

Robin Wacanno (11741163)
Overlegd met Folkert van Verseveld.

Antwoorden

1. a)

Oplossing: Volgens het boek (p.17): *De norm van een programmaobject X is het aantal instructies in X .*

$norm$ van $X = 4$

$norm$ van $Y = \infty$, want $!^\omega$ kan oneindig vaak worden uitgevouwen

b)

Oplossing: Volgens het boek (p.17): *Definieer $i_n(X)$ als de operator die de n -de instructie van een programmeerobject X*

Voor de primitieve instructie u geldt:

$$\begin{aligned} i_1 &= u, \\ i_1(u; X) &= u, \\ i_{n+1}(u) &= \#0, \\ i_{n+1}(u; X) &= i_n(X) \end{aligned}$$

$$i_k(X) = \begin{cases} -b & \text{als } i = 1, \\ \#2 & \text{als } i = 2, \\ a & \text{als } i = 3, \\ \#11 & \text{als } i = 4, \\ \#0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$i_k(Y) = \begin{cases} +c & \text{als } i = 1, \\ ! & \text{als } i = 2, \\ \#11 & \text{als } i = 3, \\ \#! & \text{als } i > 3, \end{cases}$$

2. Volgens het boek geldt:

Een programma-object X is in de eerste canonieke vorm als het van een van de volgende vormen is:

$$X = Y \quad \text{en } Y \text{ is zonder repetitie, of} \quad (1)$$

$$X = Y; Z^\omega \quad \text{en } Y \text{ en } Z \text{ zijn zonder repetitie} \quad (2)$$

Een programma-object X is van de tweede canonieke vorm als het in de eerste canonieke vorm is; het object geen geschakelde sprongen bevat en de teller van iedere sprong naar het herhalende deel van de expressie zo klein mogelijk is.

Voor objecten X en Y geldt dat $X =_{ic} Y$ als zij een vorm X' en Y' kennen die ter herleiden is met behulp van PGA1-4 waarvoor geldt dat $i_n(X') = i_n(Y')$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

Voor objecten X en Y geldt dat $X =_{sc} Y$ als zij een vorm X' en Y' kennen die ter herleiden is met behulp van PGA1-8 waarvoor geldt dat $i_n(X') = i_n(Y')$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

De volgende oplossingen maken gebruik van PGA1-8 zoals beschreven in het boek.

a)

Neem $X = !; \#12; +b; (c; \#2; -a)^\omega$ en $Y = !; \#3; +b; c; (\#2; -a; c)^\omega$.

Oplossing:

Eerste canonieke vorm

Zowel X als Y zijn reeds in de eerste canonieke vorm, omdat zij van de tweede bovengenoemde vorm zijn ($X = Y; Z^\omega$ en Y en Z zijn zonder repetitie).

$$\left. \begin{array}{l} i_2(X) = \#12 \\ i_2(Y) = \#3 \end{array} \right\} \#12 \neq \#3, \text{ dus } X \text{ en } Y \text{ zijn niet instructierij-congruent}$$

Tweede *minimale* canonieke vorm

Laat X_2 en Y_2 de minimale tweede canonieke vorm van respectievelijk X en Y zijn.

$$\begin{aligned} !; \#12; +b; (c; \#2; -a)^\omega &= !; \#12; +b; (c; \#2; -a)^\omega && \text{(PGA8)} \\ &= !; \#9; +b; (c; \#2; -a)^\omega && \text{(PGA8)} \\ &= !; \#6; +b; (c; \#2; -a)^\omega && \text{(PGA8)} \\ &= !; \#3; +b; (c; \#2; -a)^\omega && \text{(PGA8)} \\ &= !; \#5; +b; (c; \#2; -a)^\omega && \text{(PGA6)} \\ &= !; \#2; +b; (c; \#2; -a)^\omega = X_2 && \text{(PGA8)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} !; \#3; +b; c; (\#2; -a; c)^\omega &= !; \#5; +b; c; (\#2; -a; c)^\omega && \text{(PGA6)} \\ &= !; \#5; +b; (c; \#2; -a)^\omega && \text{(PGA4)} \\ &= !; \#2; +b; (c; \#2; -a)^\omega = Y_2 && \text{(PGA8)} \end{aligned}$$

$$i_n(X_2) = i_n(Y_2) \text{ voor alle } n \in \mathbb{Z}, \text{ dus } X =_{sc} Y.$$

b)

