

Inleiding

André Heck (KdVI), A.J.P.Heck@uva.nl

Numerical Recipes Project 2018/2019

Hoorcollege 1

Overzicht

- 1 Numerical Recipes Project:
wat, waarom, hoe?
- 2 Numerieke wiskunde:
eerste aandachtspunten
- 3 Lagrange interpolatie



Numerical Recipes Project: wat, waarom, hoe?



Numerical Recipes Project: wat, waarom, hoe?

Wat?

Wiskunde is belangrijk voor elke informaticus:

computer vision, computational science, data analysis

Inhoud:

- Continue wiskunde: basiswiskunde en voortgezette calculus, incl. functies van meer variabelen, differentiaalvergelijkingen
- Numerieke wiskunde: wiskundige algoritmen
- Toepassingen: signaalverwerking, beeldbewerking, computationele modellen

Vorbereiding op vervolgvakken: Beeldbewerken, Introduction Computational Science

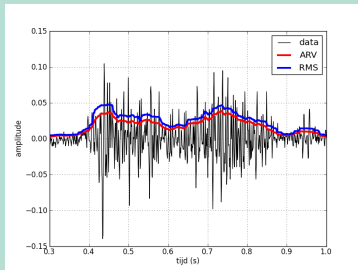


Waarom? Een voorbeeld uit dataverwerking

Waarom?

Verwerking van data: o.a. verwerking van een EMG signaal
average rectified values (ARV) en root-mean square (RMS)

$$\text{RMS}(x)_n = \sqrt{\frac{1}{2m+1} \sum_{j=-m}^m x_{n+j}^2}$$



Methoden en technieken leren kennen en implementeren in Python,
en hierbij systematisch omgaan met nauwkeurigheid en efficiëntie.



Hoe?

Opzet van het vak:

- Een of twee hoorcolleges per week.
- Drie laptopcolleges per week (aanwezigheidsplicht!)
- Zelfstudie
- Online, interactief dictaat op SOWISO (<https://uva.sowiso.nl>)
 - theorie met gerandomiseerde voorbeelden en andere interactie
 - gerandomiseerde opdrachten met feedback
 - videoclips
- Veel online toetsjes en Python opdrachten.
 - Elk met een score van minimaal 75% om het tentamen te laten tellen.
 - Deadlines geven een goed ritme.

Advies: houd de stof goed bij;

help elkaar met wiskunde en gebruik van Python;
benut de hulp van de werkcollegedocent.



Vragen: op digitaal forum, email, hoor- en werkcolleges, en
aan medestudenten. Vragen? Stel ze vooral!

Coördinator/hoorcollegedocent:

André Heck a.j.p.heck@uva.nl

Werkcollegedocenten:

Adeela Ashraf adeela.ashraf@student.uva.nl

André Heck a.j.p.heck@uva.nl

Hendrik Huang hendrik.huang@student.uva.nl

Teun Mathijssen teun.mathijssen@student.uva.nl

Semma Raadscheiders semma.raadscheiders@student.uva.nl

Robert Jan Schlimbach robertjan.schlimbach@student.uva.nl

Sebastian Zur sebastian.zur@student.uva.nl

Zi Long Zhu zi.long.zhu@student.uva.nl



PTA

- Twee digitale wiskundetoetsen (tentamenstof op Canvas);
- Twee projectverslagen (in tweetallen);
- Eindcijfer: gewogen gemiddelde;
- Minimaal cijfer 4,5 voor elke toets en verslag;
- Minimaal 75% score op elke wiskundige huiswerktoets anders kun je het vak niet af laten tekenen.



R & D

- Ontwikkelingsonderzoek
- Vragenlijsten en diagnostische toets aan het begin van de cursus
- Evaluatie en vragenlijst aan het einde



Numerieke wiskunde: eerste aandachtspunten



Wat is numerieke wiskunde?

Numerieke wiskunde betreft het getalsmatig benaderen van een oplossing van wiskundige vergelijkingen met een eindig rekenproces.

Aandachtspunten: berekenbaarheid, stabiliteit, efficiëntie

Veelgestelde vragen:

- Benadering in eindig aantal stappen uit te voeren?
Wat is de afbreekfout?
- Methode bestand tegen kleine verstoringen?
- Rekentijd en geheugengebruik acceptabel of te optimaliseren?
- Hoe om te gaan met afrondfouten?
(t.g.v. representatie van getallen op de computer)



Waarom numerieke wiskunde?

