

Differentiëren en afgeleide

André Heck (KdVI), A.J.P.Heck@uva.nl

Numerical Recipes Project 2018/2019

Hoorcollege 2

Overzicht

- 1 Afgeleide: de basis
- 2 Rekenregels voor differentiëren
- 3 Afgeleide: vervolg
- 4 Numerieke afgeleide

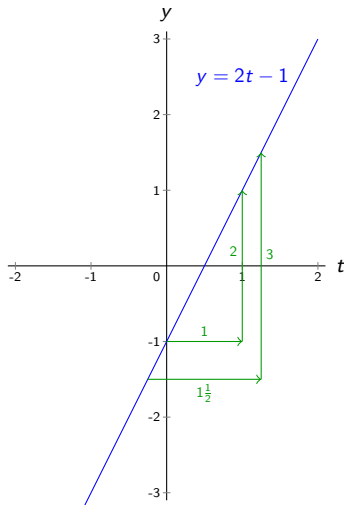


Afgeleide: de basis



Helling

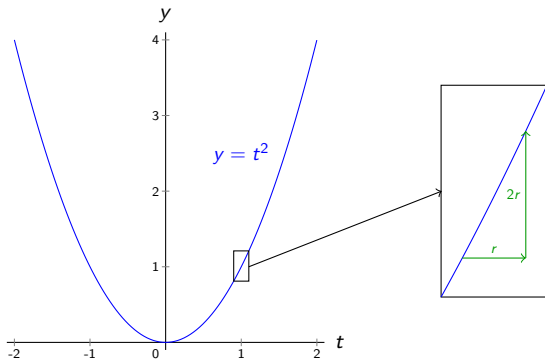
De lineaire functie $at + b$ heeft *helling* of *richtingscoëfficiënt* a : als je op de grafiek r naar rechts gaat, ga je ar omhoog.



Helling

De lineaire functie $at + b$ heeft *helling* of *richtingscoëfficiënt* a : als je op de grafiek r naar rechts gaat, ga je ar omhoog.

Voor niet-lineaire functies verschilt de helling per punt:



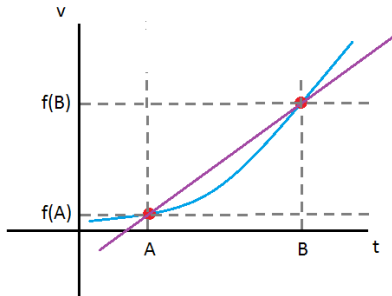
Differentiequotiënt: gemiddelde verandering

Helling van lijn door 2 punten $\rightarrow$ gemiddelde verandering.

Wiskundige notatie:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

Voorbeeld:

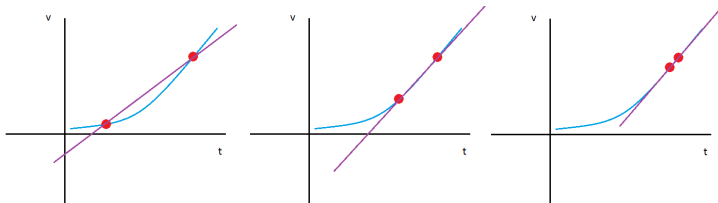


Δf en Δt heten differenties. $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ heet differentiequotiënt.



Differentiaalquotiënt: momentane verandering

Afstand tussen punten van een koorde steeds kleiner $\rightarrow$
momentane verandering in een punt



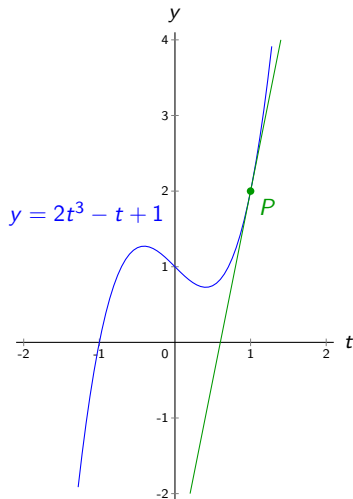
Raaklijn geeft helling van functie in een punt $\rightarrow$
differentiaalquotiënt:

$$\frac{df}{dt}(a) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta f}{\Delta t} \right|_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$



Berekening van een raaklijn

Bekijk een functie f . De *raaklijn* aan f in een punt $P = (a, f(a))$ is de lijn die door P gaat en dezelfde helling heeft als f in P .



Dus deze lijn voldoet aan 2 dingen:

- De helling is $f'(a)$.
- De lijn gaat door $(a, f(a))$.

