep van `contour` respectievelijk `contourf`. Vanwege het zicht hebben we het projectievlak $z = -10$ gekozen.

```

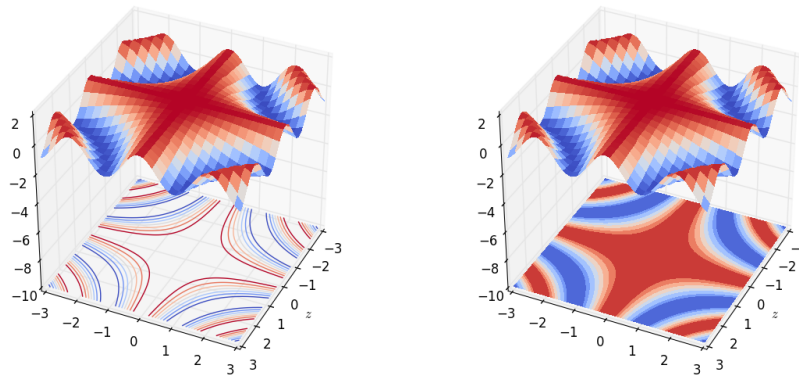
>>> import numpy as np
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
>>> from matplotlib import cm
>>> def f(x,y): return np.cos(x*y)
>>> x = np.linspace(-3, 3, 100)
>>> y = np.linspace(-3, 3, 100)
>>> x, y = np.meshgrid(x, y)
>>> z = f(x,y)
>>> fig = plt.figure(figsize=(14,6))
>>> ax1 = fig.add_subplot(1,2,1, projection='3d')
>>> ax1.contour(x, y, z, cmap=cm.coolwarm, offset=-10)
>>> ax1.set_xlabel('$x$')

```

```

>>> ax1.set_ylabel('$y$')
>>> ax1.set_zlabel('$z$')
>>> ax1.plot_surface(x, y, z, rstride=4, cstride=4, cmap=cm.coolwarm,
>>>                  linewidth=0, antialiased=False)
>>> ax1.view_init(35, 25)
>>> ax1.set_zlim([-10, 2])
>>> ax2 = fig.add_subplot(1,2,2, projection='3d')
>>> ax2.contourf(x, y, z, cmap=cm.coolwarm, offset=-10)
>>> ax2.set_xlabel('$x$')
>>> ax2.set_ylabel('$y$')
>>> ax2.set_zlabel('$z$')
>>> ax2.plot_surface(x, y, z, rstride=4, cstride=4, cmap=cm.coolwarm,
>>>                  linewidth=0, antialiased=False)
>>> ax2.view_init(35, 25)
>>> ax2.set_zlim([-10, 2])
>>> plt.show()

```

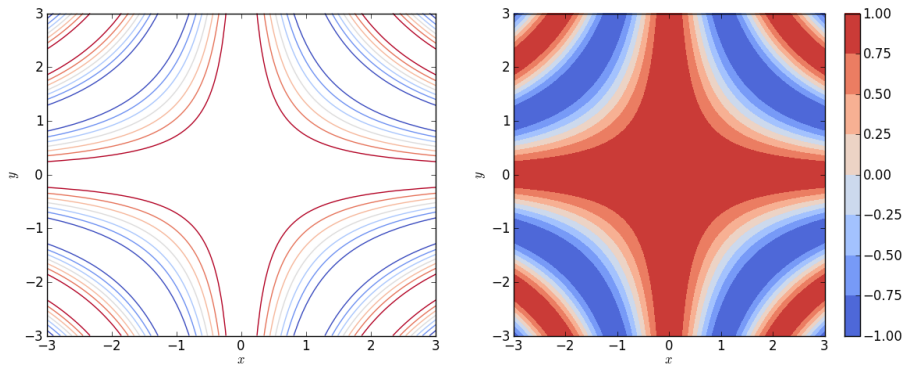


Normaliter zie je de (opgevulde) contourgrafieken als 2-dimensionale figuren.

```

>>> import numpy as np
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
>>> from matplotlib import cm
>>> def f(x,y): return np.cos(x*y)
>>> x = np.linspace(-3, 3, 100)
>>> y = np.linspace(-3, 3, 100)
>>> x, y = np.meshgrid(x, y)
>>> z = f(x,y)
>>> fig = plt.figure(figsize=(14,5))
>>> ax1 = fig.add_subplot(1,2,1)
>>> ax1.contour(x, y, z, cmap=cm.coolwarm)
>>> ax1.set_xlabel('$x$')
>>> ax1.set_ylabel('$y$')
>>> ax2 = fig.add_subplot(1,2,2)
>>> p2 = ax2.contourf(x, y, z, cmap=cm.coolwarm)
>>> fig.colorbar(p2)
>>> ax2.set_xlabel('$x$')
>>> ax2.set_ylabel('$y$')
>>> plt.show()

```



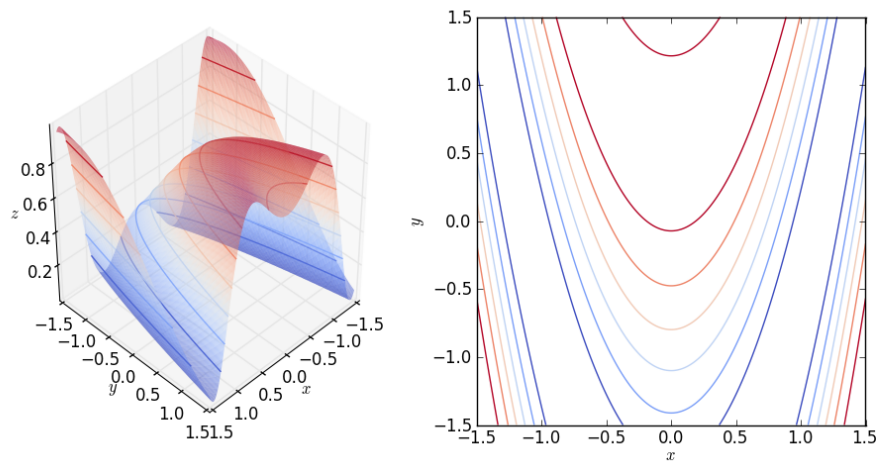
Theorie: Python opdrachten: Grafieken in drie dimensies

Opdracht 1

Maak in Python de grafiek (inclusief niveaulijnen op het oppervlak) en de contourgrafiek van de functie

$$\frac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1))$$

die er als volgt uit ziet:



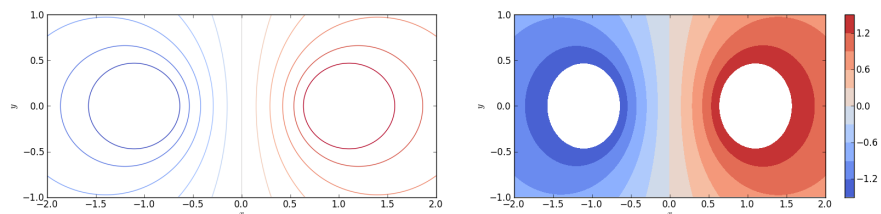
Opdracht

2

Maak in Python de open en gevulde contourgrafiek van de functie

$$f(x, y) = \ln(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}) - \ln(\sqrt{(x-1)^2 + y^2})$$

die er als volgt uit ziet (gebruik *levels* om het aantal contourlijnen te specificeren):



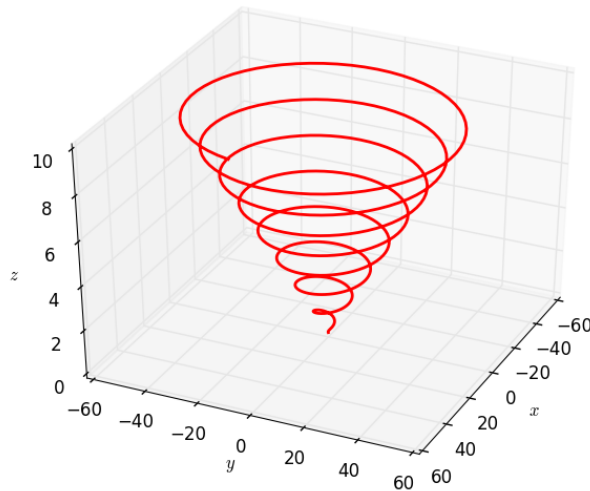
De grafieken horen bij een elektrisch potentiaalveld van twee puntladingen op plekken $(-1, 0)$ en $(1, 0)$.

Opdracht 3

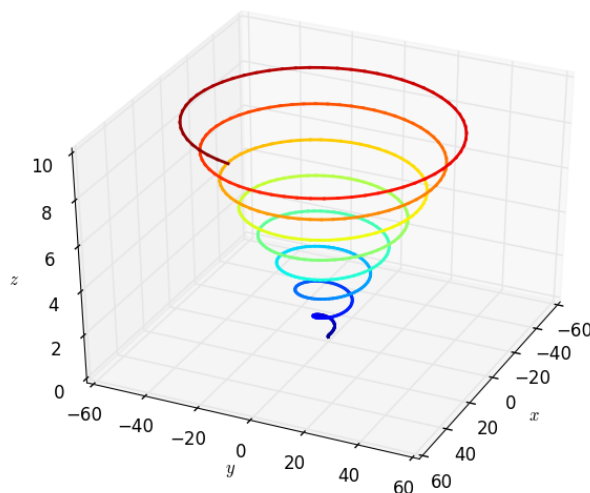
Teken de grafiek van de geparametriseerde kromme

$$f(t) = (t \cos t, t \sin t, \frac{1}{5}t)$$

op het interval $[0, 50]$, die er als volgt uit ziet:



Uitdaging: maak de grafiek van de geparametriseerde kromme zodanig dat de lijnkleur van de z -waarde afhangt op de volgende manier:



Theorie: Partiële afgeleiden van de eerste orde

Je kunt bij een functie $f(x, y)$ een van twee variabelen, zeg y , constant houden. Je krijgt dan een functie die alleen x als onafhankelijke variabele heeft. In de grafiek van f bevindt je je dan

op een coördinaatlijn bij constante y -waarde. Als deze functie van x ‘net’ is, kun je de afgeleide hiervan bepalen: deze afgeleide heet de **partiële afgeleide van $f(x, y)$ naar x** en deze afgeleide heeft orde 1. Dit laatste is alleen van belang als we hogere partiële afgeleiden bespreken en laat je meestal weg in de beschrijving. De volgende drie notaties voor de partiële afgeleide worden vaak gebruikt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) \quad \text{en} \quad f_x(x, y)$$

Volgens de definitie van de partiële afgeleide is

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{voor kleine } \Delta x$$

Evenzo krijg je de partiële afgeleide naar y wanneer je juist x constant houdt en y als onafhankelijke variabele opvat. De gangbare notaties zijn dan

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) \quad \text{en} \quad f_y(x, y)$$

Voorbeeld: Definitie en notatie

De partiële afgeleiden van de functie $f(x, y)$ zijn functies $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ gedefinieerd door

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f(x, y + dy) - f(x, y)}{dy}$$

Wanneer we de partiële afgeleide van de functie $f(x, y)$ in een bepaald punt (a, b) willen hebben, dan gebruiken we ook de volgende notatie

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{en} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

Het handigst is in dit geval de notatie $f_x(a, b)$ en $f_y(a, b)$.

Voorbeeld: Rekenregels

De rekenregels voor afgeleiden van functies van één variabele, dat wil zeggen de constante factorregel en de som-, verschil, product- en quotiëntregel, zijn toepasbaar bij partiële afgeleiden.