Neem $X = a; -c; \#3; (a; c)^\omega$ en $Y = -c; \#3; (a; c; a)^\omega$.

Oplossing:**Eerste canonieke vorm**

Zowel X als Y zijn reeds in de eerste canonieke vorm, omdat zij van de tweede bovengenoemde vorm zijn ($X = Y; Z^\omega$ en Y en Z zijn zonder repetitie).

$$\left. \begin{array}{l} i_1(X) = \#a \\ i_1(Y) = \# - c \end{array} \right\} a \neq -c, \text{ dus } X \text{ en } Y \text{ zijn niet instructierij-congruent}$$

Tweede minimale canonieke vorm

Laat X_2 de minimale tweede canonieke vorm van X zijn. Y is reeds in de minimale tweede canonieke vorm.

$$a; -c; \#3; (a; c)^\omega = a; -c; \#1; (a; c)^\omega = X_2 \quad (\text{PGA6})$$

$$\left. \begin{array}{l} i_1(X_2) = a \\ i_1(Y) = -c \end{array} \right\} a \neq -c, \text{ dus } X \text{ en } Y \text{ zijn niet gedragscongruent}$$

c)

Neem $X = b; (c; \#2; (c; \#2; a^\omega)^\omega; +b)^\omega$ en $Y = b; c; \#2; c; \#2; a^\omega$.

Oplossing:**Eerste canonieke vorm**

Laat X_1 de eerste canonieke vorm van X zijn. Y is reeds in de eerste canonieke vorm (want dit object is van de vorm $X = Y; Z^\omega$ en Y en Z zijn zonder repetitie).

De operatie *uitvouwen* wordt gedefinieerd als:

$$X^\omega = X; X^\omega$$

en is kloppend want:

$$X^\omega = (X; X)^\omega \quad (\text{PGA2})$$

$$= X; (X; X)^\omega \quad (\text{PGA4})$$

$$= X; X^\omega \quad (\text{PGA2})$$

$$\begin{aligned} b; (c; \#2; (c; \#2; a^\omega)^\omega; +b)^\omega &= b; c; \#2; (c; \#2; a^\omega)^\omega; +b; (c; \#2; (c; \#2; a^\omega)^\omega; +b)^\omega && \text{uitvouwen} \\ &= b; c; \#2; (c; \#2; a^\omega)^\omega && (\text{PGA2}) \\ &= b; c; \#2; c; \#2; a^\omega; (c; \#2; a^\omega)^\omega && \text{uitvouwen} \\ &= b; c; \#2; c; \#2; a^\omega = X_1 && (\text{PGA2}) \end{aligned}$$

$i_n(X_1) = i_n(Y)$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$, dus $X =_{ic} Y$.

Tweede *minimale* canonieke vorm

Laat X_2 en Y_2 de minimale tweede canonieke vorm van respectievelijk X en Y zijn.

$$b; c; \#2; c; \#2; a^\omega = b; c; \#3; c; \#2; a^\omega \quad (\text{PGA6})$$

$$= b; c; \#3; c; \#1; a^\omega = X_2 = Y_2 \quad (\text{PGA8})$$

$i_n(X_2) = i_n(Y_2)$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$, dus $X =_{sc} Y$.