In het plaatje is $a = 1$, $f(1) = 2$ en

$$f'(t) = 6t^2 - 1,$$

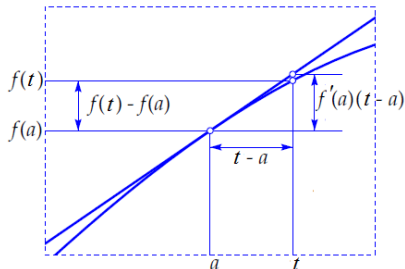
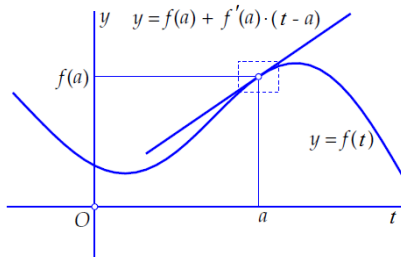
dus $f'(1) = 5$. We zoeken een lijn:

$$y = 5t + b.$$

Invullen $(1, 2)$ geeft $2 = 5 \cdot 1 + b$,
dus $b = -3$. De raaklijn: $y = 5t - 3$.



Raaklijn



In formuletaal:

$$f(t) - f(a) \approx f'(a)(t - a).$$

Anders opgeschreven:

$$f(t) \approx f(a) + f'(a)(t - a).$$

Een functie f is differentieerbaar in $t = a$ als

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

bestaat. $f'(a)$ is de afgeleide van f in $t = a$.



Lineaire benadering van een functie in een punt

De raaklijn aan de grafiek f in $P = (a, f(a))$ heeft helling $f'(a)$ en gaat door P . De vergelijking is:

$$y = f(a) + f'(a)(t - a).$$

Voor t in de buurt van a geldt dus

$$f(t) \approx f(a) + f'(a)(t - a).$$

Algemeen: voor kleine tijdstap dt geldt

$$f(t + dt) \approx f(t) + f'(t) \cdot dt.$$

Hoe kleiner de tijdstap dt , hoe beter de benadering.
Herschrijven geeft:

$$f'(t) \approx \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt} \quad \text{voor kleine tijdstap } dt.$$



Rekenregels voor differentiëren



Somregel en constante factorregel

Bij het berekenen van afgeleiden gebruiken we:

$$[f(t) + g(t)]' = f'(t) + g'(t)$$

$$[af(t)]' = af'(t).$$

$$k(t) = t^2 + \frac{1}{t} = t^2 + t^{-1}$$

$$k'(t) = 2t - t^{-2} = 2t - \frac{1}{t^2}$$

$$\ell(t) = 3t^3$$

$$\ell'(t) = 3 \cdot 3t^2 = 9t^2$$

$f(t)$	$f'(t)$
b	0
t^2	$2t$
t^3	$3t^2$
t^n	nt^{n-1}



Product- en quotiëntregel

Afgeleides van producten en quotiënten:

$$[f(t) \cdot g(t)]' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$
$$\left[\frac{f(t)}{g(t)} \right]' = \frac{f'(t) \cdot g(t) - f(t) \cdot g'(t)}{g(t)^2}.$$

Voorbeelden:

$$k(t) = (2t - 1)(t^2 + 1)$$

$$k'(t) = 2(t^2 + 1) + (2t - 1)2t = 6t^2 - 2t + 2$$

$$\ell(t) = \frac{t}{t+1}$$

$$\ell'(t) = \frac{(1+t) - t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}.$$

$f(t)$	$f'(t)$
1	0
t	1
t^n	nt^{n-1}



Kettingregel

We kunnen nu functies differentiëren die sommen, producten of quotiënten zijn van functies uit de tabel:

$$f(t) = t^2 e^t, \quad g(t) = \frac{e^t - t}{e^t}.$$

Maar hoe differentiëren we $h(t) = e^{t^2}$?

Dit is een *samenstelling* van de twee functies $f(u) = e^u$ en $u = t^2$. In dit geval geldt de *kettingregel* $h'(t) = [f(u(t))]' = f'(u) \cdot u'(t)$.

$$\begin{aligned} f(u) &= e^u & u &= t^2 \\ f'(u) &= e^u & u'(t) &= 2t \\ h'(t) &= e^u 2t = 2te^{t^2} \end{aligned}$$

$f(t)$	$f'(t)$
1	0
t	1
t^2	$2t$
t^n	nt^{n-1}
e^t	e^t

$$\begin{aligned} [f + g]' &= f' + g' \\ [cf]' &= cf' \\ [fg]' &= f'g + fg' \\ \left[\frac{f}{g}\right]' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$



Kettingregel

De kettingregel $[f(u(t))]' = f'(u) \cdot u'(t)$ geeft afgeleides van samengestelde functies.