Partiële afgeleide naar x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(c \cdot f) = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{voor constante } c$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \pm g) = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$$

Partiële afgeleide naar y :

$$\frac{\partial}{\partial y}(c \cdot f) = c \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{voor constante } c$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f \pm g) = \frac{\partial f}{\partial y} \pm \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}$$

Voorbeeld

Bereken de partiële afgeleide van $3x^3y^6$ naar y .

Uitwerking: We houden x constant en beschouwen y als onafhankelijke variabele. Dus $3x^3$ is constant.

Het resterende stukje van de formule dat van y afhangt is dan y^6 .

De afgeleide (naar y) hiervan is $6 \cdot y^{6-1} = 6y^5$.

Het eindresultaat is het product van de twee tussenresultaten:

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^3y^6) = 3x^3 \cdot 6y^5 = 18x^3y^5$$

Voorbeeld

Bereken de partiële afgeleide van $x^6y \sin(x)$ naar x .

Uitwerking: We kunnen de uitdrukking zien als een product van twee termen waarin alleen maar x en alleen maar y in voor komen, namelijk $x^6y \sin(x) = x^6 \sin(x) \cdot y$.

De x -term is dus $x^6 \sin x$ en de afgeleide naar x hiervan is gelijk aan $6x^5 \sin(x) + x^6 \cos(x)$.

De y -term is simpelweg y en als functie van x constant.

We kunnen nu bijvoorbeeld de productregel van partiële afgeleiden toepassen en krijgen als eindantwoord

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^6 y \sin(x)) = (6x^5 \sin(x) + x^6 \cos(x)) \cdot y = 6x^5 \sin(x)y + x^6 \cos(x)y$$

De laatste stap van wegwerken van de haakjes is niet nodig en misschien is het antwoord in de vorm

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^6 y \sin(x)) = (6 \sin(x) + x \cos(x)) x^5 y$$

nog wel het mooist.

Voor functies van meer dan twee variabelen kunnen op soortgelijke manier afgeleiden gedefinieerd worden. Bijvoorbeeld geldt voor de functie

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

dat

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Opgaven: Bereken van partiële afgeleiden

Vraag 1

Bereken de partiële afgeleide van $5x^8 y$ naar x .

$$\frac{\partial}{\partial x}(5x^8 y) = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Bereken de partiële afgeleide van $7x^3 y^8$ naar y .

$$\frac{\partial}{\partial y}(7x^3 y^8) = \dots\dots\dots$$

Vraag 3

Bereken de partiële afgeleide van $2x^7 - xy^7$ naar y .

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^7 - xy^7) = \dots\dots\dots$$

Vraag 4

Bereken de partiële afgeleide van $x^5 y \sin(x)$ naar x .

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^5 y \sin(x)) = \dots\dots\dots$$

Vraag 5

Bereken de partiële afgeleide van $\frac{\cos(y)}{x^3 y}$ naar y .

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\cos(y)}{x^3 y} \right) = \dots\dots\dots$$

Vraag 6

Bereken de partiële afgeleide van $f(x, y) = x^2 + y^3$ naar y in het punt $(x, y) = (2, 2)$.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(2,2)} = \dots\dots\dots$$

Theorie: Hogere partiële afgeleiden

Voorbeeld

We bekijken het voorbeeld van de volgende functie van twee variabelen

$$f(x, y) = \frac{x}{x + y}$$

De partiële afgeleiden zijn in dit geval met de quotiëntregel uit te rekenen en zijn (ga dat zelf na!)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x + y} \right) = \frac{y}{(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x + y} \right) = -\frac{x}{(x + y)^2}$$

De partiële afgeleiden zijn op zichzelf weer functies van de twee variabelen x en y , hiervan kun je opnieuw partiële afgeleiden bepalen. Die worden **partiële afgeleiden van de tweede orde** genoemd.

Zo zijn de partiële afgeleiden van $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ gelijk aan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{(x+y)^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y(x+y)^{-2}) \\ &= -2y(x+y)^{-3} = -2 \frac{y}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x+y)^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y(x+y)^{-2}) \\ &= (x+y)^{-2} - 2y(x+y)^{-3} \\ &= \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3} \\ &= \frac{x+y}{(x+y)^3} - \frac{2y}{(x+y)^3} = \frac{x-y}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

De partiële afgeleiden van $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ zijn gelijk aan (ga dat zelf na!)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) &= \frac{x-y}{(x+y)^3} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) &= \frac{2x}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

Voorbeeld: Eigenschap van gemengde afgeleiden

Wat opvalt is dat de ‘gemengde’ afgeleiden $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)$ en $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right)$ aan elkaar gelijk zijn. Dat is geen toeval: als de partiële afgeleiden van f bestaan en continu zijn is dat altijd zo. Met andere woorden, bij ‘nette’ functies van twee variabelen doet de volgorde waarin ‘gemengde’ hogere afgeleiden berekend worden er niet toe.

Voorbeeld: Notaties voor hogere afgeleiden

De volgende notaties voor afgeleiden van tweede orde worden gebruikt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = f_{yy}(x, y)$$

Soortgelijke notatie worden gebruikt voor hogere partiële afgeleiden en voor partiële afgeleiden van functies van meer dan twee variabelen.

Notitie: in de meeste tekstboeken wordt de notatie f_{yx} voor $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ gebruikt. Omdat voor functies met continue afgeleiden geldt dat $f_{xy} = f_{yx}$ maakt het niet uit.

Voorbeeld

Bereken de partiële afgeleiden van de tweede orde van de functie

$$f(x, y) = 3x^9y^2 + 8xy + \frac{y}{8x}$$

Uitwerking: De oplossing bestaat uit de volgende vier partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = 216x^7y^2 + \frac{y}{4x^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = 54x^8y - \frac{1}{8x^2} + 8$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = 54x^8y - \frac{1}{8x^2} + 8$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 6x^9$$

Het is een kwestie van consequent en foutloos toepassen van de rekenregels voor differentiëren.

Opgaven: Hogere partiële afgeleiden

Vraag 1

Bereken de volgende partiële afgeleide van tweede orde:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{x+y} = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Welk van onderstaande functies voldoet aan de volgende vergelijking:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

met constante $c \neq 0$?

- a. $f(x, y) = x \sin(x + cy)$
- b. $f(x, y) = \sin(x + cy) \cos(x + cy)$
- c. $f(x, y) = y \sin(x + cy)$
- d. $f(x, y) = \sin(x + cy) + \cos(x + cy)$

Vraag 3

Welke van onderstaande functies voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 ?$$

- a. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$
- b. $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 4z^2$
- c. $f(x, y) = 3x + 3y - 6z^2$
- d. $f(x, y) = \ln(4x^2 + 4y^2)$

Vraag 4

Bereken de volgende partiële afgeleide van tweede orde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos(xy) = \dots\dots\dots$$

Vraag 5

Bereken de volgende partiële afgeleide van tweede orde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(x + 5y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(x + 5y) = \dots\dots\dots$$

Vraag 6

Bekijk de functie

$$f(x, y, z) = x^5 y^2 \sin(z) + 5x$$

Welke volgorde van differentiëren leidt tot het snelste resultaat wanneer

$$\frac{\partial f}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$$

gevraagd wordt?

- a. De volgorde waarin je differentieert doet er helemaal niet toe.
- b. Differentieer eerst tweemaal naar z , en daarna nog naar y en x
- c. Differentieer eerst tweemaal naar x , daarna tweemaal naar y en tweemaal naar z , en tenslotte nog eenmaal naar y .
- d. Differentieer eerst driemaal naar y , en daarna nog naar x en z

Vraag 7

Bereken de volgende partiële afgeleide van tweede orde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\exp(3y) + x \ln(3y))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\exp(3y) + x \ln(3y)) = \dots\dots\dots$$

Vraag 8

Bereken de exacte waarde van de volgende partiële afgeleide van tweede orde

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

in het punt $(x, y) = (4, 4)$.

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \bigg|_{(4,4)} = \dots\dots\dots$$

Vraag 9

Bereken de exacte waarde van

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

voor

$$f(x, y) = \sin(5xy) + y \cos(x)$$

in

$$(x, y) = (0, 3).$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \bigg|_{(0,3)} = \dots\dots\dots \quad \text{voor } f(x, y) = \sin(5xy) + y \cos(x).$$

Vraag 10

Van een nog onbekende functie $f(x, y)$ weten we het volgende:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = y$$

Welke van de volgende functies voldoet aan deze vier voorwaarden?

- a. $f(x, y) = -2x - 4y + xyz - 8$
- b. $f(x, y) = e^{xy}$
- c. $f(x, y) = \sin(xy)$
- d. $f(x, y) = \frac{1}{6}y^3 - 5y - 3$

Theorie: Kettingregels

We kijken eerst terug op de kettingregel van functies van één variabele.

Voorbeeld: Kettingregel van een functie van één variabele

We beschouwen de functie

$$y(t) = (3t^2 - 1)^5$$

als samengesteld uit de functies

$$y = x^5 \quad \text{en} \quad x = 3t^2 - 1$$

Er geldt dan:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 \quad \text{en} \quad \frac{dx}{dt} = 6t$$

In termen van differentiaal hebben we

$$dy = 5x^4 dx \quad \text{en} \quad dx = 6t dt$$

Omdat

$$x = 3t^2 - 1 \quad \text{en} \quad dx = 6t dt$$

geldt dus

$$dy = 5(3t^2 - 1)^4 6t dt$$

We hebben dus

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

waarbij we de afgeleide $\frac{dy}{dx}$, die aanvankelijk een functie is van x , via $x = x(t)$ ook weer in de variabele t kunnen uitdrukken. Deze laatste regel geldt meer algemeen voor elke functie $y \circ x$, dat wil zeggen voor de samenstelling van de functies y en x .

We bespreken nu **kettingregels** waarbij functies van twee variabelen betrokken zijn.

Voorbeeld: Eerste versie van een kettingregel

Als $z = z(x, y)$ een differentieerbare functie van twee variabelen is, en x en y differentieerbare functies van t zijn, dan is z een functie van t en

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Voorbeeld

Stel

$$z(x, y) = x \cdot y, \quad x = \cos t \quad \text{en} \quad y = \sin t$$

Dan is z als functie van t gelijk aan $\cos(t) \sin(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$ en dus $z'(t) = \cos(2t)$. Maar dit resultaat volgt ook uit bovenstaande kettingregel:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \sin(t) \cdot -\sin(t) + \cos(t) \cdot \cos(t)$$

$$= \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$$

Meer algemeen geldt de volgende rekenregel:

Voorbeeld: Tweede versie van een kettingregel

Als $z = z(x, y)$ een differentieerbare functie van twee variabelen is, en x en y differentieerbare functies van twee variabelen s en t zijn, dan is z een functie van s en t en

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Voorbeeld

Stel

$$z(x, y) = x \cdot y, \quad x = s^2 + t^2 \quad \text{en} \quad y = s^2 - t^2$$

Dan is z als functie van s en t gelijk aan $(s^2 + t^2)(s^2 - t^2) = s^4 - t^4$, en dus $\frac{\partial z}{\partial s} = 4s^3$ en $\frac{\partial z}{\partial t} = -4t^3$. Maar dit resultaat volgt ook uit bovenstaande kettingregel:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= (s^2 - t^2)2s + (s^2 + t^2)2s = 4s^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= (s^2 - t^2)2t + (s^2 + t^2) \cdot -2t = -4t^3$$

Een belangrijke toepassing van de tweede kettingregel is de omzetting van **Cartesische coördinaten** x, y in **poolcoördinaten** r, ϕ via de definities $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$.

