

LA

Florens Douwes

26 maart 2018

1 Vectoren

1.1 Geometrie

Een vector, $x = 5$, $y = 3$ $[5, 3]$ Tail is de origin. Head is het waar het naar wijst. Individuele coördinaten zijn de componenten. $[0, 0]$ is de zero-vector. Vectoren beginnend bij O zijn in de standaardpositie. Vectoren zijn gelijk als ze dezelfde componenten hebben.

1.1.1 Vectoroptelling

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$$

Nota: optelling is commutatief, $u + v$ is hetzelfde als $v + u$.

1.1.2 Scalaire vermenigvuldiging

$$c\mathbf{v} = c[v_1, v_2] = [cv_1, cv_2]$$

Nota: als $c > 0$ blijft de vector dezelfde richting op wijzen. Als $c < 0$ wijst het de andere kant op. $c\mathbf{v}$ is $|c|$ keer langer dan $\mathbf{v}$.

Deze constanten heten **scalars**. Vectoren zijn scalaire meerderheden van elkaar als ze parallel zijn.

Speciaal is $-\mathbf{v}$, het negatief van $\mathbf{v}$. Hieruit volgt vector aftrekking. Het verschil tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ is $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Bij twee punten A en B, met vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, is de vector $\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

Vectoren in $\mathbb{R}^3$ functioneren hetzelfde maar dan met drie componenten. Dit is vanzelfsprekend uit te breiden tot $\mathbb{R}^n$

De algebraïsche eigenschappen op een rij:

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ zijn vectoren in $\mathbb{R}^n$, en c en d zijn scalars. Dan:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ commutatief
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ associatief
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ distributief
- $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ distributief
- $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Een vector is een lineaire combinatie van vectoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i$ als er scalars zijn $c_1, c_2, \dots, c_k$ zodat $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$. Deze scalars zijn de coëfficiënten van de lineaire combinatie.

1.2 Lengte; Inproduct

1.2.1 Inproduct

Als $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ en $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ dan is het **inproduct** / **inwendig product** / **dot product** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Nota: de vectoren moeten hetzelfde aantal componenten hebben.

Nota: de uitkomst is een getal, niet een vector.

De algebraïsche eigenschappen op een rij:

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ zijn vectoren in $\mathbb{R}^n$. Dan:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ commutatief
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ distributief
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ als en alleen als $\mathbf{u} = 0$

De lengte van een vector $\mathbf{v}$ is $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$ is het niet-negatieve scalair $\|\mathbf{v}\|$ gedefiniëerd door:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Nota: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

De algebraïsche eigenschappen op een rij:

$\mathbf{v}$ is een vector in $\mathbb{R}^n$ en c een scalaire. Dan

- $\|\mathbf{v}\|$ is 0 als en alleen als $\mathbf{v} = 0$
- $\|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|$

Een vector van lengte 1 is de unit vector / eenheidsvector.

Een eenheidsvector waarvan een enkele component 1 is en de andere 0 is een standaard unit vector / standaard eenheidsvector.

De afstand $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tussen twee vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$ is.

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

De hoek van niet-nul vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$, is

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Hoeken zijn perpendicular / loodrecht als de hoek 90 graden is.

Bij vectoren in $\mathbb{R}^n$ heet dit orthogonality / orthogonaliteit. Volgens de hoekformule moet de hoek dan $\cos(90^\circ) = 0$ zijn. Hieruit volgt dat het inproduct 0 moet zijn.

Twee vectoren in $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$ zijn orthogonaal aan elkaar als

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Nota: $0 \cdot \mathbf{v} = 0$ voor elke vector $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n = 0$.

1.2.2 Projecties

Bij een projectie wordt een vector op een andere vector geprojecteerd.

Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn en $\mathbf{u} \neq 0$, dan is de projectie van $\mathbf{v}$ op $\mathbf{u}$ de vector $proj_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$

$$proj_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}$$

1.3 Lijnen en vlakken

1.3.1 Lijnen

Neem de vergelijking $2x + y = 0$.

Stel $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dan wordt de vergelijking $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$.

De vergelijking $ax + by = c$ voor een lijn is de **general form**.

