

Discrete Wiskunde

Florens Douwes
Studentnr. 11254483

21 november 2017

1 Logica

1.1 Logica tabellen

Negatie (negation)

P	$\neg P$
T	F
F	T

Conjunctie (conjunction)

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Disjunctie (disjunction)

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Implicatie (implication)

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Equivalentie (biconditional)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

1.2 Tautologie, contradictie

Een tautologie is altijd waar. Een contradictie is nooit waar. Een contingency is een propositie die niet een tautologie is en niet een contradictie.

1.3 Propositie logica

Variabelen: x, y, z

Predicates: $P(x), M(x)$

Quantifiers:

Universal quantifier, "for all", $\forall$

Existential quantifier, "there exists", $\exists$

$\forall$ is alleen waar als elke functie waar is. $\exists$ is waar als er minstens één aar.

$\exists! x P(x)$ staat er voor dat één en alleen één waarde is waarvoor P waar is.

$\neg \forall x J(x) \equiv \exists x \neg J(x)$

1.4 Gevolg

Modus Ponens

$$\begin{array}{c} p \quad p \rightarrow q \\ \vdots \\ q \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{c} \neg q \quad p \rightarrow q \\ \vdots \\ \neg q \end{array}$$

Hypothetical Syllogism

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \quad q \rightarrow r \\ \vdots \\ p \rightarrow r \end{array}$$

Disjunctive Syllogism

$$\begin{array}{c} p \vee q \quad \neg p \\ \vdots \\ q \end{array}$$

Addition

$$\begin{array}{c} p \\ \vdots \\ p \vee q \end{array}$$

Simplification

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \vdots \\ q \end{array}$$

Conjunction

$$\begin{array}{c} p \quad q \\ \vdots \\ p \wedge q \end{array}$$

Resolution

$$\begin{array}{c} \neg p \vee r \quad p \vee q \\ \vdots \\ q \vee r \end{array}$$

2 Verzamelingen, functies en relaties

2.1 Sets

Een set is een ongesorteerde collectie van objecten. Een set bevat elementen, een element is een lid van de set als het in de set zit.

De notatie $a \in A$ wordt gebruikt om aan te duiden dat a in de set A zit. Als a niet in de set zit, dan schrijven we $a \notin A$.

$$S = \{a, b, c, d\}.$$

$$S = \{a, b, c, d\} = \{b, c, a, d\}.$$

$$S = \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d, c, d\}.$$

2.2 Belangrijke sets

$$\mathbb{N} = \text{natural numbers} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \text{integers} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \text{positive integers} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{R} = \text{set of real numbers}$$

$$\mathbb{R}^+ = \text{set of positive real numbers}$$

$$\mathbb{C} = \text{set of complex numbers}$$

$$\mathbb{Q} = \text{set of rational numbers, (kan geschreven worden als een deling)}$$

2.3 Set notaties

$$S = \{x \mid x \text{ is a positive integer less than } 100\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

Universele set U , bevat alle elementen onder beschouwing.

Lege set $\emptyset$ of $\{\}$.

Twee sets zijn gelijk iff ze dezelfde elementen hebben.

$A \subseteq B$. A is een subset van B , iff elk element van A ook een element van B is.

$\mathbb{P}(A)$ is de power set van A . Als $A = \{a, b\}$, dan is $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$A \times B$ Cartesian product. $A = \{a, b\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.

$A \cup B$ = union, alle elementen van A en B . $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{3, 4, 5\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$A \cap B$ = intersection, alle overeenkomende elementen van A en B . $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{3\}$.

Complement, de inverse. Complement van $A = U - A$. Streep over de letter heen.

Difference, $A - B$. De elementen van A minus de elementen die van A en B overeen komen.

Symmetric difference, de set van $A \oplus B$ bevat alle elementen die niet beide in A en B zitten.

3 Functies

Een functie mapt een input naar een output.

Injection, of 1-op-1 iff $f(a) = f(b)$.

Surjection, of onto, iff voor elke uitkomst een invoer is.

Bijection, als het een injectie en een surjectie is. Dus als de uitkomsten uniek zijn, en dat er voor elke uitkomst een invoer is.