Voorbeeld: Voorbeeld van poolcoördinaten

Bekijk de functie

$$z(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

met

$$x = r \cos \phi \quad \text{en} \quad y = r \sin \phi$$

In de poolcoördinaten r, ϕ is de functie eenvoudiger:

$$z(r, \phi) = \frac{2(r \cos \phi)(r \sin \phi)}{(r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2} = \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = \frac{\sin(2\phi)}{\cos(2\phi)} = \tan(2\phi)$$

Na dit herschrijven van de functie in poolcoördinaten kom je tot de conclusie dat

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{2}{\cos^2(2\phi)}$$

Maar dit resultaat volgt ook uit bovenstaande kettingregel. Eerst maar even de benodigde partiële afgeleiden uitrekenen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y \cdot (x^2 - y^2) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{-2y(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x \cdot (x^2 - y^2) - 2xy \cdot -2y}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{2x(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \phi \qquad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \sin \phi$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \phi \qquad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r \cos \phi$$

Nu kunnen we de kettingregel toepassen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{-2y(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \cdot \cos \phi + \frac{2x(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \cdot \sin \phi \\ &= \frac{(2x \sin(\phi) - 2y \cos(\phi))(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \phi} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ &= \frac{-2y(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \cdot -r \sin \phi + \frac{2x(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \cdot r \cos \phi \\ &= \frac{(2ry \sin(\phi) + 2rx \cos(\phi))(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \\ &= \frac{(2r^2(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi))r^2)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{2r^4}{(x^2 - y^2)^2} \\ &= \frac{2r^4}{(r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi))^2} = \frac{2}{\cos^2(2\phi)} \end{aligned}$$

Veel formulemanipulatie, maar het voorbeeld laat ook zien dat sommige functies in een ander coördinatenstelsel dan waarin ze gedefinieerd zijn eenvoudig zijn en dat berekeningen simpeler zijn.

Je kunt de kettingregel bij poolcoördinaten ook als volgt formuleren:

Voorbeeld: Kettingregel voor poolcoördinaten

Als $f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ dan is

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi$$

Voor functies van meer dan twee variabelen kunnen op soortgelijke manier kettingregels bepaald worden. Bijvoorbeeld geldt

Voorbeeld: Kettingregel voor functies van 3 variabelen

Als $w = w(x, y, z)$ een differentieerbare functie van drie variabelen is, en x , y , en z differentieerbare functies van t zijn, dan is w een functie van t en

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Opgaven: Kettingregels

Vraag 1

Gebruik een kettingregel om de afgeleide $\frac{dz}{dt}$ uit te rekenen voor de functie

$$z(x, y) = xy$$

met

$$x = t^4 \quad \text{en} \quad y = t^2$$

$$\frac{dz}{dt} = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Gebruik een kettingregel om de afgeleide $\frac{dz}{dt}$ uit te rekenen voor de functie

$$z(x, y) = 3x + 4y$$

met $x = \cos t$ en $y = \sin t$.

$$\frac{dz}{dt} = \dots\dots\dots$$

Vraag 3

Gebruik een kettingregel om de afgeleide $\frac{dz}{dt}$ uit te rekenen in $t = \frac{\pi}{2}$ voor de functie

$$z(x, y) = x^2 + y^2$$

met

$$x = \cos(2t) \quad \text{en} \quad y = \sin(2t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \dots\dots\dots$$

Vraag 4

Gebruik een kettingregel om de partiële afgeleiden $\frac{\partial z}{\partial s}$ en $\frac{\partial z}{\partial t}$ uit te rekenen voor de functie

$$z = 4x^2 + 4y^2$$

met

$$x = s + 2t \quad \text{en} \quad y = s - 2t$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \dots\dots\dots$$

Vraag 5

Gebruik een kettingregel om de afgeleide $\frac{dw}{dt}$ uit te rekenen voor de functie

$$w(x, y, z) = xy + z$$

met

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

$$\frac{dw}{dt} = \dots\dots\dots$$

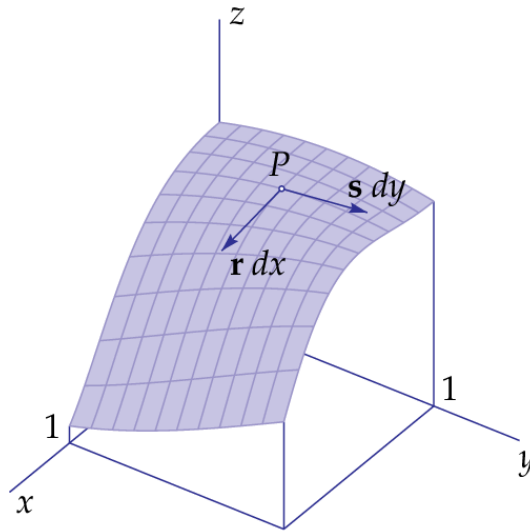
Theorie: Raakvectoren

In onderstaande figuur zijn **raakvectoren** aan de coördinaatlijnen door het punt $P = (a, b, c)$ met $c = f(a, b)$ getekend: ze hebben beide het punt P als aangrijpingspunt. De ene raakvector heeft een component in de x -richting die we dx noemen en een component in de y -richting die gelijk aan nul is. De component dz in de z -richting is dan gelijk aan $f_x(a, b)dx$ want langs de coördinaatlijn hebben we de functie $z = f(x, b)$ in één veranderlijke en hiervoor kunnen we de differentiaal opschrijven. De raakvector startend in het punt $P = (a, b)$ is dus

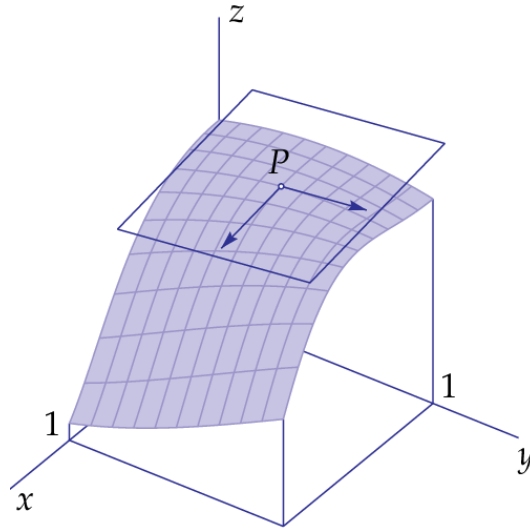
$$\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ f_x(a, b)dx \end{pmatrix} = \mathbf{r} dx \quad \text{met} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a, b) \end{pmatrix}$$

De andere raakvector heeft een component in de y -richting die we dy noemen en een component in de x -richting die gelijk aan nul is. De component dz in de z -richting is dan gelijk aan $f_y(a, b)dy$ want langs de coördinaatlijn hebben we de functie $z = f(a, y)$ in één veranderlijke en hiervoor kunnen we de differentiaal opschrijven. De raakvector startend in het punt $P = (a, b)$ is in dit geval dus

$$\begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ f_y(a, b)dy \end{pmatrix} = \mathbf{s} dy \quad \text{met} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$



In het getekende voorbeeld hebben we $dx = dy = 0.4$ genomen, maar je kunt net zo goed een dussdanige keuze maken dat de norm van de raakvectoren gelijk aan 1 is. De raakvectoren $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$ spannen het **raakvlak** aan de grafiek van $f(x, y)$ in het punt P op. Elke vector met aangrijpingspunt P in het raakvlak is een lineaire combinatie $\lambda\mathbf{r} + \mu\mathbf{s}$ van $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$ is een raakvector in P aan het oppervlak dat de grafiek van $f(x, y)$ vormt. Onderstaande figuur visualiseert dit.



Voor de vectorvoorstelling van het raakvlak in punt P mogen de vector met de oorsprong als aangrijpingspunt en eindpunt in P als steunvector nemen.

Voorbeeld: Vectorvoorstelling van een raakvlak

Stel $f(x, y)$ is een functie van twee variabelen x en y . Een vectorvoorstelling van het raakvlak in $P = (a, b, f(a, b))$ is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a, b) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a, b) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

Theorie: Vergelijking van een raakvlak

Voorbeeld: Intermezzo: de vergelijking van een vlak

We gaan de vergelijking van een raakvlak bepalen. Hiervoor is nodig dat je weet hoe een vergelijking van een vlak opgespoord kan worden als je twee basisvectoren van het vlak kent. In het algemeen heeft de vergelijking van een vlak de vorm

$$ax + by + cz + d = 0$$

met a, b, c getallen die niet allemaal 0 zijn en d een vierde getal. Merk op dat de getallen a, b, c en d niet uniek zijn: elk veelvoud van het viertal beschrijft hetzelfde vlak in de driedimensionale ruimte. We moeten dus eigenlijk spreken van een vergelijking van een vlak. Het vlak met vergelijking $ax + by + cz + d = 0$ is evenwijdig aan het vlak door de oorsprong gegeven door de vergelijking

$$ax + by + cz = 0$$

Deze vergelijking kun je ook schrijven als inproduct van twee vectoren, namelijk

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Met andere woorden, de vector beginnend in de oorsprong en eindigend op (x, y, z) wijst naar een punt op het vlak door de oorsprong als deze vector loodrecht staat op de vector met componenten a , b en c . Anders gezegd, de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ staat loodrecht op elke vector in het vlak. Dit het een **normaalvector van het vlak**. Gegeven twee vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ die niet in elkaars verlengde liggen in een vlak door de oorsprong, kun je als normaalvector het uitproduct $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ (in deze volgorde!) nemen dat gedefinieerd is als

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Na bovenstaand intermezzo keren we terug ons onderwerp van functies van twee variabelen: stel $z = f(x, y)$ is een functie van twee variabelen x en y . We bekijken een punt $P = (a, b, c)$ met $c = f(a, b)$. We weten dat de vectoren

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a, b) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

het raakvlak opspannen. Om de vergelijking van het raakvlak te vinden volstaat om een normaalvector van dit vlak te vinden. Dit kan via het uitproduct van $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -f_x(a, b) \\ -f_y(a, b) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hiermee hebben we het volgende gevonden

Voorbeeld: Vergelijking van een raakvlak

Een vergelijking van het raakvlak in $P = (a, b, c)$ met $c = f(a, b)$ is

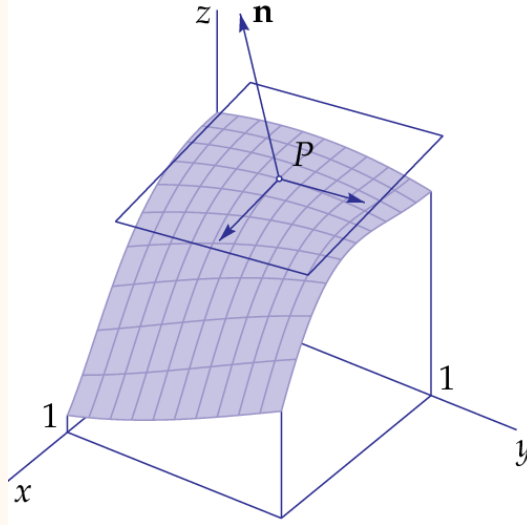
$$-f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b) + (z - c) = 0$$

oftewel

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x, y) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1))$ is een gekromd oppervlak. In onderstaande tekening is coördinatenet is getekend voor $x = 0.0, 0.1, \dots, 0.9, 1.0$ en voor $y = 0.0, 0.1, \dots, 0.9, 1.0$, en zijn het raakvlak door het punt $P = (0.3, 0.5, f(0.3, 0.5))$ en de normaalvector $\mathbf{n}$ geschetst.