$\mathbf{n}$ is hier orthogonaal aan de lijn, in andere woorden orthogonaal aan elke lijn parallel aan de lijn.

$\mathbf{n}$ is de **normal vector** / **normaalvector** aan deze lijn.

De **normal form** / **normaalvorm** van een lijn l in $\mathbb{R}^2$ is:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$$

of

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

waar $\mathbf{p}$ een punt op de lijn is, en $\mathbf{n} \neq 0$ een normaalvector is voor de lijn.

De vector parallel aan de lijn is de **direction vector** / **richtingsvector**.

De **vector form** / **vectorvorm** van een lijn l in $\mathbb{R}^2$ is:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

waar $\mathbf{p}$ een punt op de lijn is en $\mathbf{d} \neq 0$ een richtingsvector is voor de lijn.

Dit kan ook losgetrokken worden om de **parametric equations** / **geparametiseerde vorm** te krijgen.

1.3.2 Vlakken

De **normal form** / **normaalvorm** van een vlak P in $\mathbb{R}^3$ is:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$$

of

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

waar $\mathbf{p}$ een punt op het vlak is, en $\mathbf{n} \neq 0$ een normaalvector is voor het vlak.

De vergelijking $ax + by + cz = d$ voor een vlak is de **general form**, waar $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ een normaalvector is voor P .

De **vector form** / **vectorvorm** van een vlak P in $\mathbb{R}^3$ is:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

waar $\mathbf{p}$ een punt op het vlak is en $\mathbf{u} \neq 0$ en $\mathbf{v} \neq 0$ parallel zijn aan het vlak en niet parallel aan elkaar.

Dit kan ook losgetrokken worden om de **parametric equations** / **geparametiseerde vorm** te krijgen.

1.3.3 Dimensies

In het algemeen geldt:

$$(\text{dimensie van object}) + (\text{dimensie van algemene vergelijkingen}) = \text{dimensie van ruimte}$$

Dit is de **blancing formula**.

Bijvoorbeeld:

Een lijn heeft 1 algemene vergelijking nodig in $\mathbb{R}^2$, maar 2 algemene vergelijkingen in $\mathbb{R}^3$.

Een vlak heeft in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ 1 algemene vergelijking nodig.

1.3.4 Afstanden

Afstanden van punten tot lijnen en vlakken kunnen berekend worden door middel van projectie.

Er zijn een aantal specifieke kortere formules voor afstanden:

Als een lijn l in $\mathbb{R}^2$ is en de vergelijking heeft de algemene form $ax + by = c$ dan is de afstand $d(B, l)$ met $B = (x_0, y_0)$ gegeven door de formule:

$$d(B, l) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Als een vlak P in $\mathbb{R}^3$ is en de vergelijking heeft de algemene form $ax + by + cz = d$ dan is de afstand $d(B, P)$ met $B = (x_0, y_0, z_0)$ gegeven door de formule:

$$d(B, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1.3.5 Kruisproduct

Het **kruisproduct** / **cross product** / **uitproduct** (niet te verwarren met het Engelse outproduct) is een speciaal gereedschap dat gebruikt kan worden om in $\mathbb{R}^3$ een normaalvector te verkrijgen vanuit twee andere vectoren.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

In een driedimensionale ruimte met vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ staat het kruisproduct $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ loodrecht op $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

2 Systemen van lineaire vergelijkingen

2.1 Systemen

Een **lineaire vergelijking** / **linear equation** met n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ is een vergelijking dat in de form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

waar de coëfficiënten $a_1, a_2, \dots, a_n$ en de constante term b constanten zijn.

Een **oplossing** van zo een systeem is een vector waar de componenten de vergelijking oplossen.

Een **systeem van lineaire vergelijkingen** is een eindige set van lineaire vergelijkingen. Een oplossing van een systeem van lineaire vergelijkingen is een vector dat een oplossing is van alle vergelijkingen. Een oplossingsset is een set van van alle oplossingen van zo een systeem.

Een systeem van lineaire vergelijkingen met echte coëfficiënten heeft

- (a) een unieke oplossing (consistent)
- (b) oneindig veel oplossingen (consistent)
- (c) geen oplossingen (inconsistent)

Twee systemen zijn gelijk als ze dezelfde oplossingsset hebben.

