

LA stof

Folkert van Verseveld

May 28, 2018

0 Inleiding en opmerkingen

0.1 Afkortingen

desda Dan en slechts dan als (Engels: *if and only if*).

0.2 Opmerkingen

De samenvatting is zo gemaakt dat alle hoofd- en subkoppen, net als de theorema's, identiek genummerd zijn met het boek. Hoofdstuk 6 stond niet bij tentamenstof, *maar het tentamen en de opgaven vragen wel stof wat daarin staat*. Deze stof is impliciet wel af te leiden, maar het lijkt me wel nuttig. Alles is kort en bondig opgeschreven en opmerkingen bij het hoorcollege zijn ook verwerkt.

0.3 EULA/Disclaimer

Ik ben niet verantwoordelijk voor fouten in de samenvatting! Zolang je mijn samenvatting niet verkoopt of aanpast zonder aan te geven dat je het aangepast hebt en ik de originele versie gemaakt heb, mag je ermee doen wat je wilt.

1 Vectoren

1.1 Geometrie en Algebra van Vectoren

Notatie: $\overrightarrow{AB}$ of $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = [3, 2]$. 3 en 2 zijn componenten. A is het initiële punt of staart. B is het terminale punt of kop. Een vector met een punt in de oorsprong is in *standaardpositie*.

1.1.1 Optellen

Zij $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, dan $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n]$.

1.1.2 Aftrekken

Zij $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, dan $\mathbf{u} - \mathbf{v} = [u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n]$. Het verschil tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

1.1.3 Scalarvermenigvuldiging

Zij $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ en constante c , dan $c\mathbf{v} = c[v_1, v_2, \dots] = [cv_1, cv_2, \dots, cv_n]$. $c\mathbf{v}$ is een geschaalde veelvoud van $\mathbf{v}$. De richting van $\mathbf{v}$ is hetzelfde als $c > 0$, de nulvector als $c = 0$ en omgekeerd als $c < 0$.

1.1.4 Algebraïsche eigenschappen van vectoren in $\mathbb{R}^n$

- | | |
|---|------------------|
| • $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | Commutativiteit |
| • $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | Associativiteit |
| • $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ | |
| • $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ | |
| • $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ | Distributiviteit |
| • $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ | Distributiviteit |
| • $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ | |
| • $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ | |
| • $c\mathbf{u} = \mathbf{uc}$ | Commutativiteit |

1.1.5 Lineaire combinaties

Vector $\mathbf{v}$ is lineaire combinatie als geldt dat vectoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ en scalars $c_1, c_2, \dots, c_n$ $\mathbf{v}$ kunnen maken als $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$.

1.2 Lengte en hoek: inproduct/scalar product/dotproduct

1.2.1 Inproduct

Zij $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, dan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = [u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n]$.

Theorema 1.1. Zij $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectoren in $\mathbb{R}^N$ en c scalar:

- | | |
|---|------------------|
| • $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ | Commutativiteit |
| • $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ | Distributiviteit |
| • $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ | |
| • $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \geq 0$ en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ desda $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ | |

1.2.2 Lengte

$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$. Als $\|v\| = 1$, dan is $\mathbf{v}$ eenheidsvector.

Theorema 1.2. Zij $\mathbf{v}$ vector in $\mathbb{R}^n$ en c is scalar:

- $\|\mathbf{v}\| = 0$ desda $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- $\|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|$.

Normaliseren van $\mathbf{v}$: $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$.

1.2.3 Afstand

$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

1.2.4 Hoek

Cosinus van hoek tussen twee vectoren: $\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$.

1.2.5 Orthogonaliteit

Vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ zijn orthogonaal als $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

1.2.6 Vectorprojectie

Zij $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ vectoren in $\mathbb{R}^n$ en $\mathbf{u} \neq 0$. Projectie $\mathbf{v}$ op $\mathbf{u}$: $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}$

1.3 Lijnen en vlakken

1.3.1 Lijnen in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$

Normaalvector is vector die loodrecht (normaal) op een vector staat. Zij $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dan $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$. De richtingsvector halen we uit de normaalvector door twee componenten om te wisselen en van één component het teken om te klappen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Herschrijven naar vergelijking $\mathbf{l}$: $\mathbf{x} = t\mathbf{d}$. We zien dat $\mathbf{d}$ de richtingsvector is.

1.3.2 Normaalvorm van lijnvergelijking $\mathbf{l}$ in $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 \text{ of } \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

met $\mathbf{p}$ op $\mathbf{l}$ en $\mathbf{n} \neq 0$ is normaalvector voor $\mathbf{l}$. Algemene vorm: $ax + by = c$, met normaalvector $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

1.3.3 Vectorvorm van lijnvergelijking $\mathbf{l}$ in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

met $\mathbf{p}$ op $\mathbf{l}$ en $\mathbf{d} \neq 0$ is richtingsvector voor $\mathbf{l}$. Vergelijkingen overeenkomend met vectorvormcomponenten zijn *parametrische vergelijkingen* van $\mathbf{l}$.

1.3.4 Normaalvorm van vlakvergelijking $\mathcal{P}$ in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 \text{ of } \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

met $\mathbf{p}$ op $\mathcal{P}$ en $\mathbf{n} \neq 0$ is normaalvector voor $\mathcal{P}$. Algemene vorm: $ax + by + cz = d$, met normaalvector $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1.3.5 Vectorvorm van vlakvergelijking $\mathcal{P}$ in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

met $\mathbf{p}$ op $\mathcal{P}$ en $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ zijn richtingsvectoren voor $\mathcal{P}$. $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ zijn niet-nul en parallel aan $\mathcal{P}$, maar niet aan elkaar. Vergelijkingen overeenkomend met vectorvormcomponenten zijn *parametrische vergelijkingen* van $\mathcal{P}$.

1.3.6 Lijnvergelijkingen in $\mathbb{R}^2$

Normaalvorm	Algemene vorm	Vectorvorm	Parametrische vorm
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$	$ax + by = c$	$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$	$\begin{cases} x = p_1 + td_1 \\ y = p_2 + td_2 \end{cases}$

1.3.7 Lijnen en vlakken in $\mathbb{R}^3$

	Normaalvorm	Algemene vorm	Vectorvorm	Parametrische vorm
Lijnen	$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{p}_2 \end{cases}$	$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$	$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$	$\begin{cases} x = p_1 + td_1 \\ y = p_2 + td_2 \\ z = p_3 + td_3 \end{cases}$
Vlakken	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$ óók: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$	$ax + by + cz = d$	$\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$\begin{cases} x = p_1 + su_1 + tv_1 \\ y = p_2 + su_2 + tv_2 \\ z = p_3 + su_3 + tv_3 \end{cases}$

1.3.8 Balancerende formule voor dimensieruimte

objectdimensie + aantal algemene vergelijkingen = dimensieruimte

Voorbeelden:

- 3d vlak is 2d
- 2d lijn is 1d
- 1d punt is 0d

1.3.9 Lijnaafstand willekeurig punt B tot lijn l

$$d(B, l) = \|\mathbf{v} - \text{proj}_l(\mathbf{v})\| = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.3.10 Lijnaafstand willekeurig punt B tot vlak $\mathcal{P}$

- Bepaal willekeurig punt A op vlak $\mathcal{P}$
- Bereken $d(B, \mathcal{P}) = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{AB})\| = \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

1.3.11 Kruisproduct (alleen in $\mathbb{R}^3$)

Zij $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$, dan:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

2 Lineaire vergelijkingssystemen

2.1 Introductie lineaire vergelijking

Stelsel van vorm: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ met constante termen: coëfficiënten $a_1, a_2, \dots, a_n$ en b . De oplossingsverzameling is een vector. Bij een unieke oplossing of oneindig veel oplossingen is het stelsel *consistent*, anders *inconsistent*. Met

terugwerkende kracht het stelsel herschrijvend oplossen heet *terugsubstitutie*. In matrixvorm gebruiken we een augmented matrix, waarbij de toekenning van elke lineaire vergelijking gescheiden wordt door het augmented deel. Bijvoorbeeld:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

Als we de constanten (de laatste kolom) weghalen dan is de augmented matrix de coëfficiëntenmatrix. Een *homogeen* stelsel bevat alleen 0'en in de constantenkolom.