Afgerond op vijf decimalen hebben we:

$$\begin{aligned}P &= (0.3, 0.5, 0.98436) \\f_x(0.3, 0.5) &= -0.14891 \\f_y(0.3, 0.5) &= 0.12409\end{aligned}$$

De normaalvector $\mathbf{n}$ is dan

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0.14891 \\ -0.12409 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en een vergelijking van het raakvlak is

$$z = 0.96699 - 0.14891x + 0.12409y$$

Voorbeeld

Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(-1, 1, 1)$ aan de grafiek van de functie

$$f(x, y) = y^3 - xy^2 + xy$$

Uitwerking: We berekenen eerst de benodigde partiële afgeleiden van

$$f(x, y) = y^3 - xy^2 + xy$$

en hun waarden in $(-1, 1)$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(-1, 1)} = y - y^2 \Big|_{(-1, 1)} = 0$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(-1, 1)} = 3y^2 - 2xy + x \Big|_{(-1, 1)} = 4$$

Een vergelijking van het gevraagde raakvlak is

$$z = f(-1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(-1,1)} (x + 1) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(-1,1)} (y - 1)$$

oftewel, met alle invullingen

$$z = 1 + 0 \cdot (x + 1) + 4 \cdot (y - 1)$$

Met de haakjes weggewerkt vinden we dan

$$z = 4y - 3$$

Opgaven: Berekenen van een raakvlak

Vraag 1

Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(3, -2, 6)$ aan de grafiek van de functie $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$

.....

Vraag 2

Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(1, 0, 1)$ aan de grafiek van de functie

$$f(x, y) = y^3 + xy^2 + x^3$$

.....

Vraag 3

Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(1, 2, 1)$ aan de grafiek van de functie $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

.....

Vraag 4

Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(0, 0, -1)$ aan de grafiek van de functie

$$f(x, y) = (-x^2) - x - 1$$

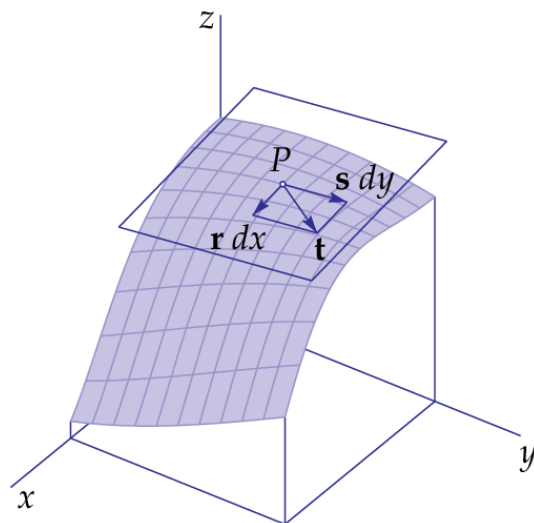
Theorie: De totale differentiaal

Stel $z = f(x, y)$ is een ‘nette’ functie van twee variabelen x en y . We bekijken een punt $P = (a, b, c)$ met $c = f(a, b)$. We weten dat de vectoren

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a, b) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

het raakvlak opspannen. Een willekeurige raakvector $\mathbf{t}$ aan de grafiek van $f(x, y)$ in P is van de vorm

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{r}dx + \mathbf{s}dy \\ &= \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ f_x(a, b)dx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ f_y(a, b)dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$



De eerste component, dx , is de toename van de x -coördinaat langs $\mathbf{t}$, de tweede component, dy , is de toename van de y -coördinaat langs $\mathbf{t}$ en de derde component is de toename van de z -coördinaat langs $\mathbf{t}$. Voor *kleine* dx en dy valt het raakvlak in P vrijwel samen met de grafiek van $f(x, y)$, en de toename van z valt dus vrijwel samen met de toename van $f(x, y)$. Die toename van $f(x, y)$ is gelijk aan

$$\Delta f = f(a + dx, b + dy) - f(a, b)$$

en voor kleine dx en dy vrijwel gelijk aan

$$f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy$$

De laatste uitdrukking heet de totale differentiaal van $f(x, y)$ in het punt $P = (a, b)$. De notatie voor de totale differentiaal is $d(f(a, b))$, maar net als bij functies van één veranderlijke laten we in de notatie de afhankelijkheid van de differentiaal van het gekozen punt P achterwege en schrijven we het volgende:

Voorbeeld: Definitie

De totale differentiaal van de functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y noteren we met df en is door de volgende formule gedefinieerd:

$$df = f_x dx + f_y dy \quad \text{oftewel} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

In bovenstaande tekening is, net als eerder, de functie $f(x, y) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1))$ en het punt $P = (0.3, 0.5)$ genomen. Voor de duidelijkheid van het plaatje zijn de toenames $dx = 0.2, dy = 0.3$ niet al te klein gekozen en is de afwijking tussen raakvlak en grafiek niet zo heel klein: het verschil tussen de totale differentiaal df in P en het functiewaardenverschil Δf is hierbij ongeveer 0.01. Maar kies je dx en dy tien keer zo klein ($dx = 0.02$ en $dy = 0.03$), dan is de totale differentiaal df in P gelijk aan

$$df = f_x(0.3, 0.5) dx + f_y(0.3, 0.5) dy \approx -0.14891 \times 0.02 + -0.12409 \times 0.03 \approx 0.00074$$

terwijl het functiewaardenverschil Δf in dit geval gelijk is aan

$$\Delta f = f(0.32, 0.53) - f(0.3, 0.5) \approx 0.00064$$

Het verschil tussen df en Δf is nog maar 0.0001. Maak je dx en dy nog eens tien keer zo klein, dan blijkt het verschil ongeveer 0.000001 te zijn!

Voorbeeld

We bekijken de functie $z = z(x, y) = \frac{x}{y}$. Dan is de totale differentiaal dz gegeven door

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \end{aligned}$$

Voor functies van drie of meer variabelen wordt op soortgelijke manier de totale differentiaal gedefinieerd; bijvoorbeeld

Voorbeeld: Definitie

De totale differentiaal van de functie $f(x, y, z)$ van drie variabelen x, y en z noteren we met df en is door de volgende formule gedefinieerd:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad \text{oftewel} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Theorie: Taylorbenaderingen

Bij een ‘nette’ functie $f(x)$ van één veranderlijke hebben we al gezien dat we deze rondom een punt $x = a$ kunnen benaderen met de raaklijn in dit punt gegeven door de vergelijking

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Voor functies van twee variabelen kunnen we net zo’n **lineaire benadering** (ook wel **eerste orde benadering** genoemd) rondom een punt toepassen; in dit geval gebruiken we het raakvlak in het gekozen punt aan de grafiek van de gegeven functie.

Voorbeeld: Lineaire benadering

Bij een ‘nette’ functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y kunnen we functiewaarden rondom het punt $(x, y) = (a, b)$ benaderen via het raakvlak in dit punt gegeven door de vergelijking

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Bij functies $f(x)$ van één veranderlijke hebben we al gezien dat de lineaire benadering hetzelfde was als de Taylorveelterm van graad 1 en dat we preciezere benaderingen krijgen als we een Taylorveelterm van hogere graad nemen, bijvoorbeeld de volgende **kwadratische benadering** (**tweede orde benadering**):

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

Voor functies van twee variabelen kunnen we net zo’n benadering van tweede orde nemen:

Voorbeeld: Kwadratische benadering

Bij een ‘nette’ functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y kunnen we functiewaarden rondom het punt $(x, y) = (a, b)$ benaderen via

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y \\ & + \frac{1}{2}(f_{xx}(a, b)\Delta x^2 + 2f_{xy}(a, b)\Delta x\Delta y + f_{yy}(a, b)\Delta y^2) \end{aligned}$$

met

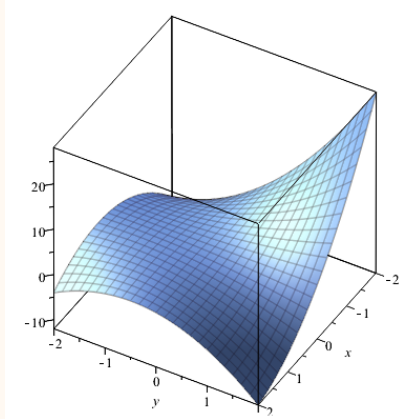
$$\Delta x = x - a \quad \text{en} \quad \Delta y = y - b.$$

Voorbeeld

We berekenen de kwadratische benadering rondom het punt $(1, 1)$ van de functie

$$f(x, y) = x^2y - xy^2 - 3xy.$$

De grafiek van de functie is



De benodigde partiële afgeleiden zijn

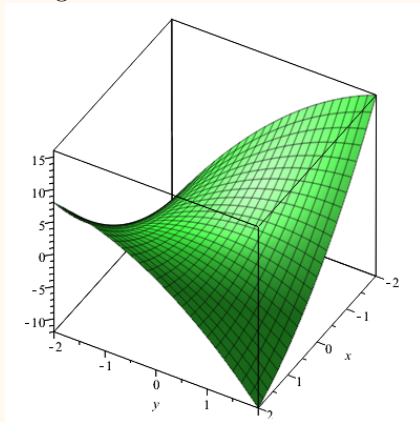
$$f_x(x, y) = 2xy - y^2 - 3y, \quad f_y(x, y) = x^2 - 2xy - 3x,$$

$$f_{xx}(x, y) = 2y, \quad f_{xy}(x, y) = 2x - 2y - 3 \quad \text{en} \quad f_{yy}(x, y) = -2x.$$

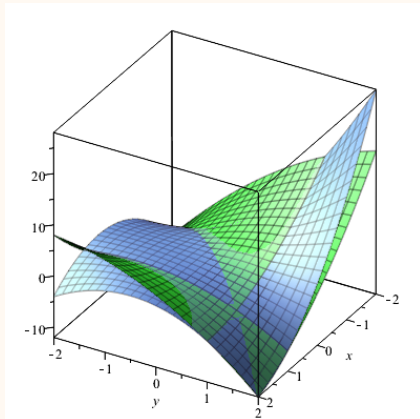
Invullen van de coördinaten van het punt (1, 1) in de partiële afgeleiden en in de algemene formule voor de kwadratische benadering geeft

$$\begin{aligned} z(x, y) &= -3 - 2(x - 1) - 4(y - 1) + (x - 1)^2 - 3(x - 1)(y - 1) - (y - 1)^2 \\ &= -x + y + x^2 - 3xy - y^2 \end{aligned}$$

De grafiek van deze benadering is



Samen in één figuur ziet het er uit als



In de buurt van $(1, 1)$ verschillen de functie en de Taylorbenadering niet veel; verder weg wel.

De lineaire en kwadratische benaderingen van functies van twee variabelen zijn afkomstig van de **Stelling van Taylor van eerste en tweede orde**.

Voorbeeld: Stelling van Taylor van eerste orde

Bij een ‘nette’ functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y geldt rondom het punt $(x, y) = (a, b)$ met $\Delta x = x - a$ en $\Delta y = y - b$:

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + R_1(x, y)$$

met restterm $R_1(x, y)$ gegeven door

$$R_1(x, y) = \frac{1}{2!}(f_{xx}(\xi, \eta)\Delta x^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)\Delta x\Delta y + f_{yy}(\xi, \eta)\Delta y^2)$$

voor zekere ξ tussen a en x , en zekere η tussen b en y .