Bijvoorbeeld: $g(t) = (2t - 1)^{100}$, $h(t) = e^{\sqrt{t}}$

$$f(u) = u^{100} \quad u = 2t - 1$$

$$f'(u) = 100u^{99} \quad u' = 2$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= 100u^{99} \cdot 2 = 200u^{99} \\ &= 200(2t - 1)^{99} \end{aligned}$$

$$f(u) = e^u \quad u = \sqrt{t}$$

$$f'(u) = e^u \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$h'(t) = e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$$

$f(t)$	$f'(t)$
1	0
t	1
t^2	$2t$
t^n	nt^{n-1}
e^t	e^t

$$[f + g]' = f' + g'$$

$$[cf]' = cf'$$

$$[fg]' = f'g + fg'$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$



Kettingregel en driegangenmenu

Er bestaat een mooie analogie tussen de kettingregel en het eten van een driegangenmenu. Je differentieert van buiten naar binnen net zoals je bij een driegangenmenu van buiten naar binnen eet met het bestek. Dat betekent dat wanneer we drie functies samenstellen, $f(x) = g(h(j(x)))$, we de volgende afgeleide functie krijgen:

$$f'(x) = g'(h(j(x))) \cdot h'(j(x)) \cdot j'(x).$$



Tijd voor de quiz!



Q1 - Vraag 1

De afgeleide van $\frac{3}{2}x^2 + x^{\frac{1}{3}}$ is:

A $\frac{3}{2}x^3 + x^{\frac{4}{3}}$

B $\frac{3}{2}x + x^{-\frac{2}{3}}$

C $3x^3 + \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}$

D $3x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$



Tussenslide



Q1 - Vraag 1 [ANTW]

De afgeleide van $\frac{3}{2}x^2 + x^{\frac{1}{3}}$ is:

A $\frac{3}{2}x^3 + x^{\frac{4}{3}}$

B $\frac{3}{2}x + x^{-\frac{2}{3}}$

C $3x^3 + \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}$

D $3x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$$\left(\frac{3}{2}x^2 + x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(\frac{3}{2}x^2\right)' + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{2-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = 3x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$



Q1 - Vraag 2

$g(t) = (5t^2 + 2)(3t^3 + 5)$, dan is de eerste stap:

A $([5t^2]' + [2]') \cdot ([3t^3]' + [5]')$

B $[5t^2]' + [2]' + [3t^3]' + [5]'$

C $[5t^2 + 2]' \cdot (3t^3 + 5) + (5t^2 + 2) \cdot [3t^3 + 5]'$

D $[5t^2 + 2]' + [3t^3 + 5]'$



Tussenslide



Q1 - Vraag 2 [ANTW]

$g(t) = (5t^2 + 2)(3t^3 + 5)$, dan is de eerste stap:

A $\left([5t^2]' + [2]'\right) \cdot \left([3t^3]' + [5]'\right)$

B $[5t^2]' + [2]' + [3t^3]' + [5]'$

C $[5t^2 + 2]' \cdot (3t^3 + 5) + (5t^2 + 2) \cdot [3t^3 + 5]'$

D $[5t^2 + 2]' + [3t^3 + 5]'$

Hier moet de productregel toegepast worden. Als $f(t) = g(t) \cdot h(t)$ dan $f'(t) = g'(t)h(t) + g(t)h'(t)$



Q1 - Vraag 3

$f(t) = (4t^2 + 2)^6$, dan $f'(t) = \dots$

A $48t(4t^2 + 2)^5$

B $(192t^3 + 96t)^5$

C $6(4t^2 + 2)^5$

D $6(4t^2 + 2)^5 \cdot (4t^2 + 2)$



Tussenslide



Q1 - Vraag 3 [ANTW]

$f(t) = (4t^2 + 2)^6$, dan $f'(t) = \dots$

A $48t (4t^2 + 2)^5$

B $(192t^3 + 96t)^5$

C $6 (4t^2 + 2)^5$

D $6 (4t^2 + 2)^5 \cdot (4t^2 + 2)$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 6 (4t^2 + 2)^5 \cdot 8t \\ &= 48t (4t^2 + 2)^5 \end{aligned}$$



Afgeleide: vervolg



Afgeleiden van exponentiële functies

We weten dat $[e^t]' = e^t$. Hoe vinden we de afgeleide van 2^t ?