Inverse, het omgedraaide van een bijjectie. Genoteerd door $f^{-1}(y) = x$

Compositie, $f \circ g(x) = f(g(x))$

Cardinaliteit, het aantal elementen in een set, $|A|$.

4 Inductie en recursie

Om te bewijzen dat $P(n)$ waar is voor alle integers n , dan moeten we twee stappen uitvoeren.

De basis stap, laat zien dat $P(1)$ waar is.

De inductieve stap, maak de formule voor $P(k)$. Laat daarna zien dat $P(k) \rightarrow P(k+1)$ waar is, en werk dat uit.

Je krijgt een formule, links met een $n+1$ stap, rechts te uitwerking. Laat zien dat $P(1)$ (of voor welk eerste getal) waar is. Vertel daarna dat je $P(k) \rightarrow P(k+1)$ gaat oplossen. Werk dan de inductiestap uit: links de formule gegeven van rechts maar dan van k ($P(k)$ dus), plus de $n+1$ stap van de linkerkant, ingevuld met $k+1$! Werk dit uit. Laat daarna iets zien zoals $\forall n \in \mathbb{N}^+ P(n)$, of schrijf de algemene inductie formule op en schrijf er onder "en de bewijzen van de basis en inductiestap".

RECURSIE HIER

5 Permutaties

5.1 Tellen

Product regel, als er n manieren zijn om taak 1 te doen, en j manieren om taak 2 te doen, dan zijn er $n * j$ manieren om de twee taken samen te doen.

Som regel, als een taak op n manieren gedaan kan worden, of op j manieren, en de elementen uit n en j zijn uniek, dan zijn er $n + j$ manieren om de taak te doen.

Product en som voorbeeld: als een label óf een enkele letter moet zijn, óf een letter gevolgd door een nummer, dan zijn er $26 + 26 * 10$ mogelijke labels.

Aftrek regel, als een taak op n manieren gedaan kan worden, of op j manieren, dan kan je de taak op $n + j$ manieren doen, *minus* het aantal overlappende manieren tussen n en j .

Voorbeeld: hoeveel bitstrings van lengte 8 starten met 1 of eindigen in 00. Aantal bitstrings dat start met 1: 2^7 . Aantal bitstrings dan eindigt op 00: 2^6 . Aantal bitstrings dan start met 1 of eindigt met 00: $2^7 + 2^6 - 2^5$, want het laatste overlapt.

Deel regel, er zijn n/d manieren zijn om een taak te doen, als er n mogelijke manieren zijn, maar voor elke manier zijn er d manieren voor elke n .

Voorbeeld: hoeveel mogelijke manieren zijn er om personen aan een ronde tafel voor 4 te plaatsen, waar de manieren overlappen als de persoon links en rechts hetzelfde zijn? Nummer de plekken aan de tafel 1-4. Er zijn 4 manieren om iemand op plek 1 te zetten, 3 manieren voor plek 2, 2 manieren voor plek 3, en 1 manier voor plek 4, $4! = 24$ manieren om mensen neer te zetten. Maar omdat een plek hetzelfde is als de burens hetzelfde zijn, is dat 4. Er zijn $24/4 = 6$ verschillende manieren.

Als er 20 duiven in een nestkast van 19 plekken zitten, dan moet er in *minstens* 1 plek *meer* dan 1 duif zitten.

5.2 Permutaties

Een permutatie van een set van objecten is een geordende rangschikking van deze objecten. Een geordende rangschikking van r elementen van een set is een r -permutatie.

Voorbeeld: $S = \{1, 2, 3\}$. $\{3, 1, 2\}$ is een permutatie van S . $\{3, 2\}$ is een 2-permutatie van S .

Het aantal r -permutaties van een set van n elementen wordt geschreven als $P(n, r)$.