Voorbeeld: Stelling van Taylor van tweede orde

Bij een ‘nette’ functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y geldt rondom het punt $(x, y) = (a, b)$ met $\Delta x = x - a$ en $\Delta y = y - b$:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) \\ & + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y \\ & + \frac{1}{2!}(f_{xx}(a, b)\Delta x^2 + 2f_{xy}(a, b)\Delta x\Delta y + f_{yy}(a, b)\Delta y^2) + R_2(x, y) \end{aligned}$$

met restterm $R_2(x, y)$ gegeven door

$$\begin{aligned} R_2(x, y) = & \frac{1}{3!}(f_{xxx}(\xi, \eta)\Delta x^3 + 3f_{xxy}(\xi, \eta)\Delta x^2\Delta y \\ & + 3f_{xyy}(\xi, \eta)\Delta x\Delta y^2 + f_{yyy}(\xi, \eta)\Delta y^3) \end{aligned}$$

voor zekere ξ tussen a en x , en zekere η tussen b en y .

Je kunt nog verder gaan, maar we laten het hierbij. De **Taylorreeks** bij functies van twee variabelen ziet er als volgt uit:

Voorbeeld: Taylorreeks

Bij een ‘nette’ functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y kunnen we functiewaarden

rondom het punt $(x, y) = (a, b)$ benaderen via

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) \\ & + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y \\ & + \frac{1}{2!}(f_{xx}(a, b)\Delta x^2 + 2f_{xy}(a, b)\Delta x\Delta y + f_{yy}(a, b)\Delta y^2) \\ & + \frac{1}{3!}(f_{xxx}(a, b)\Delta x^3 + 3f_{xxy}(a, b)\Delta x^2\Delta y \\ & \quad + 3f_{xyy}(a, b)\Delta x\Delta y^2 + f_{yyy}(a, b)\Delta y^3) \\ & + \dots \end{aligned}$$

met

$$\Delta x = x - a \quad \text{en} \quad \Delta y = y - b.$$

Opgaven: Berekenen van een kwadratische benadering

Vraag 1

Bereken de tweede orde benadering $z(x, y)$ van de functie

$$f(x, y) = x \sin(y)$$

rondom het punt $(1, 0)$.

$$z(x, y) = \dots\dots\dots$$

Theorie: Foutenleer

Stel x en y zijn twee grootheden die niet van elkaar afhangen en onafhankelijk gemeten worden, zeg met meetwaarden x_m en y_m , en met meetfouten Δx en Δy . Stel dat je een samengestelde grootheid $z = x \cdot y$ nodig hebt. Wat zal de fout in z dan zijn? De linearisatie van $z(x \cdot y)$ speelt een rol bij het beantwoorden van deze vraag. Immers,

$$\begin{aligned} z(x_m + \Delta x, y_m + \Delta y) &\approx z(x_m, y_m) + z_x(x_m, y_m)\Delta x + z_y(x_m, y_m)\Delta y \\ &= z(x_m, y_m) + y_m\Delta x + x_m\Delta y \end{aligned}$$

Anders geformuleerd:

$$\frac{\Delta z}{z(x_m, y_m)} = \frac{\Delta x}{x_m} + \frac{\Delta y}{y_m}$$

Omdat niet het teken maar de grootte van de fout van belang is, suggereert dit het volgende:

Bij vermenigvuldigen wordt de relatieve fout in de uitkomst de som van de relatieve fouten in de factoren.

Nu kijken we eens naar het quotiënt $z(x, y) = \frac{x}{y}$ van grootheden. Nu geldt via de totale differentiaal:

$$\begin{aligned}\Delta z(x_m, y_m) &\approx z_x(x_m, y_m)\Delta x + z_y(x_m, y_m)\Delta y \\ &= \frac{\Delta x}{y_m} - \frac{x_m \Delta y}{y_m^2} \\ &= \frac{x_m}{y_m} \left(\frac{\Delta x}{x_m} - \frac{\Delta y}{y_m} \right)\end{aligned}$$

oftewel

$$\frac{\Delta z}{z(x_m, y_m)} = \frac{\Delta x}{x_m} - \frac{\Delta y}{y_m}$$

Omdat niet het teken maar de grootte van de fout van belang is, suggereert dit het volgende:

Bij delen wordt de relatieve fout in de uitkomst de som van de relatieve fouten in de teller en noemer.

We hebben tot nu toe geschreven dat de totale differentiaal de regels voor de doorwerking van fouten in formules suggereert. Dit komt omdat we geen rekening houden met het teken van fouten. Doen we dat wel dan light het voor de hand om kwadraten van afwijkingen te bestuderen. We kijken dan naar $(\Delta z)^2$ en we gaan in bovenstaande twee gevallen over op het ‘kwadratisch optellen’ van relatieve fouten. Dit geeft:

Regel

Bij optellen en aftrekken wordt het kwadraat van de absolute fout in de uitkomst de som van de kwadraten van de absolute fouten in de termen.

Bij vermenigvuldigen en delen wordt het kwadraat van relatieve fout in de uitkomst de som van de kwadraten van de relatieve fouten in de factoren.

Opgaven: Schatten van een fout

Vraag 1

Stel dat je drie grootheden x , y en z meet en de samengestelde grootheid $w = ax + by - cz$, met a , b en c nodig hebt. Stel dat je metingen $x_m \pm \Delta x$, $y_m \pm \Delta y$ en $z_m \pm \Delta z$ hebt. Wat is dan de foutschatting van w ?

Noteer de fouten als differentiaal, dus dx in plaats van Δx , enzovoorts.

$dw = \dots\dots\dots$

Theorie: Richtingsafgeleide

De partiële afgeleide $f_x(a, b)$ van $f(x, y)$ is de afgeleide van $f(x, y)$ in (a, b) in de richting van de positieve x -as. Net zo is $f_y(a, b)$ de afgeleide van $f(x, y)$ in (a, b) in de richting van de positieve y -as. We kunnen ook in een willekeurige richting in het raakvlak aan de grafiek in $(a, b, f(a, b))$ kijken; als we dan een vector met lengte 1 willen, dan komen we uit op de volgende definitie.

Definitie

De **richtingsafgeleide** van $f(x, y)$ in (a, b) in de richting van $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ is

$$\frac{f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Theorie: De gradiënt

Definitie

De gradiënt van de functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y , genoteerd als $\nabla f(x, y)$ en uit te spreken als ‘nabla’, is de vector van partiële afgeleiden

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

Bereken het gradiënt van de functie

$$f(x, y) = 4y - 2x^2$$

in $(0, 1)$.

Uitwerking: We berekenen eerst de partiële afgeleiden:

$$f_x(x, y) = -4x \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = 4$$

Dus in het gegeven punt:

$$f_x(0, 1) = 0 \quad \text{en} \quad f_y(0, 1) = 4$$

Dus is de gradiënt van $f(x, y)$ in $(0, 1)$ gelijk aan de volgende vector

$$\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De betekenis van de gradiënt wordt duidelijk wanneer we ons realiseren dat dit de vector is zodanig dat het inproduct met de richtingsvector $\mathbf{dx} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ in het raakvlak van f in het punt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ gelijk is aan de totale differentiaal in (x_0, y_0) . Dus:

$$df(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{dx}$$

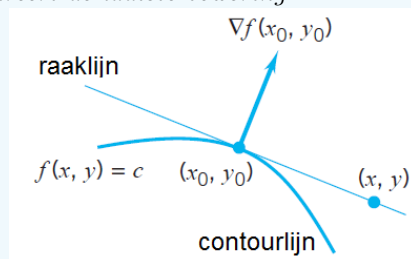
Veronderstel nu dat de richtingsvector $\mathbf{dx}$ een constante lengte heeft. dan is de totale differentiaal maximaal wanneer de richtingsvector dezelfde richting heeft als de gradiënt. Evenzo is de totale differentiaal minimaal in de richting tegengesteld aan de gradiënt. De totale differentiaal is gelijk aan 0 dan en slechts dan als de gradiënt loodrecht op de richtingsvector staat, die hoort bij een projectie van een niveaulijn door het punt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ op het xy -vlak. Dus:

Regel

De gradiënt in een punt in het xy -vlak geeft de (geprojecteerde) richting aan waarin de functie f in het punt $(x, y, f(x, y))$ het sterkst toeneemt.

De gradiënt staat loodrecht op de contourlijn van $f(x, y)$ door dat punt. De gradiënt is een normaalvector van de raaklijn in dat punt aan die contourlijn.

Onderstaande figuur illustreert de laatste bewering



De vergelijking van de raaklijn is

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

Dus:

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Voorbeeld

We berekenen een vergelijking van de raaklijn aan de ellips

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

in het punt $(2, 1)$. Merk op dat de ellips een contourlijn is van de functie

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2.$$

De partiële afgeleiden van $f(x, y)$ zijn

$$f_x(x, y) = \frac{x}{2} \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = 2y$$

De gradiënt van f in $(2, 1)$ is

$$\nabla f(2, 1) = \begin{pmatrix} f_x(2, 1) \\ f_y(2, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De raaklijn aan de ellips in $(2, 1)$ bestaat uit punten (x, y) zodanig dat

$$\nabla f(2, 1) \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dus:

$$1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1) = 0$$

oftewel

$$x + 2y - 4 = 0$$

Ook bij functies van drie of meer variabelen kun je de gradiënt op analoge wijze introduceren als vector van partiële afgeleiden. Bijvoorbeeld voor functies $f(x, y, z)$ van drie variabelen is het de vector

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Opgaven: Berekenen van een gradiënt

Vraag 1

Bereken het gradiënt van de functie

$$f(x, y) = x^2y + 3xy + 3x^2$$

in $(-1, 1)$.

Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$$\nabla f(-1, 1) = \dots\dots\dots$$

Vraag 2

Bereken het gradiënt van de functie

$$f(x, y) = -5y + x^2 - 3x$$

in $(1, 0)$.

Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$$\nabla f(1, 0) = \dots\dots\dots$$

Vraag 3

Bereken het gradiënt van de functie

$$f(x, y) = x^2y - xy + 4x^2$$

in $(1, 1)$.

Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$$\nabla f(1, 1) = \dots\dots\dots$$

Theorie: Inleiding

Voorbeeld: Repetitie van bijzondere punten van functies van één veranderlijke

De begrippen stationair punt, maximum en minimum kennen we al voor functies van één variabele. De functie $f(x)$ heeft een lokaal minimum in $x = a$ als de grafiek in de buurt van $x = a$ boven $f(a)$ ligt, preciezer gezegd, als er een interval I om a is zodanig dat $f(x) \geq f(a)$ voor alle x uit I .

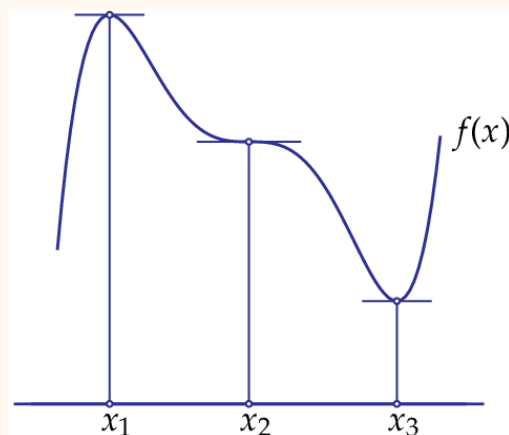
Bij een differentieerbare functie $f(x)$ is een minimum (of maximum) steeds een stationair punt, dat wil zeggen een punt $x = a$ waarin de raaklijn van f horizontaal is, oftewel $f'(a) = 0$. Een voldoende voorwaarde voor een minimum van $f(x)$ in $x = a$ is het tweede afgeleide criterium: Als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$, dan heeft $f(x)$ een lokaal minimum in $x = a$.