Systemen kunnen door herschrijven makkelijker gemaakt worden, zodat er door middel van **back substitution** de oplossing gevonden kan worden.

2.2 Oplossen van systemen

Het systeem

$$\begin{aligned}x - y - z &= 2 \\ 3x - 3y + 2z &= 16 \\ 2x - y + z &= 9\end{aligned}$$

Kan in een **augmented matrix** geschreven worden:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

Daarna kan je vergelijkingen bij elkaar optellen en aftrekken, en omdraaien:

trek drie keer de eerste vergelijking van de tweede af

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

trek twee keer de eerste vergelijking van de derde af

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right]$$

draai vergelijkingen twee en drie om

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right]$$

Deze matrix is goed op te lossen met back substitution.

De **coëfficiëntmatrix** / **coefficient matrix** is de matrix met alle coëfficiënten van de variabelen, en de **aangevulde matrix** / **augmented matrix** is de coëfficiëntmatrix met een extra kolom voor de constante termen.

Een matrix is in de **rij-echelonvorm** / **row echelon form** als:

1. rijen met alleen nullen staan onderaan.
2. voor elke niet-nul rij, het eerste niet-nul cijfer (de **leading entry**) is in een kolom links van alle leading entries eronder.

De volgende elementaire rijbewerkingen gelden:

1. wissel rijen om.
2. vermenigvuldig een rij met een niet-nul constante.
3. voeg een (meervoud van) rij toe aan een andere rij.

Dit impliceert ook deling en aftrekking.

Matrices zijn **row equivalent** als er een sequentie van rijbewerkingen is die de matrix in de andere matrix kan omzetten.

De stappen van een augmented matrix schrijven, elementaire rijbewerkingen toepassen, en back substitution gebruiken om het systeem op te lossen, heet **Gaussian elimination**.

Van het systeem

$$\begin{aligned}w - x - y + 2z &= 1 \\2w - 2x - y + 3z &= 3 \\-w + x - y &= -3\end{aligned}$$

is de augmented matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

welke gereduceerd kan worden naar

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

is dan het systeem

$$\begin{aligned}w - x - y + 2z &= 1 \\y - z &= 1\end{aligned}$$

welke oneindig oplossingen heeft.

Met back substitution kan er het systeem alsnog opgelost worden, maar dan met variabelen.

De leading variabelen zijn w en y , de vrije variabelen zijn x en z .

Neem, $y = 1 + z$:

$$\begin{aligned}w &= 1 + x + y - 2z \\&= 1 + x + (1 + z) - 2z \\&= 2 + x - z\end{aligned}$$

Als de parameters $x = s$ en $z = t$ aangewezen worden, kan de oplossing geschreven worden in vectorvorm:

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit laat iets heel belangrijks zien: in een consistent systeem zijn de vrije variabelen de variabelen die niet leading variabelen zijn. Hiermee kunnen we het aantal vrije variabelen voorspellen.

De **rank** van een matrix is het aantal niet-nul rijen in een matrix in row echelon vorm.

De rank wordt aangegeven voor een matrix A met $rank(A)$.

Als A een coëfficiëntenmatrix van een systeem van lineaire vergelijkingen is met n variabelen, dan:

$$\text{aantal vrije variabelen} = n - rank(A)$$

2.2.1 Reduced row echelon form

Een matrix is in **reduced row echelon form** als:

1. het is in row echelon vorm.
2. het eerste cijfer in elke niet-nul rij is een 1 (**leading 1**).
3. Elke kolom met een leading 1 heeft voor de rest nullen.

De stappen van een augmented matrix schrijven, elementaire rijbewerkingen toepassen om een rref matrix te krijgen, en back substitution gebruiken om het systeem op te lossen als het consistent is, heet **Gauss-Jordan elimination**.