2.2 Lineaire vergelijkingoplosmethoden

2.2.1 Rij echelonvorm

- Rijen van uitsluitend 0'en staan onderaan.
- Eerste niet nul (de *leading entry*) voor elke niet-nul rij staat in kolom links van alle leading entries eronder.

Als een rij tijdens het reduceren naar echelonvorm 0 wordt, maar de constante in de augmented matrix niet 0 is, dan is het inconsistent. De gekozen leading entry tijdens rijreductie is de *pivot*. Het process heet *pivoting*.

2.2.2 Elementaire rijoperaties

- Wisselen van twee rijen.
- Rij met niet-nul constante vermenigvuldigen.
- Tel veelvoud van andere rij erbij op.

2.2.3 Rij-equivalentie

Matrix A en B zijn rij-equivalent desda A om te zetten is naar B met rijoperaties.

Theorema 2.1. *Matrices A en B zijn rij-equivalent desda ze reduceerbaar zijn tot dezelfde rij-echelonvorm.*

2.2.4 Gaussien eliminatiemethode

- Herschrijf stelsel van vergelijkingen naar augmented matrix.
- Zet augmented matrix om naar rij-echelonvorm met rijoperaties.
- Los rij-gereduceerde matrix equivalentiesysteem op met terugsubstitutie.

Leading variables kunnen leading entries van systemen met oneindig veel oplossingen uitdrukken met andere variabelen (free variables). Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

Heeft leading variabelen w en y , vrije variabelen x en z . Neem $y = 1 + z$, dan:

$$\begin{aligned} w &= 1 + x + y - 2z \\ &= 1 + x + (1 + z) - 2z \\ &= 2 + x - z \end{aligned}$$

Zij $x = s$ en $z = t$, dan is oplossingsvector:

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2.5 Matrixrang

Aantal niet-0 rijen in rij echelonvorm.

Theorema 2.2. *Zij A coëfficiëntenmatrix van lineaire vergelijkingensysteem met n variabelen. Als A consistent, dan:*

$$\text{aantal vrije variabelen} = n - \text{rang}(A)$$

2.2.6 Rijgereduceerde echelonvorm matrix

- Matrix is in rij-echelonvorm.
- Leading entry in niet-0 rij is 1.
- Elke kolom met een leading 1 heeft op alle andere plekken 0'en.

2.2.7 Gauss-Jordan eliminatiemethode

- Herschrijf stelsel van vergelijkingen naar augmented matrix.
- Zet augmented matrix om naar rijgereduceerde echelonvorm met rijoperaties.
- Los rij-gereduceerde matrix equivalentiesysteem op met terugsubstitutie.

Theorema 2.3. *Zij $[A \mid 0]$ een homogeen stelsel met m lineaire vergelijkingen en n variabelen, met $m < n$. Dan zijn er oneindig veel oplossingen.*

2.3 Opspanning verzamelingen en lineaire onafhankelijkheid

Zij $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vectorverzameling in $\mathbb{R}^n$ dan is $\text{span}(S)$ de verzameling van alle lineaire combinaties van $v_1, v_2, \dots, v_n$. Als $\text{span}(S) = \mathbb{R}^n$, dan spant S de verzameling $\mathbb{R}^n$ op.

2.3.1 Lineaire afhankelijkheid

Vectoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ zijn afhankelijk als met scalars $c_1, c_2, \dots, c_n$ met minstens één scalar $\neq 0$ geldt: $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$. Anders zijn ze lineair onafhankelijk.

Theorema 2.4. *Vectoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ zijn lineair afhankelijk desda er een vector als lineaire combinaties uitgedrukt kan worden.*

Theorema 2.5. *Zij $v_1, v_2, \dots, v_n$ (kolom)vectoren in $\mathbb{R}^n$ en A $m \times n$ matrix $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$. Dan $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineair afhankelijk desda homogeen lineair systeem met augmented matrix $[A \mid 0]$ niet-triviale oplossing heeft.*

Theorema 2.6. *Zij $v_1, v_2, \dots, v_n$ rijvectoren in $\mathbb{R}^n$ en A $m \times n$ matrix $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$.*

Dan $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineair afhankelijk desda $\text{rang}(A) < m$.

Theorema 2.7. Elke verzameling met m vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn lineair afhankelijk als $m > n$.

3 Matrices

3.1 Matrixoperaties

Een matrix is een rechthoekige lijst van getallen: de *entries* of *elementen*.

Aantal kolommen	Aantal rijen	Term
1	n	rijmatrix/rijvector
m	1	kolommatrix/kolomvector
m	m	vierkante matrix
n	n	

Let op volgorde kolommen en rijen met notatie! Een vierkante matrix met alleen niet-0'en in diagonaal is een *diagonale matrix*. Matrices met dezelfde scalars in diagonale matrix is een *scalar matrix*. Als deze 1 is dan is het een *identiteitsmatrix*. Matrices met dezelfde afmetingen en elementen zijn identiek.

3.1.1 Optellen en scalar vermenigvuldigen

Zij A en B $m \times n$ matrices. Dan $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$. Zij A een $m \times n$ matrix en c scalar. Dan $cA = c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$.

3.1.2 Negatie en verschil

Zij A en B $m \times n$ matrices. Dan $(-1)A = -A$ en $A - B = A + (-B)$.

3.1.3 Nulmatrix

Nulmatrix bestaat uitsluitend uit 0'en. Zij A matrix, dan: $A + O = A = O + A$ en $A - A = O = -A + A$.

3.1.4 Matrixvermenigvuldiging

Matrixvermenigvuldiging gaat anders dan gewone vermenigvuldiging, want het is **niet commutatief**. De rechteroperand wordt als het ware gekanteld en wordt door de linkeroperand 'gezeefd'. Zij A een $m \times n$ matrix en B een $n \times r$ matrix, dan: $C = AB$ een $m \times r$ matrix met: $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

Alternatieve manier wat makkelijk op papier is uit te werken:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+2*7 & 1*6+2*8 \\ 3*5+4*7 & 3*6+4*8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Theorema 3.1. Zij A een $m \times n$ matrix, $\mathbf{e}_i$ een $1 \times m$ standaard eenheidsvector en $\mathbf{e}_j$ een $n \times 1$ standaard eenheidsvector. Dan:

- $\mathbf{e}_i A$ is de i -de rij van A .
- $A\mathbf{e}_j$ is de j -de kolom van A .