Met een Taylorbenadering van tweede orde rondom $x = a$ kunnen we dit als volgt begrijpen: als $x = a$ een stationair punt is, dan is de Taylorveelterm van graad 2 rondom $x = a$ gelijk aan

$$f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2.$$

In de buurt van $x = a$ ziet de functie er dus uit als een dalparabool met minimum $x = a$ als $f''(a) > 0$. In het geval $f''(a) < 0$, dan hebben we te maken met een bergparabool met maximum in $x = a$.

Als $f'(a) = 0$ en $f''(a) = 0$ dan kun je nog niet concluderen wat voor een stationair punt $x = a$ is: het kan een maximum of minimum zijn, maar het kan ook nog een buigpunt zijn, d.w.z. een punt waarin de afgeleide functie een maximum of minimum aanneemt. Onderstaande figuur illustreert de drie verschillende stationaire punten van een functie van één variabele.



Voor functies van twee of meer variabelen kunnen we een soortgelijke analyse opzetten, maar deze is zelfs voor functies van twee variabelen al gecompliceerder dan je misschien denkt.

Definitie

Bij een differentieerbare functie f van twee of meer variabelen heet een punt een **stationair punt** van f als de gradiënt van f daar de nulvector is, met andere woorden, als alle partiële afgeleiden nul zijn in dat punt.

Bij een functie $f(x, y)$ van twee variabelen is voor een stationair punt (a, b) het raakvlak aan de grafiek in $(a, b, f(a, b))$ horizontaal. Immers, de normaalvector van een raakvlak in het punt $(a, b, f(a, b))$ is dan verticaal omdat de algemene formule voor de normaalvector van dit raakvlak

gegeven is door

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -f_x(a, b) \\ -f_y(a, b) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor een stationair punt (a, b) is de linearisatie van de functie (oftewel de Taylorbenadering van eerste orde) de constante functie $f(a, b)$.

In het vervolg zullen we ons in de analyse van functies van meer variabelen beperken tot functies van twee variabelen.

Theorie: Stationaire punten

Een punt (a, b) is een stationair punt van de functie $f(x, y)$ als de gradiënt ∇f in dat punt de nulvector is. Dit betekent dat alle partiële afgeleiden in dit punt gelijk aan nul zijn en het raakvlak aan de grafiek in $(a, b, f(a, b))$ horizontaal is.

Stationaire punten kun je dus vinden door het volgende stelsel van vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld

Bereken het stationaire punt van de functie $f(x, y) = x^2 + xy - x + 3y + 4$.
Uitwerking: De partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x, y) = 2x + y - 1 \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = x + 3$$

De stationaire punten zijn dus de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$$

Er is maar één oplossing: $x = -3$ en dit geeft bij substitutie in de eerste vergelijking $2 \times -3 + y - 1 = 0$ en dus $y = 2 \times 3 + 1 = 7$.

Er is dus één stationair punt: $(-3, 7)$.

Voorbeeld

Bereken de stationaire punten van de functie

$$f(x, y) = 3x^2y + xy^2 - 3xy$$

De partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x, y) = 6xy + y^2 - 3y \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = 3x^2 + 2xy - 3x$$

De stationaire punten zijn dus de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 6xy + y^2 - 3y = 0 \\ 3x^2 + 2xy - 3x = 0 \end{cases}$$

We splitsen dit probleem op in deelproblemen door de linkerleden van de vergelijkingen te ontbinden in factoren. We vinden:

$$\begin{cases} y(6x + y - 3) = 0 \\ x(3x + 2y - 3) = 0 \end{cases}$$

We kunnen dus kennelijk $f_x(x, y)$ en $f_y(x, y)$ elk op twee manieren gelijk aan nul krijgen. Combinatie van mogelijkheden geeft vier oplossingen:

$$\bullet \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x = 0 \\ 6x + y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} 6x + y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -3y + 3 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Er zijn dus vier stationaire punten: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 3)$ en $(\frac{1}{3}, 1)$.

Opgaven: Berekenen van stationaire punten

Vraag 1

Bereken het stationaire punt van de functie $f(x, y) = x^2 + xy + 4x + 4y + 7$.
Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$[x, y] = \dots\dots\dots$

Vraag 2

Bereken het stationaire punt van de functie

$$f(x, y) = 2xy + 2y - x^2 + 4x - 1$$

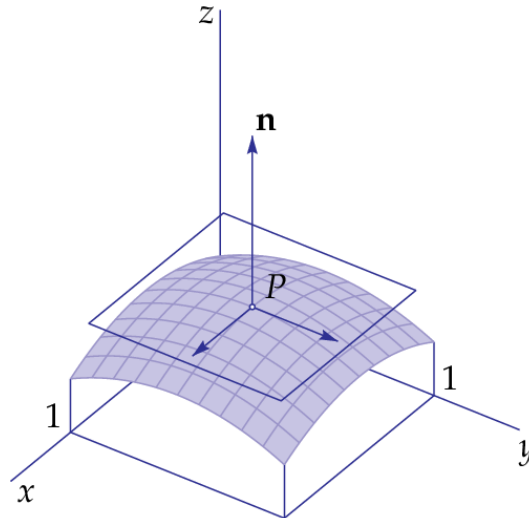
Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$[x, y] = \dots\dots\dots$

Theorie: Maximum, minimum en zadelpunt

Hieronder zie je de grafiek van de functie

$$f(x, y) = \frac{1}{2}((1 - (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2)$$



Deze functie heeft als partiële afgeleiden:

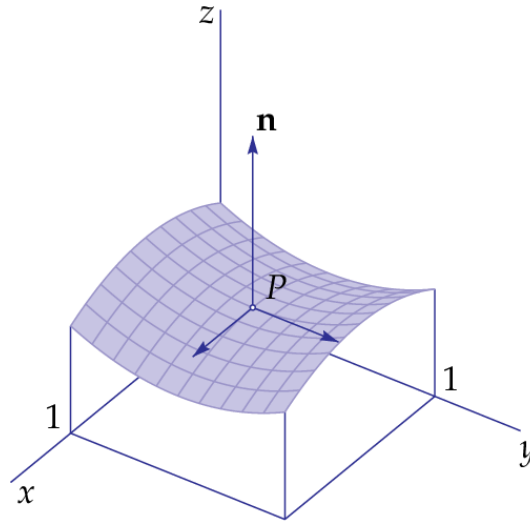
$$f_x(x, y) = \frac{1}{2} - x \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = \frac{1}{2} - y$$

In het punt $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ zijn beide afgeleiden nul en is het raakvlak horizontaal. Dit punt is een stationair punt en de functie heeft daar een maximale waarde.

Maar net als bij functies van één veranderlijke is voor differentieerbare functies van twee variabelen de eis dat een punt een stationair punt is noodzakelijk maar niet voldoende om een punt tot maximum of minimum uit te roepen. We geven een tegenvoorbeeld.

Hieronder zie je de grafiek van de functie

$$f(x, y) = \frac{1}{2}((1 - (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2)$$



Deze functie heeft als partiële afgeleiden:

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2} - x \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = y - \frac{1}{2}$$

In het punt $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ zijn beide afgeleiden weer nul en is het raakvlak horizontaal. Maar de coördinatenlijn is in de richting van de x -as een bergparabool, en de coördinatenlijn is in de richting van de y -as een dalparabool. Zo'n punt wordt een **zadelpunt** genoemd.

Definitie

Meer algemeen zeggen we dat de differentieerbare functie $f(x, y)$ een **zadelpunt** (a, b) heeft als het punt een stationair punt is, maar in de omgeving van het punt altijd punten (x, y) te vinden zijn zodanig dat $f(x, y) > f(a, b)$ én punten te vinden zijn zodanig dat $f(x, y) < f(a, b)$. Losjes gezegd is een zadelpunt het tweedimensionale analogon van een buigpunt bij een functie van één variabele.

Tot nu toe waren stationaire punten steeds één of meer losse punten. Maar dit hoeft niet zo te zijn. Als voorbeeld nemen we de functie

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1))$$

Deze functie heeft als partiële afgeleiden:

$$f_x(x, y) = -2x \cos(2x^2 - y - 1) \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = \frac{1}{2} \cos(2x^2 - y - 1)$$

De gradiënt is de nulvector in alle punten waarvoor geldt

$$\cos(2x^2 - y - 1) = 0$$

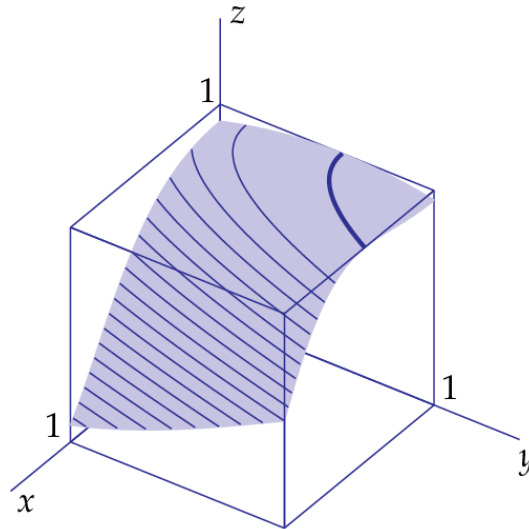
Stationaire punten zijn in dit geval geen geïsoleerde punten, maar punten die krommen vormen, namelijk de parabolen

$$2x^2 - y - 1 = \frac{1}{2}\pi + k\pi \quad \text{met geheel getal } k$$

Een van die parabolen is

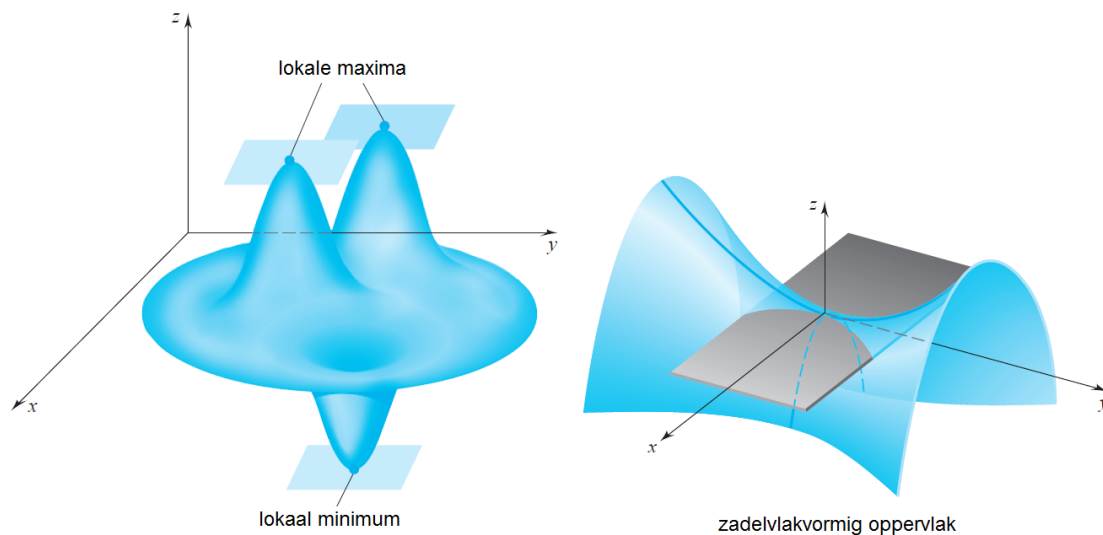
$$y = 2x^2 - 1 - \frac{1}{2}\pi$$

die hoort bij de niveaulijn op hoogte 1 is in onderstaande grafiek dikker getekend. In alle punten van die parabool bereikt de functie een maximale waarde. Het bijbehorende raakvlak is het vlak $z = 1$, het bovenvlak van de kubus die eromheen is getekend.