De meeste wiskundige problemen zijn niet exact oplosbaar, maar wel numeriek

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 + 2!} + \frac{1}{3^2 + 3!} + \dots \approx 0.76677$$

$$\int_0^{\pi} \sin(\sin(\sin(x))) dx \approx 1.642593493$$



Floating point getallen

Representeerbare reële getallen:

$$\pm 0.d_1 d_2 \cdots d_n \cdot \beta^e$$

met

$$\beta \geq 2, d_1, \dots, d_n, e \text{ geheel en } 0 \leq d_i \leq \beta - 1$$

basis (radix) β , **mantisse** $d_1 d_2 \cdots d_n$ en **exponent** e

genormaliseerd floating point getal als $d_1 \neq 0$

genormaliseerde binaire vorm ($\beta = 2$):

$$\pm 0.1 d_2 \cdots d_n \cdot \beta^e \quad \text{met } d_i = 0 \text{ of } 1$$

Enkele precisie: woordlengte van 32 bits, met

- bit 1 voor het teken van het getal (0: positief, 1: negatief)
- bit 2 t/m 8: voor de exponent (tussen $-63 \dots 64$)
- laatste 24 bits: voor de mantisse



Floating point getal met enkele precisie

Voorbeeld met 32 bits:

1 1000011 11010000000000000000

is een negatief getal met exponent in decimale notatie gelijk aan

$$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 - 63 = 4$$

en met mantisse in decimale notatie gelijk aan

$$1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \frac{13}{16} = 0.8125$$

Dus:

$$1 \ 1000011 \ 11010000000000000000 = 0.8125 \cdot 2^4 = -13.$$



Genormaliseerd floating point getal met 6 bits en $n = 3$

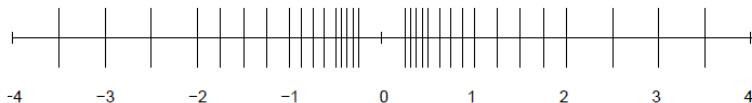
Voorbeeld met 6 bits:

$$\pm 0.1d_2d_3 \cdot 2^e$$

met

$$d_2, d_3 = 0 \text{ of } 1, \text{ en } e = -1, 0, 1, \text{ of } 2$$

Ongelijke verdeling op getallenlijn:



Kleinste en grootste positieve getal: $\frac{1}{4}$ resp. $3\frac{1}{2}$



IEEE standaard 754 met enkele precisie

$$b_0 b_1 b_2 \dots b_7 b_8 d_1 d_2 \dots d_{22} d_{23}$$

representeert het floating-point getal

$$(-1)^s \cdot (1.f)_2 \cdot (2^{e-127})_{10}$$

met

$$s = b_0, \quad e = (b_1 \dots b_8)_2, \quad f = d_1 \dots d_{23}$$

mits niet alle bits $b_1, \dots, b_8$ gelijk zijn aan 0 of 1.

s	e	f	waarde
...	$1, 2, \dots, 254$	...	$(-1)^s \cdot (1.f)_2 \cdot (2^{e-127})_{10}$
...	0	$\neq 0$	$(-1)^s \cdot (0.f)_2 \cdot (2^{-126})_{10}$
0	0	0	+0.0
1	0	0	-0.0
0	255	0	$+\infty$
1	255	0	$-\infty$
...	255	$\neq 0$	NaN



Voorbeeldgetal in IEEE standaard 754 met enkele precisie

Voorbeeld -13 in IEEE 754:

1 1000010 1010000000000000000000

is een negatief getal met exponent in decimale notatie gelijk aan

$$1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 - 127 = 3$$

en met mantisse in decimale notatie gelijk aan

$$1 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 1 \frac{5}{8} = 1.625$$

Dus in IEEE standaard 754:

$$1 1000010 1010000000000000000000 = 1.625 \cdot 2^3 = -13.$$

Precisie: 7 decimalen ($2^{-23} \approx 1.192 \cdot 10^{-7}$)

Kleinste getal: $2^{-149} \approx 1.401 \cdot 10^{-45}$

Grootste getal: $\approx 2^{127} \approx 1.175 \cdot 10^{35}$



Afrondfout

Stel

$$0.d_1d_2\dots d_n \cdot \beta^e \leq x < 0.d_1d_2\dots(d_n + 1) \cdot \beta^e$$

met $d_1 > 0$ in een getallenstelsel met basis β .