Met een rref matrix kan nog makkelijker met variabelen worden opgelost:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

wordt de rref vorm

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Het systeem is nu

$$\begin{aligned}w - x + z &= 2 \\ y - z &= 1\end{aligned}$$

oplossen voor de leading variabelen

$$\begin{aligned}w &= 2 + x - z \\ y &= 1 + z\end{aligned}$$

met $x = s$ en $z = t$ dan kan het weer geschreven worden in de vectorvorm

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{bmatrix}$$

Er is één type systeem dat altijd tenminste één oplossing heeft:

Een systeem van lineaire vergelijkingen is **homogeen** / **homogeneous** als de constante term in elke vergelijking 0 is ($[A|0]$).

Als $[A|0]$ een homogeen systeem van m lineaire vergelijkingen is met n variabelen, waar $m < n$, dan heeft het systeem oneindig oplossingen.

2.3 Spans

De $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ van de vectoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ is de set van alle lineaire combinaties van deze vectoren.

In andere woorden, de span geeft aan welke vectoren gemaakt kunnen worden vanuit een set van vectoren.

Gemaakt staat hier voor lineaire combinaties, dat wil zeggen, vermenigvuldigingen met een constante en optellingen.

Vectoren zijn **lineair onafhankelijk** / **linearly independent** dan kan geen enkele vector in de set gemaakt worden door andere vectoren. Vectoren zijn **lineair afhankelijk** / **linear dependent** als een vector door de andere vectoren gemaakt kan worden.

Als $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ kolomvectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn en A de $n \times m$ matrix $[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_m]$ is met als kolommen deze vectoren, dan zijn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ lineair afhankelijk als en alleen als het homogeneous lineaire systeem met de augmented matrix $[A|0]$ een niet-triviale oplossing heeft.

Als $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ rijvectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn en A de $m \times n$ matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$ is met als rijen deze vectoren, dan zijn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ lineair afhankelijk als en alleen als $\text{rank}(A) < m$.

3 Matrices

3.1 Rekenen met matrices

Een matrix is een rechthoekige lijst van getallen.

Een matrix is $m \times n$, m voor de hoogte, n voor de breedte. Een matrix van $1 \times m$ is een **rijmatrix** / **row matrix**, een matrix van $n \times 1$ is een kolommatrix / **kolom matrix**.

De positie M_{ij} staat voor de i de positie verticaal en de j de positie horizontaal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De diagonale getallen zijn alle getallen met $m = n$.

Een **vierkante matrix** / **square matrix** is een matrix met $m = n$

Als alle niet-diagonale getallen nul zijn is het een **diagonale matrix** / **diagonal matrix**. Als al deze getallen ook nog hetzelfde zijn is het een **scalar matrix**. Als de scalars allemaal 1 zijn is het een **identity matrix**.

Twee matrices zijn gelijk aan elkaar als ze even groot zijn, en dezelfde elementen bevatten.

Bij de optelling van matrices worden de getallen alleen bij elkaar opgeteld, het is vereist dat de matrices even groot zijn. Bij een vermenigvuldiging met een scalar worden alle elementen met de scalar vermenigvuldigd. Het negatief van een matrix zijn alle getallen vermenigvuldigd met -1 .

De **nulmatrix** / **zero matrix** is de matrix met alleen nullen.

De **transpose** van een $m \times n$ matrix A is de $n \times m$ matrix A^T waarbij de rijen en de kolommen zijn omgewisseld.

Een vierkante matrix A is **symmetrisch** / **symmetric** als $A^T = A$.

3.2 Matrixvermenigvuldiging

Matrixvermenigvuldiging is speciaal. Matrixvermenigvuldiging is **niet** op componenten gebaseerd (zoals optellen en vermenigvuldiging met een scalar) en **niet** commutatief.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

ookwel

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Bij de vermenigvuldiging van matrices A en B voor $AB = C$ geldt dat de hoogte van A en de breedte van B gelijk moeten zijn. C neemt de breedte van A aan en de hoogte van B .

Een lineair systeem van vergelijkingen kan geschreven worden als $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, waar A de coëfficiëntenmatrix is, $\mathbf{x}$ de kolomvector van variabelen en $\mathbf{b}$ de vector van constante termen.

De macht van een *vierkante* matrix A als A^k met $k \geq 0$ is $\underbrace{AA \cdots A}_{k \times A}$. A^0 is gedefinieerd als I_n (de identiteitsmatrix).

