

Opgaven werkcollege 1

Algoritmen en complexiteit

2 september 2015

1 Afschattingen

Definitie 1. Zij f en g functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$g \in O(f) \iff (\exists c, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(g(n) \leq cf(n)), \quad (\leq)$$

$$g \in o(f) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(g(n) < \varepsilon f(n)) \quad (<)$$
$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

$$g \in \Omega(f) \iff g \notin o(f) \quad (\geq)$$
$$\iff (\exists \varepsilon > 0)(\exists^\infty n_i) \left(\frac{g(n_i)}{f(n_i)} > \varepsilon \right)$$

$$g \in \omega(f) \iff f \in o(g) \quad (>)$$

$$g \in \theta(f) \iff g \in O(f) \cap \Omega(f) \quad (=)$$

$$g \in \sim(f) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1$$

Opgave 1. Bewijs:

(a) $pn^3 + qn^2 + rn + s \in O(n^3)$, voor $p, q, r, s \in \mathbb{N}$

(b) $\sin(n) \in O(1)$ en $\sin(n) \notin o(1)$

(c) $n^2 \in \Omega(n^2/2)$

(d) $\log n \in O(n)$

(e) $(\log n)^a \in O(n^b)$, voor $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ (**extra**)

Uitwerking. (a) Neem $c = p + q + r + s$ en $n_0 = 1$, dan voor $n \geq n_0$ hebben we $pn^3 + qn^2 + rn + s \leq cn^3$.

(b) Er geldt $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ dus neem $c = 1$ en $n_0 = 0$.

(c) $n^2 / (n^2/2) = 2$, dus neem $\varepsilon = 1$.

(d) Er geldt $\log 1 = 0 < 1$, $\frac{d}{dn} n = 1$ en $\frac{d}{dn} \log n = 1/n < 1$ voor $n > 1$. Neem $c = 1$, $n_0 = 1$.

(e) We zien dat $(\log n)^a \in O(n^b)$ equivalent is aan $\log n \in O(n^{b/a})$, want $x^{1/a}$ is stijgend in x . Dit is equivalent met (substitueer $m = n^{b/a}$) $\log(m^{a/b}) \in O(m)$. Het is niet moeilijk om in te zien dat de laatste uitspraak waar is, vanwege $\log(m^{a/b}) = \frac{a}{b} \log m$. $\square$

Opgave 2. Bewijs dat $O(f + g) = O(\max\{f, g\})$. (Hint: bewijs ‘ $\subseteq$ ’ en ‘ $\supseteq$ ’.)

Uitwerking. ($\subseteq$) Als $h \in O(f + g)$ dan $\exists c, n_0 \forall n > n_0 : h(n) \leq c(f + g)(n) = c(f(n) + g(n)) \leq 2c \max\{f(n), g(n)\}$.

($\supseteq$) Als $h \in O(\max\{f, g\})$ dan $\exists c, n_0 \forall n > n_0 : h(n) \leq c \max\{f, g\}(n) \leq c(f + g)(n)$. $\square$

Opgave 3. Geef aan welke relaties $f \in \bullet(g)$ gelden voor $\bullet \in \{O, o, \sim, \Omega, \theta\}$ in de volgende gevallen:

(a) $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^3; g(x) = x^6$,

(b) $f(x) = 2^x; g(x) = 3^x$.

Uitwerking. (a)

O ja, zie 1a.

o nee, want kopcoefficient is 1, dus limiet is 1.

$\sim$ ja, zie o .

Ω ja, want niet in o .

θ ja, want in O en Ω .

(b)

O ja, $2^x \leq 3^x$.

o ja $2^x/3^x = (2/3)^x \rightarrow 0$, want $2/3 < 1$.

$\sim$ nee, want in o .

Ω nee, want in o .

θ nee, want niet in Ω . $\square$

2 Recurrente betrekkingen

Voor de volgende opgaven gebruiken we de versimpelde versie van de stelling van Akra en Bazzi.

Stelling 1 (Versimpelde versie Akra-Bazzi). Zij T een recurrente betrekking van de vorm

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{als } n < d, \\ aT(n/b) + f(n) & \text{als } n \geq d, \end{cases}$$

met n een macht van b . We onderscheiden drie gevallen.

1. Als $\exists \varepsilon > 0$ zodat $f(n) \in O(n^{\log_b(a) - \varepsilon})$ dan $T(n) \in \theta(n^{\log_b(a)})$.
2. Als $\exists \varepsilon > 0$ zodat $f(n) \in \theta(n^{\log_b(a)} \log^k(n))$ voor een $k \in \mathbb{N}$ dan $T(n) \in \theta(n^{\log_b(a)} \log^{k+1}(n))$.

3. Als $\exists \varepsilon > 0$ zodat $f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a)+\varepsilon})$ en $(\exists \delta < 1)(af(n/b) \leq \delta f(n))$ dan $T(n) \in \theta(f(n))$.

Opmerking. $\log^k(n)$ betekent $(\log(n))^k$.

Opgave 4. Bekijk de volgende recurrente betrekking:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ 2T(n/2) + u & \text{als } n > 1, \end{cases}$$

waarbij u een positieve constante is en n een macht van 2.