Afkapping: vervang x door $0.d_1d_2\dots d_n \cdot \beta^e$

Afronding: vervang x door het dichtstbijzijnde floating point getal,
zeg door $fl(x)$

Absolute afrondfout: $|fl(x) - x|$

Relatieve afrondfout: $\frac{|fl(x) - x|}{|x|}$

Onbetrouwbaarheid is de maximale absolute afrondfout

3.14159 ± 0.00005 benadert π met onbetrouwbaarheid 0.00005



Significantie (nauwkeurigheid) van een getal

- Alle cijfers $\neq 0 \rightarrow$ significant
 - 300 $\rightarrow$ 1 significant cijfer
- Nullen links voorafgegaan door cijfer $\neq 0$ in floating point getal $\rightarrow$ significant
 - 300. $\rightarrow$ 3 significante cijfers
 - 10.4 $\rightarrow$ 3 significante cijfers
 - 20.12 $\rightarrow$ 4 significante cijfers
- Nullen links zonder voorafgaand cijfer $\rightarrow$ niet significant
 - 0.4 $\rightarrow$ 1 significant cijfer
 - 0.12 $\rightarrow$ 2 significante cijfers
- Nullen rechts zonder voorafgaand cijfer $\rightarrow$ niet significant
 - 0.0013 $\rightarrow$ 2 significante cijfers
- Nullen rechts met voorafgaand cijfer $\rightarrow$ significant
 - 1.0013 $\rightarrow$ 5 significante cijfers



Significantie bij product en quotiënt

Vermenigvuldigen en delen:

- Laagste aantal significante cijfers als uiteindelijke significantie

Voorbeelden

- $1.25 \times 4. = 5.$
- $1.25 \times 4.00 = 5.00$
- $3.6 \times 2.4 = 8.64 \rightarrow 8.6$
- $5.0 \times 2.3 = 11.5 \rightarrow 12.$



Significantie bij som en verschil

Optellen en Verschil:

- Aantal decimalen $\rightarrow$ maat voor precisie
- Laagste aantal decimalen als uiteindelijke significantie

Voorbeelden

- $7.8 + 9.01 = 16.81 \rightarrow 16.8$
- $10.245 - 0.02 = 10.225 \rightarrow 10.23$



Propagatie van significantie: som en verschil

Optellen en Verschil:

- Aantal decimalen $\rightarrow$ maat voor precisie
- Laagste aantal decimalen als uiteindelijke significantie

Voorbeelden

- $7.8 + 9.01 = 16.81 \rightarrow 16.8$
- $10.245 - 0.02 = 10.225 \rightarrow 10.23$



Wetenschappelijke notatie

Voorbeeld

$$2.5 \times 8. = 20. \rightarrow 2. \times 10^1 = 2.E1$$

Laagste aantal significante cijfers van startgetallen is één.

Het getal 20. heeft 2 significante cijfers.

Oplossing? $\rightarrow$ wetenschappelijke notatie.

Wetenschappelijke notatie van de vorm:

$$a \times 10^n \quad \text{met } 1 < a < 10 \text{ en } n \neq 0$$

Voorbeeld

3442 met twee significante cijfers:

$$3442 \rightarrow 344.2 \times 10^1 \rightarrow 34.42 \times 10^2 \rightarrow 3.442 \times 10^3 \rightarrow 3.4 \times 10^3 = 3.4E3$$



Afbreekfout: een voorbeeld

Somformule van een meetkundige reeks:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{met } |x| < 1.$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(1-2k)(k!)^2 (4^k)} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Benadering met eerste 3 termen: $\sqrt{1.1} \approx 1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{800} = 1.04875$.

Afbreekfout: vergelijking met een veel nauwkeurige benadering geeft een benaderingsfout van $0.6 \cdot 10^{-4}$.

Afbreekfout bij gebruik van eerste 6 termen: $0.1 \cdot 10^{-10}$.



Quiz 1

Switch naar de PowerPoint presentatie met ShakesPeak om de sessie te starten.

De komende slides bevatten de quizvragen.

De quizvragen staan dubbel in PowerPoint om Peer Instruction mogelijk te maken.

Opzet:

- Uitlegslide ShakesPeak
- Vraag 1 - 1e keer
- Vraag 1 - 2e keer (voor na discussie)
- Stemresultaten vraag 1 - 1e keer
- Stemresultaten vraag 1 - 2e keer
- Vraag 2 - 1e keer
- Vraag 2 - 2e keer
- ...etc.



Q1 - Vraag 1

Het getal 0.12003 heeft ... significante cijfers

A 3

B 4

C 5

D 6



Tussenslide



Q1 - Vraag 1 [ANTW]

Het getal 0.12003 heeft ... significante cijfers

A 3

B 4

C 5

D 6

De nul voor de punt telt niet mee. De nullen aan de rechterkant tellen wel mee. Dus er zijn 5 significante cijfers.



Q1 - Vraag 2

Wat is de juiste significantie van $1.23 + 5.100$?

A 6.3

B 6.33

C 6.330



Tussenslide



Q1 - Vraag 2 [ANTW]

Wat is de juiste significantie van $1.23 + 5.100$?