3.1.5 Gepartitioneerde matrices

Een matrices kan opgeknipt worden in *submatrices* door de *blokken* te *partitioneren*. Bijvoorbeeld:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I & B \\ O & C \end{bmatrix}$$

3.1.6 Matrixmachten

Zij A een $m \times n$ matrix, dan: $A^k = AA \dots A$. Als A vierkant en $r, s \in \mathbb{N}^+$, dan: $A^r A^s = A^{r+s}$ en $(A^r)^s = A^{rs}$.

3.1.7 Transpose van matrix

Zij A een $m \times n$ matrix, dan is A^T een $n \times m$ matrix waarbij rijen en kolommen verwisseld zijn.

3.1.8 Matrixsymmetrie

Vierkante matrix A is symmetrisch desda $A = A^T$ ofwel $\forall i, j \ A_{ij} = A_{ji}$.

3.2 Matrix Algebra

3.2.1 Eigenschappen van optellen en scalar vermenigvuldigen

Theorema 3.2. *Zij A, B en C matrices van zelfde grootte en c en d scalars, dan:*

- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| • $A + B = B + A$ | <i>Commutativiteit</i> |
| • $(A + B) + C = A + (B + C)$ | <i>Associativiteit</i> |
| • $A + O = A$ | |
| • $A + (-A) = O$ | |
| • $c(A + B) = cA + cB$ | <i>Distributiviteit</i> |
| • $(c + d)A = cA + dA$ | <i>Distributiviteit</i> |
| • $c(dA) = (cd)A$ | |
| • $1A = A$ | |

Matrices $A_1, A_2, \dots, A_k$ zijn lineair onafhankelijk als de unieke oplossing de triviale is: $c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_k A_k = O$.

3.2.2 Eigenschappen van matrixvermenigvuldiging

Theorema 3.3. *Zij A, B en C matrices, van grootte zodanig dat operaties gedefinieerd zijn, en k een scalar, dan:*

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$

- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- $I_m A = A = A I_n$ als A grootte $m \times n$ heeft.

3.2.3 Eigenschappen van transpose

Theorema 3.4. *Zij A en B matrices, van grootte zodanig dat operaties gedefinieerd zijn, en k een scalar, dan:*

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = k(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^r)^T = (A^T)^r$ met $r \in \mathbb{N}^+$

Theorema 3.5. *Als A een vierkant matrix, dan $A + A^T$ symmetrisch. Voor elke matrix A , AA^T en $A^T A$ zijn symmetrisch.*

3.3 Matrixinverse

Zij A een $n \times n$ matrix, de *inverse* van A is een $n \times n$ matrix A' dat: $AA' = I$ en $A'A = I$, met $I = I_n$ de $n \times n$ identiteitsmatrix. Als A' bestaat, dan is A *inverteerbaar*.

Theorema 3.6. *Als A inverteerbare matrix is, dan is inverse uniek.*

Theorema 3.7. *Als A een inverteerbare $n \times n$ matrix is, dan is unieke oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gegeven door $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$*

3.3.1 Inverse 2×2 matrix

Theorema 3.8. *Als A van vorm: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan is A inverteerbaar als $ad - bc \neq 0$, dan:*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3.3.2 Eigenschappen inverteerbare matrices

Theorema 3.9. :

- Als A inverteerbare matrix, dan A^{-1} inverteerbaar en $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Als A inverteerbare matrix en $c \neq 0$ scalar, dan cA inverteerbare matrix en $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- Als A en B inverteerbare matrices van zelfde grootte, dan AB inverteerbaar en $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Als A inverteerbare matrix, dan A^T inverteerbaar en $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Als A een inverteerbare matrix, dan A^n inverteerbaar voor $\forall n \in \mathbb{N}^+$ en $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

De inverse van een product van inverteerbare matrices is het product van hun inversen in omgekeerde volgorde.

3.3.3 Negatieve machten van matrices

Als A een inverteerbare matrix en $n \in \mathbb{N}^+$, dan $A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$.

3.3.4 Elementaire matrices

Een elementaire matrix E is een identiteitsmatrix waar een elementaire rij-operatie op gedaan is. Bijvoorbeeld:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } EA = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Theorema 3.10. *Zij E een elementaire matrix voortkomend uit I_n . Als dezelfde rij-operatie op een $n \times r$ matrix A gedaan wordt is het resultaat hetzelfde als EA .*

Theorema 3.11. *Elke elementaire matrix is inverteerbaar en zijn inverse is een elementaire matrix van hetzelfde type.*

3.3.5 Fundamentele inverteerbare matrixtheorie

Theorema 3.12. *Zij A een $n \times n$ matrix. Dan zijn volgende stellingen equivalent:*

- A is inverteerbaar.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is een unieke oplossing $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is de enige triviale oplossing.
- De gereduceerde rij-echelonvorm van A is I_n .
- A is een product van elementaire matrices.

Theorema 3.13. *Zij A een vierkante matrix. Als B een vierkante matrix is zodanig dat $AB = I$ of $BA = I$ dan is A inverteerbaar en $B = A^{-1}$.*

Theorema 3.14. *Zij A een vierkante matrix. Als een aantal elementaire rij-operaties A reduceert naar I , dan transformeren dezelfde rij-operaties I in A^{-1} .*

3.3.6 Gauss-Jordan methode voor bepalen van inverse

Het gehele process komt neer op:

$$[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$$

Als de linkerkant van de augmented matrix de identiteitsmatrix is, dan is de rechterkant de inverse van A .

3.5 Deelruimten, Basis, Dimensie en Rang

3.5.1 Definitie deelruimten

Een *deelruimte* van $\mathbb{R}^n$ is elke verzameling S van vectoren in $\mathbb{R}^n$ zodanig dat:

- De nulvector $\mathbf{0} \in S$.
- Als $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, dan $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$. S is gesloten onder optellen.
- Als $\mathbf{u} \in S$ en c scalar, dan $c\mathbf{u} \in S$. S is gesloten onder scalaire vermenigvuldiging.

Door punt 2 en 3 te combineren krijgen we dat S gesloten moet zijn onder lineaire combinaties: Als $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \in S$ en $c_1, c_2, \dots, c_k$ scalars, dan $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_k\mathbf{u}_k \in S$.

Theorema 3.19. *Zij $v_1, v_2, \dots, v_k$ vectoren in $\mathbb{R}^n$. De opspanning $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ is een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.*

3.5.2 Rijruimte en kolomruimte

Zij A een $m \times n$ matrix. De *rijruimte* (row space) van A is de deelruimte $\text{rij}(A)$ van $\mathbb{R}^n$ opgespannen door A 's rijen. De *kolomruimte* (column space) van A is de deelruimte $\text{kolom}(A)$ van $\mathbb{R}^n$ opgespannen door A 's kolommen.

Theorema 3.20. *Zij B elke matrix row-equivalent met een matrix A . Dan $\text{row}(B) = \text{row}(A)$.*

Zij A een $m \times n$ matrix en N de verzameling oplossingen van het homogene lineaire systeem $A\mathbf{x} = 0$. Dan is N een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

3.5.3 Nullspace

Theorema 3.21. *Zij A een $m \times n$ matrix. De nullspace van A is de deelruimte van $\mathbb{R}^n$ bestaande uit oplossingen van het homogene lineaire systeem $A\mathbf{x} = 0$. Notatie: $\text{null}(A)$.*

Theorema 3.22. *Zij A een matrix met reële getallen. Voor elk systeem van lineaire vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geldt exact één van de beweringen:*

- *Er is geen oplossing.*
- *Er is een unieke oplossing.*
- *Er zijn oneindig veel oplossingen.*

3.5.4 Basis

De *basis* van een deelruimte S van $\mathbb{R}^n$ is een verzameling vectoren in S zodat het S opspant en lineair onafhankelijk is.