Met deze regels geldt dan ook $A^r A^s = A^{r+s}$ en $(A^r)^s = A^{rs}$

3.3 Matrix algebra

De algebraïsche eigenschappen op een rij:

Als A , B en C zijn matrices zijn, en c en d zijn scalars.

Eigenschappen van sommatie en vermenigvuldiging met scalars:

- a. $A + B = B + A$ commutatief
- b. $(A + B) + C = A + (B + C)$ associatief
- c. $A + O = A$
- d. $A + (-A) = O$
- e. $c(A + B) = cA + cB$ distributief
- f. $(c + d)A = cA + dA$ distributief
- g. $c(dA) = (cd)A$
- h. $1A = A$

Eigenschappen van vermenigvuldiging:

- a. $A(BC) = (AB)C$ associatief
- b. $A(B + C) = AB + AC$ links distributief
- c. $(A + B)C = AC + BC$ rechts distributief
- d. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- e. $I_m A = A = A I_n$ als A $m \times n$ is.

Nota: $AB \neq BA$

Eigenschappen van de transpose (met A en B de juiste grootte):

- a. $(A^T)^T = A$
- b. $(A + B)^T = A^T + B^T$
- c. $(kA)^T = k(A^T)$
- d. $(AB)^T = B^T A^T$
- e. $(A^r)^T = (A^T)^r$ voor niet-negatieve integers r

Als A een vierkante matrix is, dan is $A + A^T$ ook een symmetrische matrix. Als A een matrix is, dan zijn AA^T en $A^T A$ symmetrische matrices.

3.4 Matrix inverse, deelruimte, basis, dimensie en rank

Met A een $n \times n$ matrix, dan is de **inverse** een $n \times n$ matrix A' met de eigenschap dat

$$AA' = I$$

en

$$A'A = I$$

Als A' bestaat, dan is A **inverteerbaar**. Inverses zijn uniek.

Een inverteerbare matrix is te verkrijgen door de identiteitsmatrix naast een matrix te zetten, en de originele matrix met rijvegen naar de identiteitsmatrix te brengen. Als deze bestaat, is de nieuwe matrix de inverse.

Inverteerbare matrices hebben belangrijke eigenschappen. De volgende uitspraken zijn equivalent.

Als A een $n \times n$ matrix is:

- (a) A is inverteerbaar
- (b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft een unieke oplossing voor elke $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^n$.
- (c) $A\mathbf{x} = 0$ heeft alleen de triviale oplossing.
- (d) De rij echelon vorm van A is I_n .
- (e) A is een product van elementaire matrices.
- (f) $\text{rank}(A) = n$.
- (g) $\text{nullity}(A) = 0$.
- (h) De kolomvectoren van A zijn lineair onafhankelijk.
- (i) De kolomvectoren van A spannen $\mathbb{R}^n$.
- (j) De kolomvectoren van A vormen een basis voor $\mathbb{R}^n$.
- (k) De rijvectoren van A zijn lineair onafhankelijk.
- (l) De rijvectoren van A spannen $\mathbb{R}^n$.
- (m) De rijvectoren van A vormen een basis voor $\mathbb{R}^n$.

Een aantal van deze termen worden hieronder besproken.

Eigenschappen van een inverteerbare matrix:

a. Met A als een inverteerbare matrix, dan is A^{-1} inverteerbaar, en

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

b. Met B als een inverteerbare matrix en c een niet-nul scalaire, dan is cA inverteerbaar, en

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$$

c. Met A en B als inverteerbare matrices met dezelfde grootte, dan is AB inverteerbaar en

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

d. Met A als een inverteerbare matrix, dan is A^T inverteerbaar en

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

e. Met A als inverteerbare matrix, dan is A^n inverteerbaar voor alle niet-negatieve integers n en

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

Met A als inverteerbare matrix en n een positieve integer, dan

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$$

Daarmee ook $A^r A^s = A^{r+s}$ en $(A^r)^s = A^{rs}$

Een **deelruimte** / **subspace** van $\mathbb{R}^n$ is een collectie S van vectoren in $\mathbb{R}^n$ zodat:

1. De nulvector is in S
2. Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in S zitten, dan zit $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ook in S . (S is gesloten onder additie.)
3. Als $\mathbf{u}$ in S zit en c is een scalair, dan zit $c\mathbf{u}$ ook in S . (S is gesloten onder scalare vermenigvuldiging.)