- (a) Geef zonder Stelling 1 te gebruiken een θ -afschatting voor $T(n)$. (Hint: schrijf de recursie uit.)
- (b) Bereken een θ -afschatting met Stelling 1.

Uitwerking. (a) Uitschrijven geeft

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + u \\ &= 2^2 T(n/2^2) + 2u + u \\ &= 2^3 T(n/2^3) + 4u + 2u + u \\ &\vdots \\ &= 2^{\log n} T(n/(2^{\log n})) + u(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + \dots + 2 + 1) \\ &= nT(1) + u(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + \dots + 2 + 1) \\ &= n + u(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + \dots + 2 + 1). \end{aligned}$$

Er geldt $n + u(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + \dots + 2 + 1) \in O(n)$ (werk dit uit als je het niet meteen ziet). Ook gaat $(n + u(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + \dots + 2 + 1))/n$ niet naar 0 als n naar oneindig gaat, dus $T(n) \notin o(n)$ dus $T(n) \in \Omega(n)$. Conclusie: $T(n) \in \theta(n)$.

(b) Neem $a = 2$, $b = 2$, $\varepsilon = 1$, dan $\log_b a = 1$, dus $f(n) = u \in O(n^{1-\varepsilon}) = O(1)$, want u is een constante. Dit is geval 1, dus $T(n) \in \theta(n)$. $\square$

Opgave 5. Los de volgende recurrente betrekking op:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ T(n/5) + \log n & \text{als } n > 1. \end{cases}$$

Uitwerking. Neem $a = 1$, $b = 5$, dan $\log_b a = 0$, dus $f(n) = \log n \in \theta(n^0(\log n)^k)$ voor $k = 1$. Dit is geval 2, dus $T(n) \in \theta((\log n)^2)$. $\square$

Opgave 6. Los op:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ T(n/3) + \sqrt{n} & \text{als } n > 1. \end{cases}$$

Uitwerking. Neem $a = 1$, $b = 3$, dan $\log_b a = 0$, dus $f(n) = \sqrt{n} \in \Omega(n^\varepsilon)$ voor $\varepsilon = \frac{1}{2}$. (Want $n^{1/2}/n^{1/2} = 1$, dus $\sqrt{n} \notin o(n^{1/2})$ dus $\sqrt{n} \in \Omega(n^{1/2})$.) Ook $\sqrt{n/3} = \sqrt{1/3}\sqrt{n} < \sqrt{n}$, want $\sqrt{1/3} < 1$. Dit is geval 3 dus $T(n) \in \theta(\sqrt{n})$. $\square$

Opgave 7 (Extra). Bewijs met volledige inductie: als p een polynoom in i is van graad d , dan is $\sum_{i=0}^n p(i)$ een polynoom in n van graad $d+1$.

Uitwerking. Dit bewijs gaat met zogenoemde sterke inductie, d.w.z. een inductiehypothese die aangenomen wordt voor alle $m < n$. We bewijzen de stelling eerst voor alle n en $d = 1$. Dat gaat ook met inductie. We zien eerst dat $\sum_{i=0}^1 i^1 = 0 + 1 = 1.2/2 = n(n+1)/2$, voor $n = 1$ en als $\sum_{i=0}^n i = n(n+1)/2$, dan is $\sum_{i=0}^{n+1} i = n+1 + n(n+1)/2 = \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} = (n+1)(n+2)/2$. Dat is een polynoom van graad 2, dus o.k.

Nu nemen we aan dat voor alle n geldt $\sum_{i=0}^n i^d = a_{d+1}n^{d+1} + \dots + a_0$. Zbda nemen we aan dat dit polynoom van graad $d+1$ gewoon an^{d+1} is.

We kijken naar $\sum_{i=0}^n i^{d+1} = \sum_{i=0}^n i \cdot i^d = 1 + 2.2^d + 3.3^d + \dots + n.n^d$. Uitgeschreven:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2^d & + & 3^d & + & \dots & + & n^d \\ & & + & 2^d & + & 3^d & + & \dots & + & n^d \\ & & & & + & 3^d & + & \dots & + & n^d \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & + & n^d \end{array}$$

We passen de inductiehypothese toe en zien dat deze som gelijk is aan $n \cdot an^{d+1} - 1 - (1^d + 2^d) - (1^d + 2^d + 3^d) - \dots - (1^d + 2^d + 3^d + \dots + n^d)$ en dat is (weer volgens de inductiehypothese) gelijk aan $an^{d+2} - 1 - a2^{d+1} - a3^{d+1} - \dots - a(n-1)^{d+1}$. We merken eerst op dat dit een polynoom is, want een eindige som/verschil van polynomen, en dat de graad hoogstens $d+2$ is. We zijn er nu bijna. We moeten alleen nog aantonen dat de graad ook minstens $d+2$ is. Daarvoor merken we op dat we, als we alleen naar de eerste $n/2$ rijen van de som kijken in plaats van alle rijen, dan wordt de som $a(n/2)n^{d+1} - 1 - a2^{d+1} - a3^{d+1} - \dots - a(n/2)^{d+1} \geq a(n/2)n^{d+1} - a(n/2)(n/2)^{d+1} = \frac{a}{2}n^{d+2} - \frac{a}{2^{d+1}}n^{d+2}$ en dus is de graad ook minstens $d+2$. $\square$