

Functies van meer variabelen

André Heck (KdVI), A.J.P.Heck@uva.nl

Numerical Recipes Project 2018/2019

Hoorcollege 5

Overzicht

- 1 Functies van 2 of meer variabelen
- 2 Differentiëren van functies van 2 of meer variabelen
- 3 Raakvectoren en raakvlak
- 4 Stationaire punten



Functies van 2 of meer variabelen



Een functie van twee variabelen

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (1 - \sin(2x^2 - y - 1))$$

Bij elk tweetal getallen x en y kun je de *functiewaarde* $f(x, y)$ uitrekenen. Bijvoorbeeld $f(0, \frac{1}{6}\pi - 1) = \frac{1}{4}$ en $f(1, 1) = \frac{1}{2}$

Punten (x, y) waarvoor $f(x, y)$ bestaat is het *domein*.

De grafiek van een functie van twee variabelen

De grafiek van de functie bestaat uit punten (x, y, z) in de $\mathbb{R}^3$ waarvoor $z = f(x, y)$

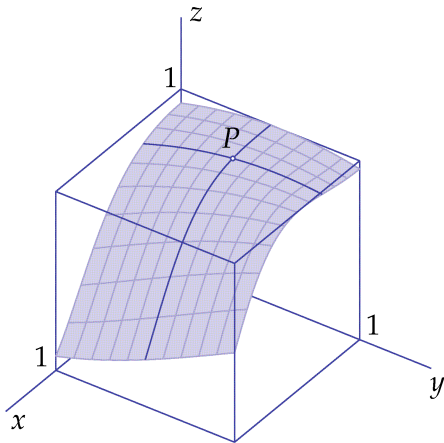
In het algemeen een gekromd oppervlak

Vaak met een *coördinatennet*, gevormd door lijnen op het oppervlak waar x danwel y constant is



Voorbeeldgrafiek

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (1 - \sin(2x^2 - y - 1))$$



Niveaulijnen

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (1 - \sin(2x^2 - y - 1))$$

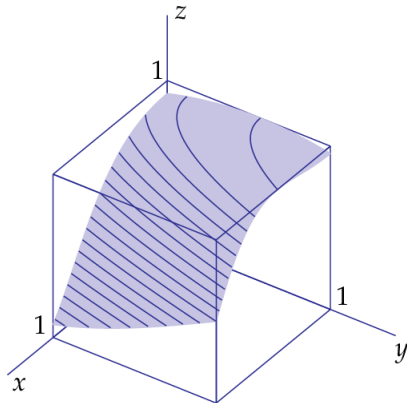
Punten op niveau 1:

$$\frac{1}{2} (1 - \sin(2x^2 - y - 1)) = 1$$

$$\sin(2x^2 - y - 1) = -1$$

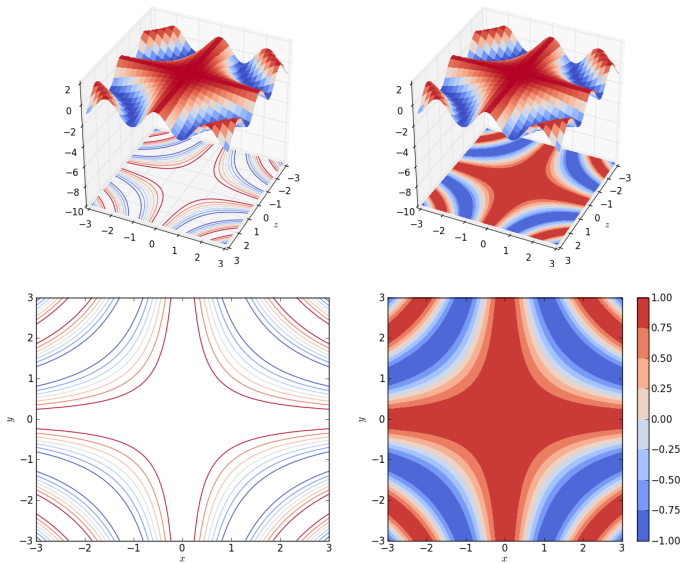
$$2x^2 - y - 1 = -\frac{1}{2}\pi$$

Grafiek met niveaulijnen:



Dit is een parabeol en hoogte 1

Contourgrafiek (ook opgevuld) van $z = \cos(xy)$



Differentiëren van functies van 2 of meer variabelen



Partiële afgeleide van orde 1

Als je bij een functie $f(x, y)$ de variable y constant houdt, wordt het een functie in 1 variabele x en kun je deze differentiëren.