Als A een $m \times n$ matrix is, dan is de **rijruimte** / **row space** van A de deelruimte $\text{row}(A)$ opgespannen door de rijen van A . De **kolomruimte** / **column space** van A is de deelruimte $\text{col}(A)$ opgespannen door de kolommen van A .

De rijruimte is hetzelfde bij alle rij equivalente matrices.

De **kernel** / **kern** / **nulruimte** / **null space** is de ruimte opgespannen door de oplossingen van het

lineaire systeem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

De **nullity** van een matrix A is de dimensie van de nulruimte, genoteerd als $nullity(A)$.

De **basis** van een subspace S van $\mathbb{R}^n$ is de set van vectoren in S die S opspannen en lineair onafhankelijk zijn. Het aantal vectoren in S is de **dimensie** van S , genoteerd als $dim(S)$.

Met R de rref vorm van matrix A ,
 $dim(row(A)) = dim(row(R)) = \text{aantal niet-nul rijen van } R = \text{aantal leidende 1'en van } R$.

De **rank** van een matrix A is de dimensie van de rij- en kolomruimtes, genoteerd als $rank(A)$. Hiermee geldt ook dat $rank(A^T) = rank(A)$.

Als A een $m \times n$ matrix is, dan $rank(A) + nullity(A) = n$.

Een methode om basissen te vinden voor de rijruimte, kolomruimte en nulruimte:

1. Verkrijg de rref vorm R van een matrix A .
2. Gebruik de niet-nul rijvectoren van R (met een 1 aan het begin) om een basis te vormen voor $row(A)$.
3. Gebruik de kolomvectoren van A die in R de 1 aan het begin hebben om een basis voor $col(A)$ te maken.
4. Los voor $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ op, door met de kolommen met 1 aan het begin de andere kolommen op te lossen. Maak variabelen aan voor de kolommen met 1 aan het begin. Maak parameters aan voor de andere kolommen met waarden een combinatie van variabelen. Zet dit in de vectorvorm, deze vectoren zijn dan de basis voor de kernel (zie blz. 201).

Normaal is de basis de set van unit-vectoren, maar dit hoeft niet altijd zo te zijn. De notatie van een vector met een andere basis is $[\mathbf{v}]_B$, met $\mathbf{v}$ een vector en B ook een vector voor de basis.

3.5 Lineaire transformaties

Een speciale form van een transformatie met een vector is een lineaire transformatie. Een lineaire transformatie is een transformatie die commutatief en associatief is, dat wil zeggen:

Een transformatie $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is een **lineaire transformatie** als

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ voor alle $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$
2. $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$ voor alle $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$ en alle scalaire c .

Alle matrix transformaties zijn lineaire transformaties.

De kolomvectoren van de matrix van een lineaire transformatie kan gezien worden waar de vectoren van de basis naartoe transformeren.

Als A een $m \times n$ matrix is, dan is de matrixtransformatie $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$T_A(\mathbf{c}) = A\mathbf{x}$$

een lineaire transformatie.

Elke lineaire transformatie heeft dan ook een matrix, dit is de **standaardmatrix**.

Lineaire transformaties kunnen samengesteld worden. De notatie is als volgt $(S \circ T)(\mathbf{v}) = S(T(\mathbf{v}))$. Deze samenstellingen zijn ook lineaire transformaties.

Als twee transformaties elkaar opheffen zijn ze inverse transformaties.

Als T een inverteerbare lineaire transformatie is, dan is de standaardmatrix $[T]$ een inverteerbare matrix.

4 Orthogonaliteit

4.1 Orthogonale matrix

Een set van orthogonale vectoren staan alle vectoren loodrecht op elkaar ($\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ voor alle i en j van de set).

Bij een set van orthonormale vectoren zijn deze vectoren ook genormaliseerd.

Een orthogonale matrix is een matrix dat bestaat uit orthonormale vectoren.