3.5.5 Dimensie en rang

Theorema 3.23. *Zij S een deelruimte van $\mathbb{R}^n$. Dan hebben elke twee basissen van S hetzelfde aantal vectoren.*

Als S een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$, dan is het aantal vectoren in een basis van S de *dimensie* van S . Notatie: $\dim(S)$.

Theorema 3.24. *Zij A een matrix, dan $\dim(\text{row}(A)) = \dim(\text{col}(A))$.*

De *rang* van een matrix A is de dimensie van de row- en colspace. Notatie: $\text{rang}(A)$.

Theorema 3.25. *Voor elke matrix A geldt: $\text{rang}(A^T) = \text{rang}(A)$.*

3.5.6 Nullity

De *nullity* van matrix A is: $\text{nullity}(A) = \dim(\text{nullspace}(A))$.

3.5.7 Rank theorema

Theorema 3.26. Als A een $m \times n$ matrix is, dan $\text{rang}(A) + \text{nullity}(A) = n$.

3.5.8 Fundamentele inventeerbare matrixtheorie v2

Theorema 3.27. Zij A een $n \times n$ matrix. De volgende stellingen zijn equivalent:

- A is inventeerbaar.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is een unieke oplossing $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- $A\mathbf{x} = 0$ is de enige triviale oplossing.
- De gereduceerde rij-echelonvorm van A is I_n .
- A is een product van elementaire matrices.
- $\text{rang}(A) = n$.
- $\text{nullity}(A) = 0$.
- De kolomvectoren van A zijn lineair onafhankelijk.
- De kolomvectoren van A spannen $\mathbb{R}^n$ op.
- De kolomvectoren van A vormen een basis voor $\mathbb{R}^n$.
- De rijvectoren van A zijn lineair onafhankelijk.
- De rijvectoren van A spannen $\mathbb{R}^n$ op.
- De rijvectoren van A vormen een basis voor $\mathbb{R}^n$.

Theorema 3.28. Zij A een $m \times n$ matrix, dan:

- $\text{rang}(A^T A) = \text{rang}(A)$.
- De $n \times n$ matrix $A^T A$ is inventeerbaar desda $\text{rang}(A) = n$.

Theorema 3.29. Zij S een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ een basis voor S . $\forall \mathbf{v} \in S : \mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k$ is uniek voor elke $\mathbf{v} \in S$.

3.6 Lineaire transformaties

Een transformatie $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is een *lineaire transformatie* als:

- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
- $\forall c \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$.

Theorema 3.30. Zij A een $m \times n$ matrix. Dan is matrixtransformatie $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gedefinieerd als $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ een lineaire transformatie.

3.6.1 Standaardmatrix A van lineaire transformatie T

Theorema 3.31. Zij $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ een lineaire transformatie. Dan is T een matrixtransformatie. Ofwel: $T = T_A$, met A een $m \times n$ matrix $A = [T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_n)]$.

3.6.2 Samengestelde lineaire transformaties

Als $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ en $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ lineaire transformaties zijn, dan is de *compositie* $S \circ T$ gedefinieerd als: $(S \circ T)(\mathbf{v}) = S(T(\mathbf{v}))$.

Theorema 3.32. Zij $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ en $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ lineaire transformaties. Dan is $S \circ T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ een lineaire transformatie. Hun standaardmatrices zijn gerelateerd door $[S \circ T] = [S][T]$.

3.6.3 Inverse van lineaire transformaties

Zij S en T lineaire transformaties van $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dan zijn S en T *inverse transformaties* als $S \circ T = I_n$ en $T \circ S = I_n$.

Theorema 3.33. *Zij $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een inverteerbare lineaire transformatie. Dan is de standaardmatrix $[T]$ een inverteerbare matrix en $[T^{-1}] = [T]^{-1}$.*

4 Eigenwaarden en eigenvectoren

4.1 Introductie

Zij A een $n \times n$ matrix. Scalar λ is een *eigenwaarde* van A als er niet-nul vector $\mathbf{x}$ bestaat zodanig dat $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. $\mathbf{x}$ is een *eigenvector*.

4.1.1 Eigenruimte

Zij A een $n \times n$ matrix en λ een eigenwaarde van A . E_λ is de *eigenruimte* van λ , samen met de nulvector.

4.2 Determinant

Zij $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, dan is de *determinant* van A de scalar $\det(A) = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

4.2.1 Determinant van $n \times n$ matrix

Zij $A = [a_{ij}]$ een $n \times n$ matrix, met $n \geq 2$. Dan is de determinant van A de scalar $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$.

4.2.2 Laplace Expansie theorema

Theorema 4.1. *De determinant van een $n \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$, met $n \geq 2$, kan berekend worden als $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$, met $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A)$.*

Theorema 4.2. *De determinant van een driehoekige matrix is het product van de elementen van de hoofddiagonaal. Zij A een $n \times n$ driehoekige matrix, dan $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.*

Theorema 4.3. *Zij $A = [a_{ij}]$ een vierkante matrix.*

- Als A een nulrij (kolom) heeft, dan $\det(A) = 0$.
- Als B verkregen wordt door twee rijen (kolommen) van A te wisselen, dan $\det(B) = -\det(A)$.
- Als A twee identieke rijen (kolommen) heeft, dan $\det(A) = 0$.
- Als B verkregen is door een rij (kolom) van A te vermenigvuldigen met k , dan $\det(B) = k \det(A)$.
- Als A , B en C identiek zijn behalve dat de i -de rij (kolom) van C de som is van de i -de rijen van A en B , dan $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.

- Als B verkregen is door een veelvoud van een rij (kolom) van A op te tellen met een andere rij (kolom), dan $\det(B) = \det(A)$.

4.2.3 Determinanten van elementaire matrices

Theorema 4.4. Zij E een $n \times n$ elementaire matrix.

- Als E voortkomt door twee rijen van I_n te wisselen, dan $\det(E) = -1$.
- Als E voortkomt door een rij van I_n te vermenigvuldigen met k , dan $\det(E) = k$.
- Als E voortkomt door een veelvoud van een rij van I_n op te tellen bij een andere rij, dan $\det(E) = 1$.

Theorema 4.5. Zij B een $n \times n$ matrix en E een $n \times n$ elementaire matrix. Dan $\det(EB) = (\det(E))(\det(B))$.

Theorema 4.6. Een vierkante matrix A is inverseerbaar desda $\det(A) \neq 0$.

4.2.4 Determinanten en matrixoperaties

Theorema 4.7. Als A een $n \times n$ matrix is, dan $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Theorema 4.8. Als A en B $n \times n$ matrices zijn, dan $\det(AB) = (\det(A))(\det(B))$.

Theorema 4.9. Zij A inverseerbaar, dan $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Theorema 4.10. Voor elke vierkante A matrix, $\det(A) = \det(A^T)$.

4.2.5 Cramers regel en adjunctmatrix

Adjunctmatrix is de transpose van alle cofactoren van A .

