

LA

Florens Douwes
Studentnr. 11254483

11 februari 2018

1 Vectoren

1.1 Geometrie

Een vector, $x = 5$, $y = 3$ $[5, 3]$ Tail is de origin. Head is het waar het naar wijst. Individuele coördinaten zijn de componenten. $[0, 0]$ is de zero-vector. Vectoren beginnend bij O zijn in de standaardpositie. Vectoren zijn gelijk als ze dezelfde componenten hebben.

1.1.1 Vectoroptelling

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$$

Nota: optelling is commutatief, $u + v$ is hetzelfde als $v + u$.

1.1.2 Scalaire vermenigvuldiging

$$c\mathbf{v} = c[v_1, v_2] = [cv_1, cv_2]$$

Nota: als $c > 0$ blijft de vector dezelfde richting op wijzen. Als $c < 0$ wijst het de andere kant op. $c\mathbf{v}$ is $|c|$ keer langer dan $\mathbf{v}$.

Deze constanten heten **scalars**. Vectoren zijn scalaire meerderheden van elkaar als ze parallel zijn.

Speciaal is $-\mathbf{v}$, het negatief van $\mathbf{v}$. Hieruit volgt vector aftrekking. Het verschil tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ is $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Bij twee punten A en B, met vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, is de vector $\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

Vectoren in $\mathbb{R}^3$ functioneren hetzelfde maar dan met drie componenten. Dit is vanzelfsprekend uit te breiden tot $\mathbb{R}^n$

De algebraïsche eigenschappen op een rij:

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ zijn vectoren in $\mathbb{R}^n$, en c en d zijn scalars. Dan:

- a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ commutatief
- b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ associatief
- c. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- d. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- e. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ distributief
- f. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ distributief
- g. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
- h. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Een vector is een lineaire combinatie van vectoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i$ als er scalars zijn $c_1, c_2, \dots, c_k$ zodat $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$. Deze scalars zijn de coëfficiënten van de lineaire combinatie.

1.2 Lengte; Inproduct

1.2.1 Inproduct

Als $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_3 \end{bmatrix}$ en $v = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_3 \end{bmatrix}$ dan is het **dot product** / **inproduct** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Nota: de vectoren moeten hetzelfde aantal componenten hebben.

Nota: de uitkomst is een getal, niet een vector.

De algebraïsche eigenschappen op een rij:

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ zijn vectoren in $\mathbb{R}^n$. Dan:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ commutatief
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ distributief
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ als en alleen als $\mathbf{u} = 0$

De lengte van een vector $\mathbf{v}$ is $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$ is het niet-negatieve scalair $\|\mathbf{v}\|$ gedefiniëerd door:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Nota: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

De algebraïsche eigenschappen op een rij:

$\mathbf{v}$ is een vector in $\mathbb{R}^n$ en c een scalaire. Dan

- $\|\mathbf{v}\|$ is 0 als en alleen als $\mathbf{v} = 0$
- $\|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|$

Een vector van lengte 1 is de unit vector / eenheidsvector.

Een eenheidsvector waarvan een enkele component 1 is en de andere 0 is een standaard unit vector / standaard eenheidsvector.

De afstand $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tussen twee vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$ is.

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

De hoek van niet-nul vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$, is

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Hoeken zijn perpendicular / loodrecht als de hoek 90 graden is.

Bij vectoren in $\mathbb{R}^n$ heet dit orthogonality / orthogonaliteit. Volgens de hoekformule moet de hoek dan $\cos 90 = 0$ in. Hieruit volgt dat het inproduct 0 moet zijn.

Twee vectoren in $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$ zijn orthogonaal aan elkaar als

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Nota: $0 \cdot \mathbf{v} = 0$ voor elke vector $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n = 0$.

1.2.2 Projecties

Bij een projectie wordt een vector op een andere vector geprojecteerd.

Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn en $\mathbf{u} \neq 0$, dan is de projectie van $\mathbf{v}$ op $\mathbf{u}$ de vector $proj_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$

$$proj_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}$$

1.3 Lijnen en vlakken

1.3.1 Lijnen

Neem de vergelijking $2x + y = 0$.

Stel $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dan wordt de vergelijking $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$.

De vergelijking $ax + by = c$ voor een lijn is de **general form**.

$\mathbf{n}$ is hier orthogonaal aan de lijn, in andere woorden orthogonaal aan elke lijn parallel aan de lijn.

$\mathbf{n}$ is de **normal vector** / **normaalvector** aan deze lijn.

De **normal form** / **normaalvorm** van een lijn l in $\mathbb{R}^2$ is:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$$

of

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

waar $\mathbf{p}$ een punt op de lijn is, en $\mathbf{n} \neq 0$ een normaalvector is voor de lijn.