Theorie: Criteria voor extrema en zadelpunt

Onderstaande figuur illustreert het bestaan van lokale extrema en zadelpunten bij functies van twee variabelen.



Net als bij functies van één variabele willen we graag goed hanteerbare criteria hebben om het karakter van een stationair punt te kunnen bepalen. Hiervoor kijken we naar de Taylorbenadering van tweede orde van $f(x, y)$ rondom een stationair punt (a, b) . Bij een 'nette' functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y hebben we al gezien dat we functiewaarden rondom het punt $(x, y) = (a, b)$ kunnen benaderen via

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \frac{1}{2}(f_{xx}(a, b)\Delta x^2 + 2f_{xy}(a, b)\Delta x\Delta y + f_{yy}(a, b)\Delta y^2)$$

met

$$\Delta x = x - a \quad \text{en} \quad \Delta y = y - b.$$

In het geval van een stationair punt vereenvoudigt dit tot

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{1}{2}(f_{xx}(a, b)\Delta x^2 + 2f_{xy}(a, b)\Delta x\Delta y + f_{yy}(a, b)\Delta y^2)$$

Het gedrag van de tweede orde benadering van $f(x, y)$ rondom het stationaire punt (a, b) wordt dus bepaald door de kwadratische functie

$$h(\Delta x, \Delta y) = f_{xx}(a, b)\Delta x^2 + 2f_{xy}(a, b)\Delta x\Delta y + f_{yy}(a, b)\Delta y^2$$

- Als $h(\Delta x, \Delta y)$ buiten $(0, 0)$ alleen positieve waarden aanneemt, dan is (a, b) een lokaal minimum van de functie $f(x, y)$.
- Als $h(\Delta x, \Delta y)$ buiten $(0, 0)$ alleen negatieve waarden aanneemt, dan is (a, b) een lokaal maximum van de functie $f(x, y)$.
- Als $h(\Delta x, \Delta y)$ buiten $(0, 0)$ zowel positieve als negatieve waarden aanneemt, dan heeft de functie $f(x, y)$ een zadelpunt in (a, b) .

Het verloop van $h(x, y)$ is nauw verbonden met de determinant van de **Hesse matrix** gedefinieerd als

$$\text{Hesse matrix van } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

en uitgerekend in (a, b) . De determinant van de Hesse matrix heet de **discriminant** of **Hessiaan van** $f(x, y)$. We noteren

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

en het verband met $h(\Delta x, \Delta y)$ is (via kwadraatafsplitsen):

$$h(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{f_{xx}(a, b)} \left((f_{xx}(a, b)\Delta x + f_{xy}(a, b)\Delta y)^2 + \Delta y^2 \cdot H(a, b) \right)$$

We kunnen hieruit het volgende criterium destilleren:

Voorbeeld: Partiële-afgeleiden-test voor een lokaal extremum of zadelpunt

Voor een 'nette' functie $f(x, y)$ en een stationair punt (a, b) geldt:

- Als $H(a, b) > 0$ en $f_{xx}(a, b) > 0$, dan is (a, b) een lokaal minimum van de functie $f(x, y)$.
- Als $H(a, b) > 0$ en $f_{xx}(a, b) < 0$, dan is (a, b) een lokaal maximum van de functie $f(x, y)$.
- Als $H(a, b) < 0$, dan heeft de functie $f(x, y)$ een zadelpunt in (a, b) .

waarbij

$$H(a, b) = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

Voorbeeld

We bekijken opnieuw de functie

$$f(x, y) = 3x^2y + xy^2 - 3xy$$

De partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x, y) = 6xy + y^2 - 3y \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = 3x^2 + 2xy - 3x$$

De stationaire punten zijn dus de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 6xy + y^2 - 3y = 0 \\ 3x^2 + 2xy - 3x = 0 \end{cases}$$

We hebben dit probleem al eerder opgelost: Er zijn dus vier stationaire punten: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 3)$ en $(\frac{1}{3}, 1)$. We kijken nu naar de aard van deze stationaire punten.

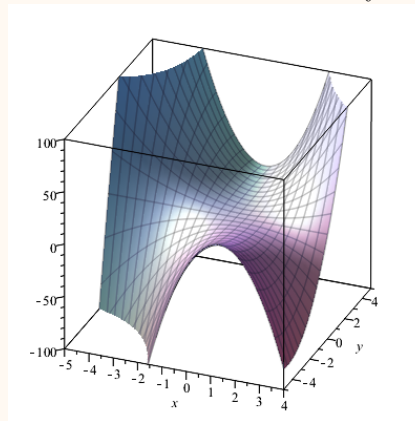
We bereken eerst de partiële afgeleiden van tweede orde:

$$f_{xx}(x, y) = 6y, \quad f_{xy}(x, y) = 6x + 2y - 3, \quad f_{yy}(x, y) = 2x.$$

Met het volgende schema kunnen we uitspraken over de stationaire punten doen

(a, b)	$f_{xx}(a, b)$	$f_{xy}(a, b)$	$f_{yy}(a, b)$	$H(a, b)$	conclusie
$(0, 0)$	0	-3	0	-9	zadelpunt
$(1, 0)$	0	3	2	-9	zadelpunt
$(0, 3)$	18	3	0	-9	zadelpunt
$(\frac{1}{3}, 1)$	6	1	$\frac{2}{3}$	3	minimum

Onderstaande grafiek van de functie illustreert deze analyse



Opgaven: Karakteriseren van een stationair punt

Vraag 1.1

Bereken het stationaire punt van de functie

$$f(x, y) = -2y^2 + 2xy + 2y + 3x^2 + 3x$$

Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$[x, y] = \dots\dots\dots$

Vraag 1.2

We bekijken de functie

$$f(x, y) = -2y^2 + 2xy + 2y + 3x^2 + 3x$$

We hebben al het stationaire punt (a, b) bepaald: het is namelijk gegeven door

$$(a, b) = \left(-\frac{4}{7}, \frac{3}{14}\right)$$

In dit onderdeel bepaal je de aard van het stationaire punt via de partiële-afgeleiden-test.

Bereken de Hessiaan

$$H(a, b) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

Gebruik dit resultaat om de aard van het stationaire punt te bepalen.

$$H\left(-\frac{4}{7}, \frac{3}{14}\right) = \dots\dots\dots$$

$\left(-\frac{4}{7}, \frac{3}{14}\right)$ is een $\dots\dots\dots$ (toets in het woord *minimum*, *maximum*, *zadelpunt*, *onbekend*)

Vraag 2.1

Bereken het stationaire punt van de functie

$$f(x, y) = y^2 + xy + y + 3x^2 + 3x$$

Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$[x, y] = \dots\dots\dots$

Vraag 2.2

We bekijken de functie

$$f(x, y) = y^2 + xy + y + 3x^2 + 3x$$

We hebben al het stationaire punt (a, b) bepaald: het is namelijk gegeven door

$$(a, b) = \left(-\frac{5}{11}, -\frac{3}{11}\right)$$

In dit onderdeel bepaal je de aard van het stationaire punt via de partiële-afgeleiden-test.

Bereken de Hessiaan

$$H(a, b) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

Gebruik dit resultaat om de aard van het stationaire punt te bepalen.

$$H\left(-\frac{5}{11}, -\frac{3}{11}\right) = \dots\dots\dots$$

$\left(-\frac{5}{11}, -\frac{3}{11}\right)$ is een $\dots\dots\dots$ (toets in het woord *minimum*, *maximum*, *zadelpunt*, *onbekend*)

Theorie: Numerieke partiële afgeleiden

In het afgelopen hoofdstuk hebben we gezien dat de gradiënt als volgt gedefinieerd is:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

We moeten dus de partiele afgeleiden f_x en f_y kennen om de gradiënt te bepalen. Deze zijn als volgt in termen van limieten te definiëren:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Met andere woorden, voor kleine stapgrootte h geldt de volgende voorwaartse differentie:

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) \approx \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

We kunnen de gradient dus numeriek benaderen door bovenstaande limieten voor f_x en f_y te benaderen. Dit benaderen kunnen we bijvoorbeeld doen door in bovenstaande expressies hele kleine waarden voor h in te vullen.

Dit lijkt heel sterk op het numeriek differentiëren van functies van één veranderlijke. Er zijn dan ook betere benaderingsmethoden; denk aan de centrale 3-punts differentieformule voor de afgeleide. Dit geeft:

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h}$$

$$f_y(x, y) \approx \frac{f(x, y+h) - f(x, y-h)}{2h}$$

We kunnen ook afgeleiden van tweede orde benaderen. Kijkend naar de centrale 3-punts differentieformules voor de tweede afgeleide van een functie van één veranderlijke kunnen we zo opschrijven voor kleine stappen h en k in de x - respectievelijk y - richting:

$$f_{xx}(x, y) \approx \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x, y) \approx \frac{f(x, y+k) - 2f(x, y) + f(x, y-k)}{k^2}$$

Bij een gemengde partiële afgeleide hoeft de stapgrootte in de ene richting niet per definitie gelijk te zijn aan de stapgrootte in de andere richting. We krijgen voor kleine h en k :

$$f_{xy}(x, y) \approx \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y-k) - f(x-h, y+k) + f(x-h, y-k)}{4hk}$$

Theorie: Numerieke partiële afgeleiden in digitale foto's

Een digitale zwart-wit foto kunnen we zien als een functie $f(x, y)$ in twee variabelen, waarbij iedere pixel ("picture element") in (x_0, y_0) in een foto een bijbehorende grijswaarde $f(x_0, y_0)$ heeft. Het enige waar je misschien nog op bedacht moet zijn is dat het coördinatensysteem anders is dan gebruikelijk in wiskunde: de oorsprong bevindt zich in een foto vaak in de linkerbovenhoek, de positieve x -richting is naar rechts, maar de positieve y -richting is verticaal naar beneden (zie onderstaande figuur met een foto die we vaker gaan gebruiken). De reden van de afwijkende richtingen is dat de pixelwaarden nu mooi in een matrix, zeg I , opgeslagen kunnen worden, maar de consequentie van deze keuze is wel dat de eerste index in de matrix naar een y -coördinaat verwijst en de tweede index in de matrix naar een x coördinaat verwijst. Bij discretisatie van de xy -coördinaten tot gehele getallen (door de pixel breedte en hoogte als eenheid van lengte te kiezen en het digitale beeld als een rechthoekig rooster van grijsgetinte hokjes te beschouwen) hebben we dus $f(i, j) = I_{ji}$, waarbij I de matrix is bij het digitale beeld. Deze keuze is ook in het opencv systeem gemaakt. Onderstaande figuur illustreert hoe de indexering van de matrix bij de digitale foto afwijkt van de pixelcoördinaten x, y :

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0)
1	(0,1)		(2,1)					
2	(0,2)			(3,2)				(7,2)

In onderstaande uiteenzetting werken we met de discrete x - en y -coördinaten. Als men dit in code consistent wil doen zonder steeds zelf vertaalslagen te hoeven maken dan zijn de functie `getpixel(x,y)` uit de Python Image Library (PIL pakket) of de `Point` klasse uit opencv pakket

handige manieren om met deze coördinaten te werken en enkel te onthouden wat de x - en y richting in digitale foto's is.



Van de functie f die de grijswaarde van elk pixel beschrijft kunnen we de gradiënt bekijken (hoe dat gebeurt zullen we zien). Maar wat zegt deze gradiënt ons over het beeld op de foto?