Theorema 4.11. Zij A een inverseerbare $n \times n$ matrix en vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. De unieke oplossing $\mathbf{x}$ van het systeem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is:

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)} \text{ voor } i = 1, \dots, n$$

Theorema 4.12. Zij A is een inverseerbare $n \times n$ matrix. Dan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Theorema 4.13. Zij A een $n \times n$ matrix. Dan $a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n} = \det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \dots + a_{n1}C_{n1}$.

Theorema 4.14. Zij A een $n \times n$ matrix en B verkregen door het wisselen van twee rijen (kolommen) van A . Dan $\det(B) = -\det(A)$.

4.3 Eigenwaarden en eigenvectoren van $n \times n$ matrices

De eigenwaarden van een vierkante matrix A zijn precies de oplossingen λ van de vergelijking $\det(A - \lambda I) = 0$. Als we $\det(A - \lambda I)$ uitwerken, krijgen we een polynoom in λ , het *karakteristieke polynoom* van A . De vergelijking is de *karakteristieke vergelijking* van A .

Zij A een $n \times n$ matrix.

- Bereken de karakteristieke polynoom $\det(A - \lambda I)$ van A .
- Vind elke eigenwaarde van A door de karakteristieke vergelijking op te lossen.
- Voor elke gevonden eigenwaarde, vind de nullspace van $A - \lambda I$. Dit is eigenruimte E_λ en de niet-nul vectoren zijn de eigenvectoren van A .
- Vind een basis voor elke eigenruimte.

Theorema 4.15. *De eigenwaarden van een driehoekige matrix zijn de elementen in de diagonaal.*

Theorema 4.16. *Een vierkante matrix A is inverseerbaar desda 0 geen eigenwaarde is van A .*

4.3.1 Fundamentele inverseerbare matrixtheorie v3

Theorema 4.17. *Zij A een $n \times n$ matrix. De volgende stellingen zijn equivalent:*

- A is inverseerbaar.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is een unieke oplossing $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- $A\mathbf{x} = 0$ is de enige triviale oplossing.
- De gereduceerde rij-echelonvorm van A is I_n .
- A is een product van elementaire matrices.
- $\text{rang}(A) = n$.
- $\text{nullity}(A) = 0$.
- De kolomvectoren van A zijn lineair onafhankelijk.
- De kolomvectoren van A spannen $\mathbb{R}^n$ op.
- De kolomvectoren van A vormen een basis voor $\mathbb{R}^n$.
- De rijvectoren van A zijn lineair onafhankelijk.
- De rijvectoren van A spannen $\mathbb{R}^n$ op.
- De rijvectoren van A vormen een basis voor $\mathbb{R}^n$.
- $\det(A) \neq 0$.
- 0 is geen eigenwaarde van A .

Theorema 4.18. *Zij A een vierkante matrix met eigenwaarde λ met overeenkomende eigenvector $\mathbf{x}$.*

- Zij $n \in \mathbb{N}^+$, eigenwaarde λ^n van A^n met overeenkomende eigenvector $\mathbf{x}$.
- Als A inverseerbaar, dan $\frac{1}{\lambda}$ eigenwaarde van A^{-1} met overeenkomende eigenvector $\mathbf{x}$.
- Als A inverseerbaar, dan voor elke integer $n \in \mathbb{N}^+$ is λ^n een eigenwaarde van A^n met overeenkomende eigenvector $\mathbf{x}$.

Theorema 4.19. *Stel $n \times n$ matrix A heeft eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ met overeenkomende eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Als $\mathbf{x}$ een vector in $\mathbb{R}^n$ is kan deze als lineaire combinatie uitgedrukt worden van eigenvectoren:*

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \mathbf{v}_m$$

dan, $\forall k : A^k \mathbf{x} = c_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \lambda_m^k \mathbf{v}_m$.

Theorema 4.20. *Zij A een $n \times n$ matrix en $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ met verschillende eigenwaarden van A met overeenkomende eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$. Dan zijn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ lineair afhankelijk.*

4.4 Gelijkenis en diagonalisatie

Zij A en B $n \times n$ matrices. A is gelijk aan B als er een inverteerbare $n \times n$ matrix P is zodanig dat $P^{-1}AP = B$. Notatie: $A \sim B$.

Theorema 4.21. Zij A , B en C $n \times n$ matrices.

- $A \sim A$.
- Als $A \sim B$, dan $B \sim A$.
- Als $A \sim B$ en $B \sim C$, dan $A \sim C$.

Theorema 4.22. Zij A en B $n \times n$ matrices met $A \sim B$. Dan

- $\det(A) = \det(B)$.
- A inverteerbaar desda B inverteerbaar.
- $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.
- Karakteristieke polynoom van A en B zijn indentiek.
- Eigenwaarden van A en B zijn indentiek.
- $\forall m \geq 0 : A^m \sim B^m$.
- Als A inverteerbaar, dan $\forall m \in \mathbb{N} : A^m \sim B^m$.

4.4.1 Diagonalisatie

Als $n \times n$ matrix A is diagonaliseerbaar als er een diagonale matrix D bestaat zodanig dat $A \sim D$. Ofwel dat geldt: $P^{-1}AP = D$.

Theorema 4.23. Zij A een $n \times n$ matrix. A is diagonaliseerbaar desda A n lineaire onafhankelijke eigenvectoren heeft.

Theorema 4.24. Zij A een $n \times n$ matrix en $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ verschillende eigenwaarden van A . Als $\mathcal{B}_i$ een basis vormt voor eigenspace E_{λ_i} , dan $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ is lineair onafhankelijk.

Theorema 4.25. Zij A een $n \times n$ matrix met n verschillende eigenwaarden, dan is A diagonaliseerbaar.

Theorema 4.26. Zij A een $n \times n$ matrix, dan is de geometrische veelvoud van elke eigenwaarde kleiner of gelijk aan de algebraïsche veelvoud.

4.4.2 Diagonalisatie theorema

Theorema 4.27. Zij A een $n \times n$ matrix met verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. De volgende stellingen zijn equivalent:

- A is diagonaliseerbaar.
- De vereniging $\mathcal{B}$ van de basissen van eigenruimten van A bevat n vectoren.
- De algebraïsche veelvoud van elke eigenwaarde is gelijk aan zijn geometrische veelvoud.

5 Orthogonaliteit

5.1 Orthogonaliteit in $\mathbb{R}^n$

Een verzameling vectoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \in \mathbb{R}^n$ is een *orthogonale verzameling* als alle verschillende vectorparen in de verzameling orthogonaal zijn. Ofwel:

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j : \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$$

Theorema 5.1. Als $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ een orthogonale verzameling is van niet-nul vectoren in $\mathbb{R}^n$ dan zijn ze lineair onafhankelijk.

Een orthogonale basis voor deelruimte W van $\mathbb{R}^n$ is een basis van orthogonale verzameling W .

Theorema 5.2. Zij $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ een orthogonale basis voor een deelruimte W van $\mathbb{R}^n$ en $\mathbf{w}$ willekeurige vector in W . Dan zijn de unieke scalars als volgt:

$$i \in \{1, \dots, k\} : c_i = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}$$

zodanig dat $\mathbf{w} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k$.

Een verzameling van vectoren in $\mathbb{R}^n$ is een *orthonormale verzameling* als het een orthogonale verzameling van eenheidsvectoren is. Een *orthonormale basis* voor deelruimte W van $\mathbb{R}^n$ is een basis van orthonormale verzameling W .