3. Volgens het boek gelden de volgende vergelijkingen:

Vergelijkingen voor gedragsextractie

$$|!| = S \quad (3)$$

$$|a| = a \circ D \quad (4)$$

$$|+a| = a \circ D \quad (5)$$

$$|-a| = a \circ D \quad (6)$$

$$|\#k| = D \quad (7)$$

$$|!; X| = S \quad (8)$$

$$|a; X| = a \circ |X| \quad (9)$$

$$|+a; X| = |X| \leq a \triangleright |\#2; X| \quad (10)$$

$$|-a; X| = |\#2; X| \leq a \triangleright |X| \quad (11)$$

$$|\#0; X| = D \quad (12)$$

$$|\#1; X| = |X| \quad (13)$$

$$|\#k+2; u| = D \quad (14)$$

$$|\#k+2; u; X| = |\#k+1; u; X| \quad (15)$$

Vergelijkingen voor projectieve rijen

$$\pi_0(P) = D \quad (16)$$

$$\pi_{n+1}(S) = S \quad (17)$$

$$\pi_{n+1}(D) = D \quad (18)$$

$$\pi_{n+1}(P \leq a \triangleright Q) = \pi_n(P) \leq a \triangleright \pi_n(Q) \quad (19)$$

a)

Oplossing:

$$\begin{aligned}
|a; b; +c; !| &= a \circ |b; +c; !| && \text{vergelijking 4} \\
&= a \circ b \circ | +c; !| && \text{vergelijking 4} \\
&= a \circ b \circ |!| \trianglelefteq c \triangleright D && \text{vergelijking 10 en 4} \\
&= a \circ b \circ S \trianglelefteq c \triangleright D && \text{vergelijking 3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_3(a \circ b \circ S \trianglelefteq c \triangleright D) &= a \circ \pi_2(b \circ S \trianglelefteq c \triangleright D) && \text{vergelijking 19} \\
&= a \circ b \circ \pi_1(S \trianglelefteq c \triangleright D) && \text{vergelijking 19} \\
&= a \circ b \circ \pi_0(S) \trianglelefteq c \triangleright \pi_0(D) && \text{vergelijking 19} \\
&= a \circ b \circ D \trianglelefteq c \triangleright D && \text{vergelijking 16}
\end{aligned}$$

b)

Oplossing:

$$|\#6; c; a| = D \text{ vergelijking 14}$$

$$\pi_3(|\#6; c; a|) = D \text{ vergelijking 18}$$

c)

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\#3; c; a^\omega &= \#3; c; a; a; a^\omega && \text{uitvouwen} \\
|\#3; c; a; a; a^\omega| &= |a; a^\omega| && \text{vergelijking 15} \\
&= a \circ |a^\omega| && \text{vergelijking 4} \\
&= a \circ P = P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_3(|\#3; c; a^\omega|) &= a \circ \pi_2(P) && \text{vergelijking 19} \\
&= a \circ a \circ \pi_1(P) && \text{vergelijking 19} \\
&= a \circ a \circ a \circ \pi_0(P) && \text{vergelijking 19} \\
&= a \circ a \circ a \circ D && \text{vergelijking 16}
\end{aligned}$$

d)

Oplossing:

$$\begin{aligned}
|-b; !; c; +b; !; a| &= |c; +b; !; a| \trianglelefteq b \triangleright |!| && \text{vergelijking 11} \\
&= |c; +b; !; a| \trianglelefteq b \triangleright S && \text{vergelijking 3} \\
&= c \circ | +b; !; a| \trianglelefteq b \triangleright S && \text{vergelijking 9} \\
&= (c \circ |!| \trianglelefteq b \triangleright |a|) \trianglelefteq b \triangleright S && \text{vergelijking 10} \\
&= (c \circ (S) \trianglelefteq b \triangleright |a|) \trianglelefteq b \triangleright S && \text{vergelijking 13} \\
&= (c \circ (S) \trianglelefteq b \triangleright (a \circ D)) \trianglelefteq b \triangleright S && \text{vergelijking 4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_3(|-b; !; c; +b; !; a|) &= \pi_2(c \circ (S) \trianglelefteq b \triangleright (a \circ D)) \trianglelefteq b \triangleright \pi_2(S) && \text{vergelijking 19} \\
&= c \circ \pi_1((S) \trianglelefteq b \triangleright (a \circ D)) \trianglelefteq b \triangleright S && \text{vergelijking 19} \\
&= c \circ (\pi_0(S) \trianglelefteq b \triangleright \pi_0(a \circ D)) \trianglelefteq b \triangleright S && \text{vergelijking 19} \\
&= c \circ (D \trianglelefteq b \triangleright D) \trianglelefteq b \triangleright S && \text{vergelijking 19}
\end{aligned}$$