De vector parallel aan de lijn is de **direction vector** / **richtingsvector**.

De **vector form** / **vectorvorm** van een lijn l in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ is:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

waar $\mathbf{p}$ een punt op de lijn is en $\mathbf{d} \neq 0$ een richtingsvector is voor de lijn.

Dit kan ook losgetrokken worden om de **parametric equations** / **geparametiseerde vorm** te krijgen.

1.3.2 Vlakken

De **normal form** / **normaalvorm** van een vlak P in $\mathbb{R}^3$ is:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$$

of

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

waar $\mathbf{p}$ een punt op het vlak is, en $\mathbf{n} \neq 0$ een normaalvector is voor het vlak.

De vergelijking $ax + by + cz = d$ voor een vlak is de **general form**, waar $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ een normaalvector is voor P .

De **vector form** / **vectorvorm** van een vlak P in $\mathbb{R}^3$ is:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

waar $\mathbf{p}$ een punt op het vlak is en $\mathbf{u} \neq 0$ en $\mathbf{v} \neq 0$ parallel zijn aan het vlak en niet parallel aan elkaar.

Dit kan ook losgetrokken worden om de **parametric equations** / **geparametiseerde vorm** te krijgen.

1.3.3 Dimensies

In het algemeen geldt:

$$(\text{dimensie van object}) + (\text{dimensie van algemene vergelijkingen}) = \text{dimensie van ruimte}$$

Dit is de **blancing formula**.

Bijvoorbeeld:

Een lijn heeft 1 algemene vergelijking nodig in $\mathbb{R}^2$, maar 2 algemene vergelijkingen in $\mathbb{R}^3$.

Een vlak heeft in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ 1 algemene vergelijking nodig.

1.3.4 Afstanden

Afstanden van punten tot lijnen en vlakken kunnen berekend worden door middel van projectie.

Er zijn een aantal specifieke kortere formules voor afstanden:

Als een lijn l in $\mathbb{R}^2$ is en de vergelijking heeft de algemene form $ax + by = c$ dan is de afstand $d(B, l)$ met $B = (x_0, y_0)$ gegeven door de formule:

$$d(B, l) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Als een vlak P in $\mathbb{R}^3$ is en de vergelijking heeft de algemene form $ax + by + cz = d$ dan is de afstand $d(B, P)$ met $B = (x_0, y_0, z_0)$ gegeven door de formule:

$$d(B, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1.3.5 Kruisproduct

Het **cross product** / **kruisproduct** is een speciaal gereedschap dat gebruikt kan worden om in $\mathbb{R}^3$ een normaalvector te verkrijgen vanuit twee andere vectoren.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

2 Systemen van lineaire vergelijkingen

2.1 Systemen

Een **lineaire vergelijking** / **linear equation** met n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ is een vergelijking dat in de form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

waar de coëfficiënten $a_1, a_2, \dots, a_n$ en de constante term b constanten zijn.

Een **oplossing** van zo een systeem is een vector waar de componenten de vergelijking oplossen.

Een **systeem van lineaire vergelijkingen** is een eindige set van lineaire vergelijkingen. Een oplossing van een systeem van lineaire vergelijkingen is een vector dat een oplossing is van alle vergelijkingen. Een oplossingsset is een set van van alle oplossingen van zo een systeem.

Een systeem van lineaire vergelijkingen met echte coëfficiënten heeft

- (a) een unieke oplossing (consistent)
- (b) oneindig veel oplossingen (consistent)
- (c) geen oplossingen (inconsistent)

Twee systemen zijn gelijk als ze dezelfde oplossingsset hebben.

Systemen kunnen door herschrijven makkelijker gemaakt worden, zodat er door middel van **back substitution** de oplossing gevonden kan worden.

2.2 Oplossen van systemen

Het systeem

$$\begin{aligned}x - y - z &= 2 \\ 3x - 3y + 2z &= 16 \\ 2x - y + z &= 9\end{aligned}$$

Kan in een **augmented matrix** geschreven worden:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

Daarna kan je vergelijkingen bij elkaar optellen en aftrekken, en omdraaien:

trek drie keer de eerste vergelijking van de tweede af

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

trek twee keer de eerste vergelijking van de derde af

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right]$$

draai vergelijkingen twee en drie om

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right]$$

Deze matrix is goed op te lossen met back substitution.

De **coëfficiëntmatrix** / **coefficient matrix** is de matrix met alle coëfficiënten van de variabelen, en de **aangevulde matrix** / **augmented matrix** is de coëfficiëntmatrix met een extra kolom voor de constante termen.