Theorema 5.3. Zij $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ een orthonormale basis voor deelruimte W van $\mathbb{R}^n$ en $\mathbf{w}$ willekeurige vector in W . Dan is uniek:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_2 + \dots + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k$$

5.1.1 Orthogonale matrices

Theorema 5.4. De kolommen van $m \times m$ matrix Q vormen orthonormale verzameling desda $Q^T Q = I_n$.

Een $n \times n$ matrix Q waarbij kolommen orthonormale verzameling vormen is een *orthogonale matrix*.

Theorema 5.5. Een vierkante matrix Q is orthogonaal desda $Q^{-1} = Q^T$.

Theorema 5.6. Zij Q een $n \times n$ matrix. De volgende stellingen zijn equivalent:

- Q is orthogonaal.
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|Q(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : Q\mathbf{x} \cdot Q\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Theorema 5.7. Zij Q een orthogonale matrix, dan vormen de rijen een orthonormale verzameling.

Theorema 5.8. Zij Q een orthogonale matrix.

- Q^{-1} is orthogonaal.
- $\det(Q) = \pm 1$.
- Als λ een eigenwaarde van Q is, dan $|\lambda| = 1$.
- Als Q_1 en Q_2 zijn orthogonale $n \times n$ matrices, dan ook $Q_1 Q_2$.

5.2 Orthogonale complementen en orthogonale projecties

Zij W een deelruimte van $\mathbb{R}^n$. Vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ is *orthogonaal aan W* als $\mathbf{v}$ orthogonaal is aan elke vector in W . De verzameling van alle orthogonale vectoren aan W is het *orthogonaal complement* van W . Ofwel:

$$W^\perp = \{\forall \mathbf{w} \in W, \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\}$$

Theorema 5.9. *Zij W een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.*

- $W^\perp$ is deelruimte van $\mathbb{R}^n$.
- $(W^\perp)^\perp = W$.
- $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
- Als $W = \text{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$, dan $\mathbf{v} \in W^\perp$ desda $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i = 0$

Theorema 5.10. *Zij A een $m \times n$ matrix. Het orthogonaal complement van de rijruimte van A is de nulruimte van A , en het orthogonaal complement van de kolomruimte van A is de nulruimte van A^T :*

$$(\text{row}(A))^\perp = \text{null}(A) \text{ en } (\text{col}(A))^\perp = \text{null}(A^T)$$

5.2.1 Orthogonale projecties

Zij W een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ en $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ een orthogonale basis van W . De orthogonale projectie van $\mathbf{v}$ op W is dan

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \text{proj}_W(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 + \dots + \left(\frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \right) \mathbf{u}_k$$

Het component van $\mathbf{v}$ orthogonaal aan W is de vector $\text{perp}_W(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v})$.

5.2.2 Het orthogonale decompositie theorema

Theorema 5.11. *Zij W een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ en vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Dan zijn er unieke vectoren $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$ zodanig dat $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$.*

Theorema 5.12. *Als W een deelruimte van $\mathbb{R}^n$, dan $(W^\perp)^\perp = W$.*

Theorema 5.13. *Zij W een deelruimte van $\mathbb{R}^n$, dan $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$.*

5.2.3 Rangtheorema

Theorema 5.14. *Als A een $m \times n$ matrix, dan $\text{rang}(A) + \text{nullity}(A) = n$.*

5.3 Gram-Schmidt proces en QR factorisatie

5.3.1 Gram-Schmidt proces

Theorema 5.15. *Zij $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ een basis voor deelruimte $W \in \mathbb{R}^n$. Dan:*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1, & W_1 &= \text{span}(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1, & W_2 &= \text{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \right) \mathbf{v}_2, & W_3 &= \text{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\ &\vdots & & \\ \mathbf{v}_k &= \mathbf{x}_k - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_k}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_k}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \right) \mathbf{v}_2 - \dots - \left(\frac{\mathbf{v}_{k-1} \cdot \mathbf{x}_k}{\mathbf{v}_{k-1} \cdot \mathbf{v}_{k-1}} \right) \mathbf{v}_{k-1}, & W_k &= \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

5.3.2 QR factorisatie

Theorema 5.16. *Zij A een $m \times n$ matrix met lineaire onafhankelijke kolommen. Dan kan A gefactoriseerd worden als $A = QR$, met Q een $m \times n$ matrix met orthonormale kolommen en R is een inverteerbare bovendriehoekige matrix.*

5.4 Orthogonale diagonalisatie en symmetrische matrices

Een vierkante matrix A is *orthogonaal diagonaliseerbaar* als er orthogonale matrix Q en diagonale matrix D bestaan zodanig dat $Q^T A Q = D$.

Theorema 5.17. *Als A orthogonaal diagonaliseerbaar is, dan is A symmetrisch.*

Theorema 5.18. *Als A een reële symmetrische matrix is, dan zijn de eigenwaarden reëel.*

Theorema 5.19. *Als A een symmetrische matrix is, dan zijn er twee willekeurige eigenvectoren overeenkomend met verschillende eigenwaarden van A orthogonaal.*

5.4.1 Spectrale theorema

Theorema 5.20. *Zij A een $n \times n$ reële matrix. A is symmetrisch desda het orthogonaal diagonaliseerbaar is.*

5.5 Toepassingen

5.5.1 Kwadratische vormen

Een *kwadratische vorm* in n variabelen is een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ van de vorm $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ met A een symmetrische $n \times n$ matrix en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. A is de *aan f geassocieerde matrix*.

5.5.2 Principiële assentheorema

Theorema 5.21. *Elke kwadratische vorm kan gediagonaliseerd worden. Zij f een kwadratische functie, A de aan f geassocieerde matrix, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A , Q de orthogonale matrix en $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_n]^T$. Dan na substitutie $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ zien we: $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$*

Kwadratische vorm $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ is geclassificeerd als:

- *positief definitief* als $\forall \mathbf{x} \neq 0 : f(\mathbf{x}) > 0$.
- *positief semidefiniet* als $\forall \mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \geq 0$.
- *negatief definitief* als $\forall \mathbf{x} \neq 0 : f(\mathbf{x}) < 0$.
- *negatief semidefiniet* als $\forall \mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \leq 0$.
- *indefinitief* als $\mathbf{x}$ zowel positieve als negatieve waarden accepteert.

Theorema 5.22. *Zij A een $n \times n$ symmetrische matrix. De kwadratische vorm $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ van A is:*

- *positief definitief desda eigenwaarden > 0 .*
- *positief semidefiniet desda eigenwaarden $\neq 0$.*
- *negatief definitief desda eigenwaarden < 0 .*

- negatief semidefiniet desda eigenwaarden ≤ 0 .
- indefiniet desda zowel positieve als negatieve eigenwaarden.

Theorema 5.23. Zij kwadratische functie $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, A een $n \times n$ symmetrische matrix en eigenwaarden $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Als $\|\mathbf{x}\| = 1$, dan:

- $\lambda_1 \geq f(\mathbf{x}) \geq \lambda_n$.
- Wanneer $\mathbf{x}$ eenheids eigenvector is overeenkomend met λ_1 : $\max(f(\mathbf{x})) = \lambda_1$.
- Wanneer $\mathbf{x}$ eenheids eigenvector is overeenkomend met λ_n : $\min(f(\mathbf{x})) = \lambda_n$.