Voor een orthogonale matrix geldt dat $A^{-1} = A^T$

4.2 Orthogonale component

Een vector is orthogonaal aan een deelruimte W als het orthogonaal is voor elke vector in W . De set van deze vectoren is de orthogonale complement van W genoteerd als $W^\perp$.

$$(W^\perp)^\perp = W$$

Als A een $m \times n$ matrix is, dan:

$$(\text{row}(A))^\perp = \text{null}(A)$$

$$(\text{col}(A))^\perp = \text{null}(A^T)$$

4.3 Gram-Schmidt

Het Gram-Schmidt process om een orthogonale basis te vormen werkt als volgt:

Laat $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ een basis zijn voor een deelruimte W van $\mathbb{R}^n$, dan zijn de vectoren van de orthogonale basis:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \right) \mathbf{v}_2 \\ &\vdots\end{aligned}$$

4.4 Kleinste-kwadraten

Met de kleinste-kwadraten methode kunnen we voor een serie van vergelijkingen die niet consistent is de beste oplossing vinden.

Als A een $m \times n$ matrix is en $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^m$, dan heeft $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ altijd tenminste één kleinste-kwadraten oplossing.

De kleinste-kwadraten oplossing van $\mathbf{x}$ is $\bar{\mathbf{x}}$, met

$$(A^T A)\bar{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$$

Deze oplossing kan gevonden worden door Gaussian eliminatie op de matrix $[A^T A | A^T \mathbf{b}]$ toe te passen.

Bijvoorbeeld, voor de datapunten (1,2), (2,2), (3,4) is het systeem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

voor $y = a + bx$, dan is

$$[A^T A | A^T \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 8 \\ 6 & 14 & 18 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$\bar{\mathbf{x}}$ is dan $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, waaruit volgt dat $a = \frac{2}{3}$ en $b = 1$. De lijn is dan $y = \frac{2}{3} + x$.

De errorwaarde is de lengte van de errorvector $\mathbf{e}$. Deze vector is te berekenen met $\mathbf{e} = \mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}$. De errorwaarde is dan $\|\mathbf{e}\|$.

Voor bijvoorbeeld een parabool is de vergelijking $y = a + bx + cx^2$ te gebruiken.

5 Eigenwaardes en eigenvectoren

5.1 Eigenwaardes en eigenvectoren

Als A een $n \times n$ matrix is, dan is λ een eigenwaarde als er een niet-nul vector is voor $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. De vector $\mathbf{x}$ is een eigenvector voor A met die Eigenwaarde.

Alle eigenvectoren spannen de eigenruimte op voor de bijhorende eigenwaarde. Dit wordt genoteerd zoals bijvoorbeeld $E_5 = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$

5.2 Determinant

De determinant van een matrix is een scalair, die gezien kan worden als de schaling van een vlak (in $\mathbb{R}^2$) of een kubus (in $\mathbb{R}^3$). Als deze negatief is, is het vlak of de kubus omgedraaid.

De determinant van een matrix A wordt genoteerd als $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Een vierkante matrix heeft een inverse iff de determinant niet 0 is.

Met A en B $n \times n$ matrices, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

Als A inverteerbaar is, dan $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Voor een vierkante matrix A , $\det A = \det A^T$.

5.3 Eigenwaardes en eigenvectoren van vierkante matrices

De eigenwaardes van een vierkante matrix A zijn de oplossingen voor λ voor de vergelijking

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Deze vergelijking is uit te schrijven tot een polynoom, die dan op te lossen is.

De eigenvectoren zijn de vectoren van de kernel van $A - \lambda I$.

Als een matrix inverteerbaar is dan is 0 geen eigenwaarde van de matrix.

Als de eigenwaardes van een vierkante matrix allemaal verschillend zijn, dan zijn de bijhorende eigenvectoren lineair onafhankelijk.

De basis van de eigenvectoren van een symmetrische matrix ($A^T = A$) zijn altijd orthonormaal.

6 Diagonalisatie

6.1 Gelijksoortige matrices

Als A en B $n \times n$ matrices zijn, en er is een inverteerbare $n \times n$ matrix P met $P^{-1}AP = B$ (ook $AP = PB$), dan is A **gelijksoortig** / **similar** aan B .

Dit wordt opgeschreven als $A \sim B$.