Een matrix is in de **rij-echelonvorm** / **row echelon form** als:

1. rijen met alleen nullen staan onderaan.
2. voor elke niet-nul rij, het eerste niet-nul cijfer (de **leading entry**) is in een kolom links van alle leading entries eronder.

De volgende elementaire rijbewerkingen gelden:

1. wissel rijen om.
2. vermenigvuldig een rij met een niet-nul constante.
3. voeg een (meervoud van) rij toe aan een andere rij.

Dit impliceert ook deling en aftrekking.

Matrices zijn **row equivalent** als er een sequentie van rijbewerkingen is die de matrix in de andere matrix kan omzetten.

De stappen van een augmented matrix schrijven, elementaire rijbewerkingen toepassen, en back substitution gebruiken om het systeem op te lossen, heet **Gaussian elimination**.

Van het systeem

$$\begin{aligned}w - x - y + 2z &= 1 \\2w - 2x - y + 3z &= 3 \\-w + x - y &= -3\end{aligned}$$

is de augmented matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

welke gereduceerd kan worden naar

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

is dan het systeem

$$\begin{aligned}w - x - y + 2z &= 1 \\y - z &= 1\end{aligned}$$

welke oneindig oplossingen heeft.

Met back substitution kan er het systeem alsnog opgelost worden, maar dan met variabelen.

De leading variabelen zijn w en y , de vrije variabelen zijn x en z .

Neem, $y = 1 + z$:

$$\begin{aligned}w &= 1 + x + y - 2z \\&= 1 + x + (1 + z) - 2z \\&= 2 + x - z\end{aligned}$$

Als de parameters $x = s$ en $z = t$ aangewezen worden, kan de oplossing geschreven worden in vectorvorm:

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit laat iets heel belangrijks zien: in een consistent systeem zijn de vrije variabelen de variabelen die niet leading variabelen zijn. Hiermee kunnen we het aantal vrije variabelen voorspellen.

De **rank** van een matrix is het aantal niet-nul rijen in een matrix in row echelon vorm.

De rank wordt aangegeven voor een matrix A met $rank(A)$.

Als A een coëfficiëntenmatrix van een systeem van lineaire vergelijkingen is met n variabelen, dan:

$$\text{aantal vrije variabelen} = n - rank(A)$$

2.2.1 Reduced row echelon form

Een matrix is in **reduced row echelon form** als:

1. het is in row echelon vorm.
2. het eerste cijfer in elke niet-nul rij is een 1 (**leading 1**).
3. Elke kolom met een leading 1 heeft voor de rest nullen.

De stappen van een augmented matrix schrijven, elementaire rijbewerkingen toepassen om een rref matrix te krijgen, en back substitution gebruiken om het systeem op te lossen als het consistent is, heet **Gauss-Jordan elimination**.

Met een rref matrix kan nog makkelijker met variabelen worden opgelost:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

wordt de rref vorm

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Het systeem is nu

$$\begin{aligned}w - x + z &= 2 \\ y - z &= 1\end{aligned}$$

oplossen voor de leading variabelen

$$\begin{aligned}w &= 2 + x - z \\ y &= 1 + z\end{aligned}$$

met $x = s$ en $z = t$ dan kan het weer geschreven worden in de vectorvorm

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{bmatrix}$$

Er is één type systeem dat altijd tenminste één oplossing heeft:

Een systeem van lineaire vergelijkingen is **homogeen** / **homogeneous** als de constante term in elke vergelijking 0 is ($[A|0]$).

Als $[A|0]$ een homogeen systeem van m lineaire vergelijkingen is met n variabelen, waar $m < n$, dan heeft het systeem oneindig oplossingen.

2.3 Spans

De $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ van de vectoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ is de set van alle lineaire combinaties van deze vectoren.

In andere woorden, de span heeft aan welke vectoren gemaakt kunnen worden vanuit een set van vectoren.

Gemaakt staat hier voor lineaire combinaties, dat wil zeggen, vermenigvuldigingen met een constante en optellingen.

Vectoren zijn **lineair onafhankelijk** / **linearly dependent** dan kan geen enkele vector in de set gemaakt worden door andere vectoren. Vectoren zijn **lineair afhankelijk** / **linear dependent** als een vector door de andere vectoren gemaakt kan worden.

Als $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ kolomvectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn en A de $n \times m$ matrix $[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_m]$ is met als kolommen deze vectoren, dan zijn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ lineair afhankelijk als en alleen als het homogeneous lineaire systeem met de augmented matrix $[A|0]$ een niet-triviale oplossing heeft.

Als $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ rijvectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn en A de $m \times n$ matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$ is met als rijen deze vectoren, dan zijn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ lineair afhankelijk als en alleen als $\text{rank}(A) < m$.