$$f(t) = 2^t = (e^{\ln(2)})^t = e^{\ln(2) \cdot t}$$

We passen de kettingregel toe:

$$\begin{aligned} f(u) &= e^u & u &= \ln(2) \cdot t \\ f'(u) &= e^u & u' &= \ln(2) \end{aligned}$$

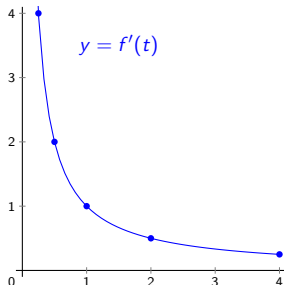
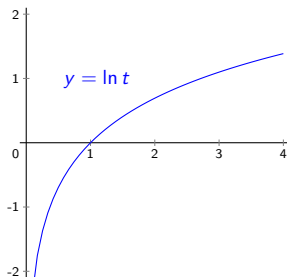
$$f'(t) = e^u \cdot \ln(2) = \ln(2) \cdot e^{\ln(2)t} = \ln(2) \cdot 2^t.$$

Er geldt dus $[2^t]' = \ln(2) \cdot 2^t$, en algemener $[g^t]' = \ln(g) \cdot g^t$.



Afgeleiden van logaritmische functies

Bekijk $f(t) = \ln t$. Er geldt $f'(t) = 1/t$.



Hiermee kunnen we ook andere logaritmen differentiëren:

$$g(t) = \log_2 t = \frac{\ln t}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \ln t$$

$$g'(t) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{\ln(2)t}$$



Dus $[\log_2 t]' = \frac{1}{\ln(2)t}$ en algemener $[\log_g t]' = \frac{1}{\ln(g)t}$.

Tweede afgeleide

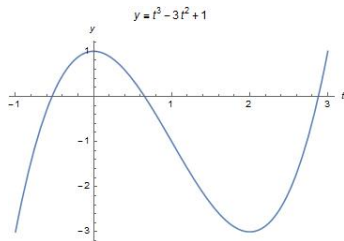
- Tweede afgeleide $\rightarrow$ afgeleide van afgeleide
- Genoteerd met $f''(t)$
- Geeft de helling van de afgeleide

Voorbeeld :

$$f(t) = t^3 - 3t^2 + 1$$

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = 3t^2 - 6t$$

$$f''(t) = \frac{d^2f}{dt^2} = 6t - 6.$$



Extreme waarden bepalen

Met de afgeleide kun je maxima en minima (ook wel extreme waarden of extremen genoemd) berekenen. Dit gaat als volgt. Rechts een voorbeeld met de functie $f(t) = t^3 - 3t^2 + 1$.

1. Bereken de afgeleide f'
2. Los op $f'(x) = 0$
3. Vul de gevonden waarden van x in bij de tweede afgeleide

1. $f'(t) = 3t^2 - 6t$
2. $3t(t - 2) = 0 \implies t = 0 \vee t = 2$
3. $f''(0) = -6 < 0 \implies$
maximum
 $f''(2) = 6 > 0 \implies$
minimum

als $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0 \implies$ maximum

als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0 \implies$ minimum

als $f'(a) = 0$ en $f''(a) = 0 \implies$ geen extreme waarde



Buigpunten bepalen

Met de tweede afgeleide kun je de buigpunten berekenen. Dit gaat als volgt. Rechts een voorbeeld met de functie $f(t) = t^3 - 3t^2 + 1$.

1. Bereken de afgeleide f'
2. Bereken de tweede afgeleide f''
3. Los op $f''(x) = 0$

1. $f'(t) = 3t^2 - 6t$

2. $f''(t) = 6t - 6$

3. $f''(t) = 0$ als $t = 1$

Dus bij $t = 1$ zit een buigpunt.



Extremen en buigpunten berekenen

Voorbeeld

Bereken de extremen van en buigpunten van de functie $f(x) = xe^x$.

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$$f''(x) = [e^x]' + [xe^x]' = e^x + e^x + xe^x = (2+x)e^x$$

$$f'(x) = 0 \implies (1+x)e^x = 0$$
$$x = -1$$

$$f''(-1) = \frac{1}{e} > 0 \implies \text{minimum.}$$

$$f''(x) = 0 \implies (2+x)e^x = 0$$
$$x = -2$$

Dus bij $x = -1$ zit een minimum en bij $x = -2$ wordt een buigpunt aangenomen.



Tijd voor de quiz!