6 Vectorruimten en deelruimten

Nota bene: dit hoort volgens blackboard niet tot de tentamenstof, maar het tentamen en de opgaven vragen wel stof wat hierin staat. Deze stof is impliciet wel af te leiden, maar het lijkt me wel nuttig. Alleen de relevante secties zijn samengevat.

6.1 Axioma's vectorruimten en deelruimten

Zij V een verzameling met gedefinieerde operaties *optellen* en *scalarvermenigvuldigen*. Als $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, dan is de som $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Als c scalar, dan is scalarvermenigvuldiging van $\mathbf{u}$ genoteerd als $c\mathbf{u}$. Als $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \forall c, d$ volgende axioma's gelden, dan is V de *vectorruimte* en zijn elementen zijn *vectoren*.

- | | |
|---|--|
| • $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ | Gesloten onder optelling |
| • $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | Commutativiteit |
| • $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | Associativiteit |
| • $\exists \text{ nulvector } \mathbf{0} \in V : \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. | |
| • $\forall \mathbf{u} \in V, \exists -\mathbf{u} \in V : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ | |
| • $c\mathbf{u} \in V$ | Gesloten onder scalarvermenigvuldiging |
| • $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ | Distributiviteit |
| • $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ | Distributiviteit |
| • $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ | |
| • $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ | |

Theorema 6.1. Zij V een vectorruimte, $\mathbf{u} \in V$ een vector en c scalar.

- $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
- Als $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$, dan $c = 0$ of $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

6.1.1 Deelruimten

Een deelverzameling W van een vectorruimte is de *deelruimte* van W als W een vectorruimte is met dezelfde scalars, optelling en scalarvermenigvuldiging als V .

Theorema 6.2. Zij V een vectorruimte, W niet-lege deelverzameling van V . Dan is W een deelruimte van V desda de volgende stellingen gelden:

- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
- *Zij c scalar, $\forall c : \mathbf{u} \in W \rightarrow c\mathbf{u} \in W$*

6.1.2 Opspanning van verzamelingen

Zij $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ een vectorverzameling in vectorruimte V , dan is de verzamelingen van alle lineaire combinaties van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ de opspanning: $\text{span}(S) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$, met S de *opspannende verzameling* van V . Dus V wordt *opgespannen door* S .

Theorema 6.3. *Zij $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ een vectorverzameling in vectorruimte V .*

- *$\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ is een deelruimte van V .*
- *$\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ is de kleinste deelruimte van V die $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ bevat.*

6.2 Lineaire onafhankelijkheid, basis en dimensie

Een verzameling vectoren $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ in vectorruimte V zijn lineair afhankelijk als er scalars $c_1, c_2, \dots, c_k$ met minstens één scalar $\neq 0$, zodanig dat: $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = 0$

Theorema 6.4. *Een verzameling van vectoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ in vectorruimte V is lineair afhankelijk desda er minstens één vector als lineaire combinatie uitgedrukt kan worden.*

Een verzameling S van vectoren in vectorruimte V is *lineair afhankelijk* als het eindig veel lineaire onafhankelijke vectoren bevat.

Theorema 6.5. *Deelverzameling $\mathcal{B}$ van vectorruimte V is een basis voor V als $\mathcal{B}$ V opspant en $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is.*

6.2.1 Coördinaten

Zij V een vectorruimte en $\mathcal{B}$ een basis voor V . $\forall \mathbf{v} \in V$ is er precies één manier om $\mathbf{v}$ te schrijven als lineaire combinatie van $\mathcal{B}$'s basisvectoren.

Zij $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ een basis voor vectorruimte V , vector $\mathbf{v} \in V$ en scalars $c_1, c_2, \dots, c_n$. Dan zijn de scalars de *coördinaten van $\mathbf{v}$ respectievelijk naar $\mathcal{B}$* , $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$ en kolomvector

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

is $\mathbf{v}$'s coördinaatvector respectievelijk naar $\mathcal{B}$.

Theorema 6.6. *Zij $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ een basis voor vectorruimte V , vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ en c scalar. Dan*

- $[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$
- $[c\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = c[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$

Theorema 6.7. Zij $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ een basis voor vectorruimte V en vectoren $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$. Dan zijn $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ lineair onafhankelijk in V desda $\{[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}}\}$ lineair onafhankelijk zijn in $\mathbb{R}^n$.

6.2.2 Dimensie

Theorema 6.8. Zij $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ een basis voor vectorruimte V .

- Elke verzameling van meer dan n vectoren in V zijn lineair afhankelijk.
- Elke verzameling van meer dan n vectoren in V kunnen V niet opspannen.

6.2.3 Basistheorema

Theorema 6.9. Als vectorruimte V een basis van n vectoren heeft, dan heeft elke basis van V exact n vectoren.

De dimensie van V , $\dim(V)$ is het aantal basisvectoren voor V . Zo ook $\dim(\mathbf{0}) = 0$. Een vectorruimte zonder eindige basis is *oneindig-dimensionaal*.

Theorema 6.10. Zij V een vectorruimte met $\dim(V) = n$. Dan:

- Elke lineaire afhankelijke verzameling in V bevat hoogstens n vectoren.
- Elke opspanning voor V bevat minstens n vectoren.
- Elke lineaire onafhankelijke verzameling van precies n vectoren in V is een basis voor V .
- Elke opspanning precies van n vectoren voor V kan uitgebreid worden tot een basis voor V .
- Elke opspanning voor V kan gereduceerd worden tot een basis voor V .

Theorema 6.11. Zij W een deelruimte van eindig-dimensionale vectorruimte V . Dan:

- W is eindig-dimensionaal en $\dim(W) \leq \dim(V)$.
- $\dim(W) = \dim(V)$ desda $W = V$.

7 Afstand en benadering

7.3 Kleinste kwadratenmethode

Als V een deelruimte van een genormaliseerde lineaire ruimte V is en $\mathbf{v}$ een vector in V . Dan de *beste benadering van $\mathbf{v}$ in W* is de vector $\bar{\mathbf{v}}$ in W zodanig dat $\|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ voor elke vector $\mathbf{w}$ in W verschillend van $\bar{\mathbf{v}}$.

Theorema 7.8. Als W een eindig-dimensionale deelruimte is van een inner-productruimte V en vector $\mathbf{v} \in V$, dan is $\text{proj}_W(\mathbf{v})$ de beste benadering van $\mathbf{v}$ in W .

7.3.1 Kleinste kwadratenbenadering

Als A een $m \times n$ matrix en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ dan is de kleinste kwadratenoplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ een vector $\bar{\mathbf{x}}$ in $\mathbb{R}^n$ zodanig dat $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$.

7.3.2 Kleinste kwadratentheorema

Theorema 7.9. Zij A een $m \times n$ matrix en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Dan is er voor $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minimaal één kleinste kwadratenoplossing $\bar{\mathbf{x}}$. Er geldt:

- $\bar{\mathbf{x}}$ is een kleinste kwadratenoplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ desda $\bar{\mathbf{x}}$ een oplossing is van de normaalvergelijkingen $A^T A \bar{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$.
- A heeft lineaire onafhankelijke kolommen desda $A^T A$ inverseerbaar. In dat geval is de unieke oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gegeven door $\bar{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$.