Voorbeeld: De 2-permutaties van $S = \{1, 2, 3\}$ zijn 1,2; 1,3; 2,1; 2,3; 3,1; 3,2. Hieruit volgt dat $P(3, 2) = 6$.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

5.3 Combinaties

Een r -combinatie is een ongeordende rangschikking van r elementen van een set.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Voorbeeld, als $S = \{a, b, c, d\}$, dan is $\{a, b, c\}$ een 3-combinatie van S . Het is hetzelfde als $\{d, c, a\}$ omdat de volgorde niet uitmaakt. $C(4, 2) = 6$ omdat de 2-combinaties van $\{a, b, c, d\}$ de subsets $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ en $\{c, d\}$ zijn.

Verder, $C(n, r) = C(n, n-r)$, waar n en r niet negatief zijn, en $r \leq n$.

5.4 Permutaties met herhalingen

Het aantal r -permutaties van een set van n objecten met herhalingen toegestaan is n^r .

Voorbeeld, hoeveel strings van lengte r kan je vormen uit het alfabet. 26^r .

5.5 Combinaties met herhalingen

Het biljet en doos voorbeeld eindigt op de volgende formule:

$C(n+r-1, r)$ of $C(n+r-1, n-1)$. Hier kan je $n+r-1$ zien als het aantal streepjes en sterretjes, en r het aantal biljetten zelf.

Voorbeeld: hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, waar alle x niet-negatieve integers zijn? Je kan het zien als het aantal mogelijkheden om 11 items te selecteren van een set van drie elementen. $C(3+11-1, 11) = 78$

5.6 Voorbeelden

We tellen bitstrings.

Hoeveel bitstrings van lengte 10 zijn er?

$$2^{10}$$

Hoeveel bitstrings van lengte 10 beginnen met 1101?

$$2^6$$

Hoeveel bitstrings van lengte 10 bevatten precies 6 nullen?

$$\binom{10}{6}$$

Hoeveel bitstrings van lengte 10 bevatten even veel nullen als enen?

$$\binom{10}{5}$$

Hoeveel bitstrings van lengte 10 bevatten precies vier enen?

$$\binom{10}{4}$$

Hoeveel bitstrings van lengte 10 bevatten hoogstens vier enen?

$$1 + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$$

Hoeveel bitstrings van lengte 10 bevatten ten minste vier enen?

$$\binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + 1$$

Hoeveel bitstrings van lengte 10 bevatten meer enen dan nullen?

$$1 + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$$

$$1 + \binom{10}{9} + \binom{10}{8} + \binom{10}{7} + \binom{10}{6}$$

We tellen permutaties van de string ABCDEFG.

Hoeveel permutaties beginnen met BCD?

$$4!$$

Hoeveel permutaties eindigen op G?

$$6!$$

Hoeveel permutaties beginnen met BCD en eindigen op G?

$$3!$$

Hoeveel permutaties bevatten de strings BCD en CA?

$$0$$

6 Grafen

6.1 Relaties

Een binary relatie R van een set A naar B is $R \subseteq A \times B$.

De binary relatie R op een set A is de subset van $A \times A$.

Hoeveel relaties zijn er op een set A ? Omdat een relatie op A hetzelfde is als een subset van $A \times A$, tellen we de subsets van $A \times A$. Omdat $A \times A$ n^2 elementen heeft als A n elementen heeft, en een set met m elementen 2^m subsets heeft, zijn er $2^{|A|^2}$ subsets, en ook zoveel relaties.

Reflectorische relaties: R is reflexive iff $(a, a) \in R$ voor elk element $a \in A$. In andere woorden, voor alle elementen in A moet (a, a) bestaan.

Symmetrische relaties: R is symmetric iff $(b, a) \in R$ als $(a, b) \in R$ voor alle $a, b \in A$. In andere woorden, als (a, b) bestaat, moet (b, a) ook bestaan.

Antisymmetrische relaties: R is antisymmetric als $(a, b) \in R$ en $(b, a) \in R$, dan altijd $a = b$. In andere woorden, als $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a = b$

Transitive, R is transitive als $(a, b) \in R$ en $(b, c) \in R$, dan $(a, c) \in R$, voor alle $a, b, c \in A$. In andere woorden, als $(a, b) \in R$ en $(b, c) \in R$, dan moet $(a, c) \in R$.