Hieruit geldt ook dat als A gelijksoortig is aan B , B ook gelijksoortig is aan A (want P is inverteerbaar).

6.2 Diagonalisatie

Een $n \times n$ matrix A is **diagonaliseerbaar** als er een *diagonale matrix* D is waarvoor A gelijksoortig is. Oftewel, er is een inverteerbare $n \times n$ matrix P met $P^{-1}AP = D$.

Een matrix is alleen diagonaliseerbaar als deze matrix n lineaire onafhankelijke Eigenvectoren heeft. Dus diagonaliseerbaar is hetzelfde als dat de matrix een basis van Eigenvectoren heeft.

De matrix P is gevormd door de Eigenvectoren van de matrix als kolommen in P te plaatsen, als deze Eigenvectoren lineaire onafhankelijk zijn. Als de Eigenwaardes allemaal verschillend zijn, is de matrix sowieso diagonaliseerbaar.

6.3 Orthogonale diagonalisatie

Een vierkante matrix A is orthogonaal diagonaliseerbaar als er een orthogonale matrix Q en een diagonale matrix D bestaan zodat $Q^T A Q = D$.

(Voor een orthogonale matrix is de inverse ook de transpose.)

Symmetrische matrices ($A^T = A$) zijn altijd diagonaliseerbaar, en de basis van eigenvectoren is orthonormaal.

6.4 Kwadratische vorm

De expressie $ax^2 + by^2 + cxy$ is een kwadratische vorm en kan geschreven worden als

$$ax^2 + by^2 + cxy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

en

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

De **principal axis theorem**:

Met A de bijhorende symmetrische matrix van de kwadratische vorm, dan geldt:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Op deze manier is de kwadratische vorm om te schrijven naar eentje met alleen y_n variabelen.

6.5 Singulierewaardenontbinding

De **singulierewaardenontbinding** (SWO), ookwel **singular value decomposition** (SVD) beschrijft eigenschappen van een willekeurige matrix.

De swo van een matrix A met dimensies $m \times n$ is $U\Sigma V^T$. U is een $m \times m$ orthogonale matrix, V is $n \times n$ een orthogonale matrix, en Σ is een pseudo-diagonaalmatrix. De eerste r waardes op de diagonaal zijn de singuliere waardes van A , genoteerd met σ_n met $n = 1..r$. Deze zijn altijd van hoog naar laag gesorteerd op de diagonaal. De rest van Σ is nul. Σ is uniek, U en V niet.

Geometrisch gezien, als de determinant van A positief is, beschrijft de matrix V een rotatie, de singuliere waardes de schaling, en de matrix U de tweede rotatie.

De bepaling van de swo voor een matrix A is als volgt:

1. Bereken de vierkante matrix $A^T A$.
2. Bepaal de eigenwaardes en rangschik deze van groot naar klein. De **wortels** van deze waardes zijn de singuliere waardes, die op de diagonaal van Σ komen.
3. De **genormeerde** eigenvectors van de bijhorende eigenwaardes worden de kolommen van V .
4. De eerste r kolommen van U worden berekend met $\frac{1}{\sigma_i} A V_i$ met $i = 1..r$. De rest wordt aangevuld met orthonormale vectoren met bijvoorbeeld Gram-Schmidt.

De kolommen van U kunnen ook worden berekend door de genormaliseerde eigenvectoren van $A A^T$ te berekenen.

Als $A = U\Sigma V^T$ de swo is van een $m \times n$ matrix A , met $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de niet-nul singuliere waardes van A , dan:

- a. De rank van A is r .
- b. $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ is een orthonormale basis voor $\text{col}(A)$.
- c. $\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m\}$ is een orthonormale basis voor $\text{null}(A^T)$.

- d. $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ is een orthonormale basis voor $\text{row}(A)$.
- e. $\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ is een orthonormale basis voor $\text{null}(A)$.

De **pseudoinverse** van een $m \times n$ matrix A met de swo $U\Sigma V^T$ met $\Sigma = \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$ waar D een $r \times r$ matrix is met de niet-nul singuliere waarden, is gedefinieerd door

$$A^+ = V\Sigma^+U^T$$

met

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}$$