A 6.3

B 6.33

C 6.330

Bij een optelling gaat het om het oorspronkelijke getal met het minste aantal decimalen. In dit geval zijn dat er twee. Dus het eindantwoord heeft ook twee decimalen.



Q1 - Vraag 3

Je hebt een rekenmachine die in het tientallig stelsel met 3 significante cijfers kan rekenen, maar tussenresultaten steeds afkapt op 3 significante cijfers. Wat is op deze rekenmachine de uitkomst van $(13.1 - 1.31) - 1.79$?

A 9.90

B 9.91

C 9.99

D 10.0



Tussenslide



Q1 - Vraag 3 [ANTW]

Je hebt een rekenmachine die in het tientallig stelsel met 3 significante cijfers kan rekenen, maar tussenresultaten steeds afkapt op 3 significante cijfers. Wat is op deze rekenmachine de uitkomst van $(13.1 - 1.31) - 1.79$?

A 9.90

B 9.91

C 9.99

D 10.0

$13.1 - 1.31 = 11.79$ en afkapping geeft 11.7. Hierna:
 $11.7 - 1.79 = 9.91$.



Lagrange interpolatie



Lagrange interpolatie

Kwadratisch verband $y(t) = at^2 + bt + c$ vinden door drie gegeven punten

$$(t_0, y_0), (t_1, y_1) \text{ en } (t_2, y_2)$$

Functies $f_0(t)$, $f_1(t)$ en $f_2(t)$ opstellen zodat:

- $f_0(t_0) = y_0$ maar $f_0(t_1) = 0$ en $f_0(t_2) = 0$
- $f_1(t_1) = y_1$ maar $f_1(t_0) = 0$ en $f_1(t_2) = 0$
- $f_2(t_2) = y_2$ maar $f_2(t_0) = 0$ en $f_2(t_1) = 0$

Gebruik:

$$f_0(t) = y_0 \cdot \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)}$$

$$f_1(t) = y_1 \cdot \frac{(t - t_0)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)}$$

$$f_2(t) = y_2 \cdot \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)}$$

Dan $y(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t)$



Voorbeeld Lagrange interpolatie

Voorbeeld

Vind het kwadratische verband $y(t) = at^2 + bt + c$ door de drie punten

$$(-10, -10), (2, 5) \text{ en } (-7, 1)$$

Nu:

$$f_0(t) = y_0 \cdot \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)} = -10 \cdot \frac{(t - 2)(t + 7)}{(-10 - 2)(-10 + 7)} = -\frac{30}{108}t^2 - \frac{150}{108}t + \frac{420}{108}$$

$$f_1(t) = y_1 \cdot \frac{(t - t_0)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)} = 5 \cdot \frac{(t + 10)(t + 7)}{(2 + 10)(2 + 7)} = \frac{5}{108}t^2 + \frac{85}{108}t + \frac{350}{108}$$

$$f_2(t) = y_2 \cdot \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)} = 1 \cdot \frac{(t + 10)(t - 2)}{(-7 + 10)(-7 - 2)} = -\frac{4}{108}t^2 - \frac{32}{108}t + \frac{80}{108}$$

Dan

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{30}{108}t^2 - \frac{150}{108}t + \frac{420}{108} + \frac{5}{108}t^2 + \frac{85}{108}t + \frac{350}{108} - \frac{4}{108}t^2 - \frac{32}{108}t + \frac{80}{108} \\ &= \left(-\frac{30}{108} + \frac{5}{108} - \frac{4}{108}\right)t^2 + \left(-\frac{150}{108} + \frac{85}{108} - \frac{32}{108}\right)t + \left(\frac{420}{108} + \frac{350}{108} + \frac{80}{108}\right) \end{aligned}$$



Voorbeeld Lagrange interpolatie

Voorbeeld

Vervolg

$$\begin{aligned}y(t) &= -\frac{30}{108}t^2 - \frac{150}{108}t + \frac{420}{108} + \frac{5}{108}t^2 + \frac{85}{108}t + \frac{350}{108} - \frac{4}{108}t^2 - \frac{32}{108}t + \frac{80}{108} \\&= \left(-\frac{30}{108} + \frac{5}{108} - \frac{4}{108}\right)t^2 + \left(-\frac{150}{108} + \frac{85}{108} - \frac{32}{108}\right)t + \left(\frac{420}{108} + \frac{350}{108} + \frac{80}{108}\right) \\&= -\frac{29}{108}t^2 - \frac{97}{108}t + \frac{850}{108} \\&= -\frac{29}{108}t^2 - \frac{97}{108}t + \frac{425}{54}\end{aligned}$$

Link naar plot: <https://www.desmos.com/calculator/gata4wbem9>