Compositie, stel R_1 een relatie is van set A naar B , en R_2 een relatie van B naar C . Dan is de compositie van R_2 en R_1 een relatie van A naar C , waar als (x, y) een element van R_1 is, en (y, z) een element van R_2 , dan is (x, z) een element van $R_2 \circ R_1$.

6.2 Equivalente relaties

Equivalente relaties, een equivalence relation bestaat als een relatie reflexive, symmetric en transitive is. Twee elementen die een equivalence relation hebben zijn equivalent.

De set van alle elementen die een equivalence relatie hebben op een element a van A , heet de equivalence class van a . De notatie $[a]_R$ wordt gebruikt. R kan impliciet zijn.

PARTITIES, EQUIVALENCE RELATION PARTITIONS A SET, HIER?

6.3 partial orderings

Een relatie R op set S heet een partial ordering, of een partial order, als het reflexive, antisymmetric en transitive is.

Zo een set wordt een partially ordered set, of poset genoemd, genoteerd door (S, R) . (?)

Voorbeeld: $\geq$ is een partial ordering van de set van integers. Het is reflexief, antisymmetrisch en transitief.

MEER HIER

6.4 Graven en graaf modellen

Een graaf $G = (V, E)$ bestaat uit een niet-lege set V van vertices (of nodes) en een set E van edges. Elke edge heeft 1 of 2 vertices, endpoints genoemd. Een edge verbindt endpoints.

Bij een simple graph verbindt een edge twee verschillende vertices, en geen twee edges verbinden met dezelfde paar vertices.

Een multigraph kan meerdere edges verbinden met dezelfde twee vertices.

Een edge die aan dezelfde vertex verbindt is een loop.

Een directed graph (of digraph) $G = (V, E)$ bestaat uit een niet-lege set V van vertices, en E van gerichte edges. Elke edge is geassocieerd met een geordene lijst van vertices. Een edge (u, v) begint bij u en eindigt bij v .

Twee verbonden vertices worden neighbors of adjacent genoemd, de edge heet connected of incident.

De degree van een vertex in een ongerichte graaf is het aantal edges incident er mee, oftewel het aantal connecties. Een loop telt voor twee. Genoteerd met $\deg(i)$.

Een bipartiete graaf is een simpele graaf de vertices in twee sets opgedeeld kunnen worden, zodat elke edge tussen V_1 en V_2 is. In andere woorden, als je om en om de vertices kleurt, dan krijg je nooit een edge met dezelfde kleur.

Een adjacency list kan gebruikt worden om een graaf te representeren die niet meerdere edges heeft. Links van de tabel staan de vertices, rechts de vertices waarmee de vertex mee verbonden is. Dit kan ook weergegeven worden in een matrix, waar de getallen het aantal verbindingen is.

Een graaf is isomorph als het omgevormd kan worden tot dezelfde graaf. Het tegenovergestelde heet nonisomorphic. De graaf wordt omgevormd door een een-op-een onto functie.

6.5 Connectiviteit

Een pad is een lijst van edges dat begint bij een vertex en dat langs edges naar andere vertices gaat.

Een pad is een circuit als het begint en eindigt bij dezelfde vertex, met een lengte meer dan 0. Een pad is simpel als het niet meerdere edges opnieuw bezoekt.

Een ongerichte graaf is connected als er een pad is tussen elk paar vertices. Anders is het disconnected.

Een gerichte graaf is strongly connected als er een pad van beide kanten bestaat voor elke edge (niet per se dat alle edges beide kanten op gaan), anders is het een weakly connected graph.

6.6 Euler pad

Een Euler circuit in een graaf is een simpel circuit dat elke edge van de graaf bevat.

Een Euler pad van een graaf is een simpel pad dat elke edge van de graaf bevat.

Een graaf met een Euler pad heeft de eerste en laatste vertex van een euler pad een oneven graden, en de andere een even graden. Dus, een graaf met een euler pad heeft precies twee vertices met een oneven graden.

Een verbonden multigraaf met ten minste twee vertices heeft een Euler circuit iff elke vertex een even graden heeft. Deze heeft een Euler pad iff het precies twee vertices heeft met een oneven graden.

6.7 Hamilton pad

Het hamilton pad/circuit is hetzelfde als de euler versie, maar dan over de vertices.