Q2 - Vraag 1

Als $f(x) = e^{x^2}$ dan $f'(x) = \dots$

A e^{x^2}

B $2e^{x^2}$

C $x^2 e^{x^2}$

D $2xe^{x^2}$



Tussenslide



Q2 - Vraag 1 [ANTW]

Als $f(x) = e^{x^2}$ dan $f'(x) = \dots$

A e^{x^2}

B $2e^{x^2}$

C $x^2 e^{x^2}$

D $2xe^{x^2}$

$$f'(x) = \left[e^{x^2} \right]' = [e^u]' \cdot u' = e^u \cdot u' \text{ met } u = x^2$$

dus $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$.



Q2 - Vraag 2

Als $h(x) = \ln(2x^2 + 3)$, dan $h'(x) = \dots$

A $\frac{1}{2x^2+3}$

B $\frac{4x+3}{2x^2+3}$

C $\frac{4x}{2x^2+3}$

D $\frac{1}{4x}$



Tussenslide



Q2 - Vraag 2 [ANTW]

Als $h(x) = \ln(2x^2 + 3)$, dan $h'(x) = \dots$

A $\frac{1}{2x^2+3}$

B $\frac{4x+3}{2x^2+3}$

C $\frac{4x}{2x^2+3}$

D $\frac{1}{4x}$

Hier is de kettingregel nodig:

$$h'(x) = \ln(u)' \cdot u' = \frac{1}{2x^2+3} \cdot 4x = \frac{4x}{2x^2+3}$$



Q2 - Vraag 3

Als $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^2 - 1$, dan:

A $f''(x) = x^4 + 6x$

B $f''(x) = 4x^3 + 6$

C $f''(x) = x^4 - 6x$

D $f''(x) = 4x^3 - 6$



Tussenslide



Q2 - Vraag 3 [ANTW]

Als $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^2 - 1$, dan:

A $f''(x) = x^4 + 6x$

B $f''(x) = 4x^3 + 6$

C $f''(x) = x^4 - 6x$

D $f''(x) = 4x^3 - 6$

$f'(x) = x^4 - 6x$ en dan $f''(x) = 4x^3 - 6$



Numerieke afgeleide



Schatting van de helling in een punt

Gegeven zijn de waarden van een functie $y(t)$ in de buurt van $t = 1$:

t	0.7	0.8	1.0	1.1	1.2
$y(t)$	0.741	0.819	1.000	1.105	1.221

Wat is de beste schatting van $y'(1)$?
(exacte antwoord = 1 want $y(t) = e^{t-1}$)

Bedenk meerdere methoden en zoek uit wat het beste werkt.



Voorwaartse differentie

Herinner:

$$f'(t) \approx \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt} \quad \text{voor kleine tijdstap } dt$$

Neem kleine positieve tijdstap h by $t = t_0$:

$$f'(t_0) \approx \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

In voorbeeld: $t_0 = 1.0$, $h = 0.1$ geeft

$$y'(t_0) \approx \frac{1.105 - 1.000}{0.1} = 1.05$$

In voorbeeld: $t_0 = 1.0$, $h = 0.2$ geeft

$$y'(t_0) \approx \frac{1.221 - 1.000}{0.2} = 1.105$$



Achterwaartse differentie

Herinner:

$$f'(t) \approx \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt} \quad \text{voor kleine tijdstap } dt$$

Neem kleine negatieve tijdstap $-h$ bij $t = t_0$ hebben we

$$f'(t_0) \approx \frac{f(t_0) - f(t_0 - h)}{h} \quad \text{voor kleine positieve } h$$

In voorbeeld: $t_0 = 1.0$, $h = 0.2$ geeft

$$y'(t_0) \approx \frac{1.000 - 0.819}{0.2} = 0.905$$

In voorbeeld: $t_0 = 1.0$, $h = 0.3$ geeft

$$y'(t_0) \approx \frac{1.000 - 0.741}{0.3} = 0.863$$



Centrale differentie

Neem gemiddelde van voorwaartse en achterwaartse differentie

$$f'(t_0) \approx \frac{f(t_0 + h) - f(t_0 - h)}{2h} \quad \text{voor kleine positieve } h$$

In voorbeeld: $t_0 = 1.0$, $h = 0.2$ geeft

$$y'(t_0) \approx \frac{1.221 - 0.819}{2 \cdot 0.2} = 1.005$$



Alternatieve methode via veeltermbenaderingen

Bepaal de parabool door 3 opeenvolgende gegevens en gebruik dit functievoorschrift om de afgeleide in het middelste punt te berekenen.

In het voorbeeld: door de punten $(0.8, 0.819)$, $(1.0, 1.000)$, $(1.1, 1.105)$ gaat de grafiek van de parabool

$$f(t) \approx 0.482 + 0.035t + 0.483t^2$$

Dan

$$f'(1.0) \approx 1.001$$