Bij de randen van objecten binnen een foto vindt een grote verandering van grijswaarden plaats (we gaan immers van een object over in een ander object). Op deze randen zullen de partiële afgeleiden in absolute waarden groot zijn. Dus door plekken te bekijken waar de partiële afgeleiden in absolute waarden groot zijn kunnen we een goed idee krijgen over waar de randen van objecten binnen een foto zich bevinden. We zijn dus eigenlijk op zoek naar punten waar de lengte van de gradiënt (als vector) groot is.

Als we deze gradiënt numeriek willen benaderen kunnen we te werk gaan door de differentieformules voor de afgeleiden te gebruiken. Bij beeldbewerking wordt voor de stapgroottes in horizontale en verticale richting de breedte respectievelijk de hoogte als eenheid van lengte gebruikt en de stapjes in de differentieformules hebben lengte 1. De differentieformules worden dan:

$$f_x(i, j) \approx \frac{f(i+1, j) - f(i-1, j)}{2}$$

$$f_y(i, j) \approx \frac{f(i, j+1) - f(i, j-1)}{2}$$

We kunnen de partiële afgeleiden ook benaderen door middel van kruiscorrelatie, maar om verschillende redenen wordt in beeldbewerking de voorkeur gegeven aan convolutie. In veel tekstboeken maakt men zich niet zo druk over het teken of scalaire veelvouden van de partiële afgeleiden. Het gaat toch meestal om relatieve verschillen in functiewaarden en het teken of de precieze waarde doet er niet zo veel toe. Wij zullen voorlopig wel proberen het teken en de groote netjes te houden.

De definities van kruiscorrelatie en convolutie in twee dimensies zijn een generalisatie van de begrippen in één dimensie.

Voorbeeld: Definities

Bij twee 2-dimensionale tijdreeksen (met waarden geïndexeerd door twee gehele indices) $a_{m,n}$ en $b_{m,n}$ is de **kruiscorrelatie** $a \otimes b$ gedefinieerd door

$$(a \otimes b)_{m,n} = \sum_{k,l} a_{m+k,n+k} \cdot b_{k,l}$$

De **convolutie** $a * b$ is gedefinieerd door

$$(a \otimes b)_{m,n} = \sum_{k,l} a_{k,l} \cdot b_{m-k,n-l}$$

Als je de **geadjungeerde** van een 2-dimensionaal filter w noteert met $w(-)$ en definieert door de waarden te spiegelen in 0, dat wil zeggen, definieert door

$$w(-)_{m,n} = w_{-m,-n}$$

dan geldt:

$$a \otimes b = a * b(-)$$

Waar we in het 1-dimensionale geval eindige filters met vectoren als ‘filtermaskers’ konden beschrijven, gebruiken we in het 2-dimensionale geval matrices. Bijvoorbeeld, de partiële afgeleide in horizontale richting is in termen van kruiscorrelatie en convolutie als volgt te schrijven

$$\begin{aligned} f_x(i,j) &= \frac{1}{2} f \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} f * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De partiële afgeleide in verticale richting is in termen van kruiscorrelatie en convolutie als volgt

$$\begin{aligned} f_x(i,j) &= \frac{1}{2} f \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} f * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Je vraagt je misschien af waarom de extra nulrijen en nulkolommen toegevoegd zijn: je had toch net zo goed een enkele rij- en kolomvector kunnen gebruiken. Dat is waar, maar het bereid wel voor op de volgende Prewitt filters in horizontale en verticale richting:

$$Prewitt_x(f) = f * \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Prewitt_y(f) = f * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Het resultaat van convoluties van het **Prewitt filter** in de x -richting is dat we de partiële afgeleide naar x in een punt benaderen door de differentieformule voor partiële afgeleide in de naast gelegen burens ook toe te passen en dan te middelen. In het Prewitt filter is de factor $\frac{1}{6}$ voor het gemak weggelaten. Je krijgt dus eigenlijk een benadering van een veelvoud van de partiële afgeleide. Het voordeel is nu dat de invloed van ruis verminderd wordt doordat je meer pixels in de benadering van de partiële afgeleide in een punt meeneemt.

Bij Sobel filtering wordt de bijdrage van de naaste burens minder zwaar gewogen en gebruikt men de volgende **Sobel filters** in horizontale en verticale richting:

$$Sobel_x(f) = f * \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Sobel_y(f) = f * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld: Python voorbeeld van beeldbewerking

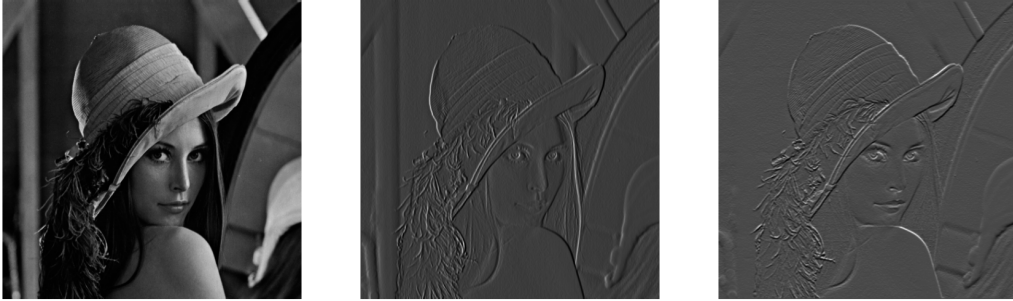
Laten we eens kijken hoe het Prewitt filter werkt in Python.

Nu we een beetje snappen hoe partiële afgeleiden in digitale beeldbewerking gebruikt worden, kunnen we ook in digitale foto's kijken naar de richting en grootte van een gradiënt.

```
>>> from scipy import ndimage
>>> from scipy import misc
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> import numpy as np
>>> beeld = misc.imread('lena.png', flatten=True)
>>> # Prewitt filter
>>> Px = np.array([[1,0,-1],[1,0,-1],[1,0,-1]])
>>> Py = np.array([[1,1,1],[0,0,0],[-1,-1,-1]])
>>> # convolutie met Prewitt filter
>>> convolutie_Px = ndimage.convolve(beeld, Px, cval=0.0)
>>> convolutie_Py = ndimage.convolve(beeld, Py, cval=0.0)
>>> # Toon foto's
>>> fig = plt.figure()
>>> fig.add_subplot(1,3,1)
>>> plt.axis('off')
>>> plt.imshow(beeld, cmap=plt.cm.gray)
>>> fig.add_subplot(1,3,2)
>>> plt.axis('off')
>>> plt.imshow(convolutie_Px, cmap=plt.cm.gray)
>>> fig.add_subplot(1,3,3)
>>> plt.axis('off')
>>> plt.imshow(convolutie_Py, cmap=plt.cm.gray)
>>> plt.show()
```

Her resultaat wordt hieronder getoond: van links naar recht zijn de originele foto, het resultaat van convolutie met het horizontale Prewitt filter en het resultaat van convolutie

met het verticale Prewitt filter. Dit laat duidelijk zien dat de oriëntatie van het Prewitt filter bepaalt welke sterke overgangen in grijsinten herkenbaar worden.



Theorie: Digitale foto's en gradiënt

We weten nu hoe we de gradiënt van een functie die een digitale foto beschrijft numeriek kunnen benaderen. We bekijken nu drie manieren die hiervan gebruik maken om randen van objecten te herkennen. Taak is om deze manieren in Python te implementeren.

Als **eerste Python opdracht** schrijf je code die de grootte van de gradiënt en de richting hiervan in een aantal punten van een digitale foto visualiseert. Bij de berekening van de gradiënt gebruik je Prewitt filtering voor berekening van de benodigde partiële afgeleiden. Doe dit ook in punten op randen van objecten. Staat jouw gradiënt dan inderdaad loodrecht op de randen?

Python hint: met de `annotate` functie uit de `matplotlib.pyplot` module kun je eenvoudig een paar vectoren tekenen. Met de `quiver` functie uit de `matplotlib.pyplot` module kun je eenvoudig gradiënten tekenen op een regelmatig rooster gegenereerd via de `meshgrid` functie uit het `numpy` pakket

Hierna kun je aan de slag met de drie besproken manieren van herkenning van randen van objecten in digitale foto's. Probeer de methode ook uit op een eigen selectie van foto's die inzicht kunnen geven in de effectiviteit van de verschillende manieren van randherkenning.

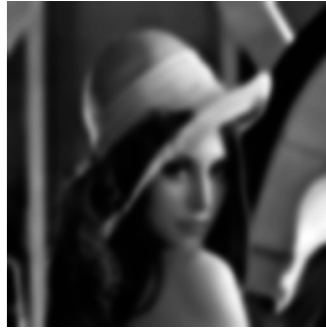
Python hint: gebruik de `scipy.ndimage` module voor het inlezen van digitale foto's en voor het uitrekenen van convoluties. Om met grijswaarden te kunnen rekenen zet je in de `imread` opdracht de optie `flatten=True`

De foto die we hier en in volgende opdrachten gebruiken staat om copyright redenen niet meer in `scipy`. Download de foto [hier](#).

Theorie: Manier 1: Gauss convolutie

Als we een foto met de discrete Gaussische klok-functie convolueren dan word deze foto geblurred, oftewel er ontstaan vlekken op de foto.

Als we na het blurren de originele foto ervan aftrekken dan krijgen we het volgende resultaat:



Theorie: Manier 2: Laplace operator

De Laplace operator ∇^2 , ook wel Laplaciaan genoemd, van een functie $f(x, y)$ van twee variabelen is de som van de tweede afgeleide van f in de x en y richting:

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

We hebben al gezien dat

$$f_{xx}(x, y) \approx \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x, y) \approx \frac{f(x, y+k) - 2f(x, y) + f(x, y-k)}{k^2}$$

Voor een digitale foto leest dit als:

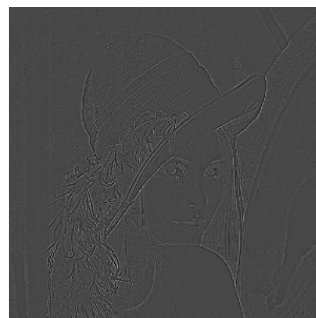
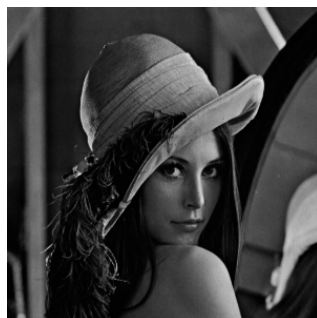
$$f_{xx}(i, j) \approx f(i+1, j) - 2f(i, j) + f(i-1, j)$$

$$f_{yy}(i, j) \approx f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i, j-1)$$

Voor een digitale foto kunnen we dus de Laplaciaan berekenen door convolutie met onderstaande matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Het resultaat bij toepassing op de voorbeeldfoto is dan als volgt:



Theorie: Manier 3: Sobel operator

De Sobel operator benadert de gradiënt door eerst de afgeleides in de x - en y -richting te benaderen aan de hand van convolutie en daarna deze te combineren tot een benadering van de gradiënt.

Hij bepaalt van een foto I de x - en y -afgeleides door de functie I te convolueren met

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad S_y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aan de hand van de benaderingen $I * S_x$ en $I * S_y$ kunnen we nu de lengte G van de gradiënt bepalen door middel van

$$G = \sqrt{(I * S_x)^2 + (I * S_y)^2}$$

Het resultaat ziet er dan op foto's van een Sudoku puzzel en Lena als volgt uit (van links naar rechts worden $I * S_x$, $I * S_y$ en G als plaatje getoont):