4. a)

Oplossing:

$$\begin{aligned}
|+a; \#3; a; \#2; a| &= |\#3; a; \#2; a| \trianglelefteq a \triangleright |a; \#2; a| && \text{vergelijking 10} \\
&= |a| \trianglelefteq a \triangleright |a; \#2; a| && \text{vergelijking 15} \\
&= |a| \trianglelefteq a \triangleright a \circ |\#2; a| && \text{vergelijking 9} \\
&= a \circ D \trianglelefteq a \triangleright a \circ |\#2; a| && \text{vergelijking 4} \\
&= a \circ D \trianglelefteq a \triangleright a \circ D && \text{vergelijking 14} \\
&= a \circ a \circ D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a; a| &= a \circ |a| && \text{vergelijking 9} \\
&= a \circ a \circ D && \text{vergelijking 4}
\end{aligned}$$

$|+a; \#3; a; \#2; a| = |a; a|$, dus de twee objecten zijn gedragsequivalent.

b)

Oplossing:

$$\begin{aligned}
 |b; !; a| &= b \circ |!; a| \\
 &= b \circ S
 \end{aligned}$$

*vergelijking 9**vergelijking 8*

$$\begin{aligned}
 | + b; !; a| &= |!| \trianglelefteq b \trianglerighteq |a| \\
 &= S \trianglelefteq b \trianglerighteq |a| \\
 &= S \trianglelefteq b \trianglerighteq a \circ D
 \end{aligned}$$

*vergelijking 10**vergelijking 3**vergelijking 4*

$|b; !; a| \neq | + b; !; a|$, dus de twee objecten zijn niet gedragsequivalent.

5.

Oplossing:
Stelling

$$\pi_n(\pi_{n+1}(P)) = \pi_n(P)$$

BewijsBasisgeval $n = 0$:

$$\pi_0(P) = D \text{ en } \pi_0(\pi_1(P)) = D, \text{ volgens vergelijking 16.}$$

Dus de theorie geldt voor $n = 0$.

Inductiehypothese:

$$\pi_{n-1}(\pi_n(P)) = \pi_{n-1}(P)$$

Inductiestap:

Als $P = S$:

$$\pi_n(\pi_{n+1}(S)) = \pi_n(S) \quad \text{vergelijking 17}$$

Dus geldig voor $n \in \mathbb{Z}$ en $P = S$ Als $P = D$:

$$\pi_n(\pi_{n+1}(D)) = \pi_n(D) \quad \text{vergelijking 18}$$

Dus geldig voor $n \in \mathbb{Z}$ en $P = D$ Als $P = Q \trianglelefteq a \triangleright R$:

$$\pi_n(\pi_{n+1}(P)) = \pi_n(\pi_n(Q) \trianglelefteq a \triangleright \pi_n(R)) \quad \text{vergelijking 19}$$

$$= \pi_{n-1}(\pi_n(Q)) \trianglelefteq a \triangleright \pi_{n-1}(\pi_n(R)) \quad \text{vergelijking 19}$$

$$\stackrel{\text{IH}}{=} \pi_{n-1}(Q) \trianglelefteq a \triangleright \pi_{n-1}(R)$$

$$= \pi_n(P) \quad \text{vergelijking 19}$$

Dus geldig voor $n \in \mathbb{Z}$ en $P = Q \trianglelefteq a \triangleright R$