Met Gauss's eliminatiemethode op $[A^T A \mid A^T \mathbf{b}]$ kunnen we $\bar{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$ oplossen. Voorbeeld van kwadratische vergelijking: zij $y = a + bx + cx^2$ vergelijking van parabool met punten $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ en $(2, 2)$. Dan is het lineaire systeem

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ A & \mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array}$$

We berekenen

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \text{ en } A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

dan zijn de normaalvergelijkingen gegeven door

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{met oplossing } \bar{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{13} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7.3.3 Kleinse kwadraten via QR factorisatie

Theorema 7.10. Zij A een $m \times n$ matrix met lineaire onafhankelijke kolommen en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Als $A = QR$ een QR factorisatie, dan is de unieke oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gegeven door $\bar{\mathbf{x}} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}$.

7.3.4 Orthogonale projectie opnieuw bekeken

Theorema 7.11. Zij W een deelruimte in $\mathbb{R}^m$ en A een $m \times n$ matrix waarbij de kolommen W 's basis vormen. De orthogonale projectie van elke vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ op W is $\text{proj}_W(\mathbf{v}) = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{v}$. De lineaire transformatie $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ projecteert $\mathbb{R}^m$ op W heeft $A(A^T A)^{-1} A^T$ als standaardbasis.

7.3.5 Matrix pseudoinverse

Als A een matrix is met lineair onafhankelijke kolommen, dan is de *pseudoinverse* van A als volgt: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

Theorema 7.12. *Zij A een matrix met lineair onafhankelijke kolommen. Dan gelden de volgende stellingen van A^+ :*

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$
- AA^+ en A^+A zijn symmetrisch.

7.4 Singuliere waardenontbinding

Zij A een $m \times n$ matrix, dan kunnen we een Singuliere waardenontbinding (SWO) of Singular Value Decomposition (SVD) maken. De *singuliere waarden* van A zijn de wortels $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ van eigenwaarden van $A^T A$. Ter conventie is afgesproken dat $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$.

7.4.1 Definitie SWO

Theorema 7.13. *Zij A een $m \times n$ matrix met singuliere waarden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ en $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$ (d.w.z. de rest van de diagonaal zijn 0'en). Dan bestaat een orthogonale $m \times m$ matrix U , een orthogonale $n \times n$ matrix V en een $m \times n$ matrix Σ zodanig dat $A = U\Sigma V^T$.*

Σ is uniek, U en V niet.

7.4.2 Buitenproductvorm van SVD

Theorema 7.14. *Zij A een $m \times n$ matrix met singuliere waarden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$ en $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ de linker singuliere vectoren en $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ de rechter singuliere vectoren. Dan $A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \dots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T$.*

Theorema 7.15. *Zij $A = U\Sigma V^T$ een SVD van een $m \times n$ matrix en $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ niet-nul singuliere waarden van A . Dan:*

- $\text{rang}(A) = r$.
- $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ is orthonormale basis voor $\text{col}(A)$.
- $\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m\}$ is orthonormale basis voor $\text{null}(A^T)$.
- $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ is orthonormale basis voor $\text{row}(A)$.
- $\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ is orthonormale basis voor $\text{null}(A)$.

Theorema 7.16. *Zij A een $m \times n$ matrix met rang r . Het beeld van de eenheidsbol in $\mathbb{R}^n$ onder de matrixtransformatie afgebeeld van $\mathbf{x}$ naar $A\mathbf{x}$ is:*

- Het oppervlakte van de ellipsoïde in $\mathbb{R}^m$ als $r = n$.
- Een solide epplisoïde in $\mathbb{R}^m$ als $r < n$.

Theorema 7.17. *Zij A een $m \times n$ matrix en $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ niet-nul singuliere waarden van A . Dan $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2}$.*

7.4.3 Stappenplan en voorbeeld

- Bepaal $A^T A$ en zijn eigenwaarden.
- Rangschik de wortels van de eigenwaarden van groot naar klein over de diagonaal van Σ .

- Vul de kolommen van V met de genormaliseerde eigenvectors van $A^T A$.
- Bepaal de eerste r kolommen van U met $\frac{1}{\sigma_i} A V_i$ voor $i = 1..r$.
- Gebruik Gram-Schmidts process om U orthonormaal te maken of de overige kolommen van U te bepalen.

Een alternatieve manier om U te vullen is door de genormaliseerde eigenvectoren van AA^T te bepalen. Voorbeeldopgave: zij $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bepaal de SVD van A . Uitwerking: Bereken $A^T A$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ en $\lambda = 0$ met eigenvectoren:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deze vectoren zijn orthogonaal. Normaliseren geeft:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De singuliere waarden van A zijn $\sigma_1 = \sqrt{2}$, $\sigma_2 = 1$ en $\sigma_3 = 0$. Dus

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bepaal kolommen van U :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \mathbf{v}_2 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Omdat $\mathbf{u}_1$ en $\mathbf{u}_2$ al orthonomale vectoren zijn hoeven we Gram-Schmidts process niet te gebruiken. Dus de SVD luidt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = U \Sigma V^T$$

7.4.4 Pseudoinverse van kleinste kwadratenbenadering

Zij $A = U\Sigma V^T$ een SVD voor $m \times n$ matrix A , met $\Sigma = \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$, D een $r \times r$ diagonale matrix met niet-nul singuliere waarden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ van A . Dan is de *pseudoinverse* (of *Moore-Penrose inverse*) van A de $n \times m$ matrix $A^+ = V\Sigma^+U^T$ met $n \times m$ matrix $\Sigma^+ = \begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}$

Theorema 7.18. *Het kleinste kwadratenprobleem $A\mathbf{b} = \mathbf{x}$ heeft een unieke kleinste kwadratenoplossing van minimale lengte: $\bar{\mathbf{x}} = A^+\mathbf{b}$.*

7.4.5 Stappenplan pseudoinverse en voorbeeld

- Bepaal SVD van A .
- Bepaal Σ^+ .
- Bereken $A^+ = V\Sigma^+U^T$.

Bepaal de pseudoinverse van A uit het vorige voorbeeld. Uitwerking: we weten dat Σ^+ een $n \times m$ matrix is:

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan geldt

$$A^+ = V\Sigma^+U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.4.6 Fundamentele inventeerbare matrixtheorie v4

Theorema 7.19. *Zij A een $n \times n$ matrix. De volgende stellingen zijn equivalent:*

- A is inventeerbaar.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is een unieke oplossing $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- $A\mathbf{x} = 0$ is de enige triviale oplossing.
- De gereduceerde rij-echelonvorm van A is I_n .
- A is een product van elementaire matrices.
- $\text{rang}(A) = n$.
- $\text{nullity}(A) = 0$.
- De kolomvectoren van A zijn lineair onafhankelijk.
- De kolomvectoren van A spannen $\mathbb{R}^n$ op.
- De kolomvectoren van A vormen een basis voor $\mathbb{R}^n$.
- De rijvectoren van A zijn lineair onafhankelijk.
- De rijvectoren van A spannen $\mathbb{R}^n$ op.
- De rijvectoren van A vormen een basis voor $\mathbb{R}^n$.
- $\det(A) \neq 0$.
- 0 is geen eigenwaarde van A .
- T is inventeerbaar.
- T is één-op-één (one-to-one).

- T is op (onto).
- $\text{kernel}(T) = \mathbf{0}$
- $\text{bereik}(T) = W$ (Engels: range)
- 0 is geen singuliere waarde van A .