Dit heet dan de **partiële afgeleide** van f naar x

Notatie: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$ en $f_x(x, y)$

Definities (ook voor partiële afgeleide van f naar y):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f(x, y + dy) - f(x, y)}{dy}$$



Rekenregels

$$\frac{\partial}{\partial x}(c \cdot f) = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{voor constante } c$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \pm g) = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$$



Voorbeeld

$$z = f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x - 6y$$

$$w = f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2x \quad \text{kettingregel}$$

Notatie voor partiële afgeleiden $f_x(a, b)$ en $f_y(a, b)$ in punt (a, b) :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{en} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$



Partiële afgeleide van orde 2 (en hoger)

Voorbeeld: $z = f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy + 3y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + 6xy + 12y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 4y, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4x + 6y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x + 6y, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x + 24y$$

Eigenschap voor gemengde partiële afgeleiden

Bij 'nette' functies doet de volgorde van partieel differentiëren er

niet toe: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Kettingregel: $z(x, y)$ met x en y functies van t

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Voorbeeld: $z(x, y) = x \cdot y$, $x = \cos t$ en $y = \sin t$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \sin(t) \cdot -\sin(t) + \cos(t) \cdot \cos(t)$$

$$= \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$$



Kettingregels

Kettingregel: $z(x, y)$ met x en y functies van s en t

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Voorbeeld: $z(x, y) = x \cdot y$, $x = s^2 + t^2$ en $y = s^2 - t^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= (s^2 - t^2)2s + (s^2 + t^2)2s = 4s^3$$



Speciaal geval: kettingregel bij poolcoördinaten

Als $z = f(x, y)$ met $x = r \cos \varphi$ en $y = r \sin \varphi$, dan geldt:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi$$



Raakvectoren en raakvlak



Raakvectoren

Raakvectoren aan coördinatenlijnen door het punt $P = (a, b, c)$ met $c = f(a, b)$.

In x-richting:

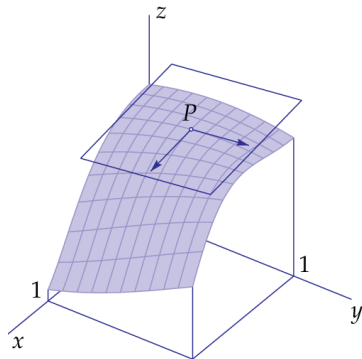
$$\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ f_x(a, b)dx \end{pmatrix} = \mathbf{r} dx$$

$$\text{met } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a, b) \end{pmatrix}$$

In y-richting:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ f_y(a, b)dy \end{pmatrix} = \mathbf{s} dy \quad \text{met} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

Situatieschets:



Vergelijking van een raakvlak

Raakvlak door het punt $P = (a, b, c)$ met $c = f(a, b)$.

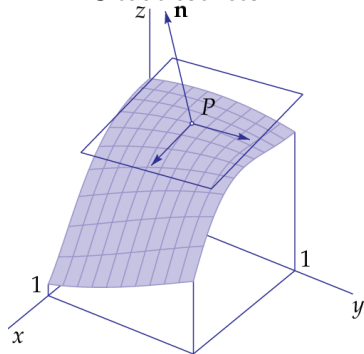
Raakvectoren $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a, b) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

Normaalvector $\mathbf{n}$ van raakvlak:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -f_x(a, b) \\ -f_y(a, b) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Situatieschets



Een vergelijking van het raakvlak (inproduct van $\mathbf{v} - \mathbf{P}$ met $\mathbf{n}$):

$$-f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b) + (z - c) = 0$$



Vergelijking van een raakvlak

Vergelijking van een raakvlak

Een vergelijking van het raakvlak in $P = (a, b, c)$ met $c = f(a, b)$ is

$$z = f(a, b) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} \cdot (x - a) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} \cdot (y - b)$$

Voorbeeld: $P = (-2, -2, -2)$ met $f(x, y) = y^2 - y + x^3$

Partiële afgeleiden in het punt $(-2, -2)$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(-2,-2)} = 3x^2 \Big|_{(-2,-2)} = 12 \quad \text{en} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(-2,-2)} = 2y - 1 \Big|_{(-2,-2)} = -5$$

Vergelijking raakvlak:

$$z = -2 + 12 \cdot (x + 2) + (-5) \cdot (y + 2) = 12x - 5y + 12$$



Taylorbenaderingen

Taylorbenadering van orde 1

Taylorbenadering van $f(x, y)$ rondom (a, b) van orde 1:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y$$

met $\Delta x = x - a$ en $\Delta y = y - b$.

Taylorbenadering van orde 2

Taylorbenadering van 'nette' $f(x, y)$ rondom (a, b) van orde 2:

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y \\ & + \frac{1}{2}(f_{xx}(a, b)\Delta x^2 + 2f_{xy}(a, b)\Delta x\Delta y + f_{yy}(a, b)\Delta y^2) \end{aligned}$$

met $\Delta x = x - a$ en $\Delta y = y - b$.



Taylorbenaderingen

Voorbeeld van een Taylorveelterm van graad 2

Benadering van $f(x, y) = x^2y - xy^2 - 3xy$ rondom $(1, 1)$:

$$f_x(x, y) = 2xy - y^2 - 3y, \quad f_y(x, y) = x^2 - 2xy - 3x,$$

$$f_{xx}(x, y) = 2y, \quad f_{xy}(x, y) = 2x - 2y - 3 \quad \text{en} \quad f_{yy}(x, y) = -2x.$$

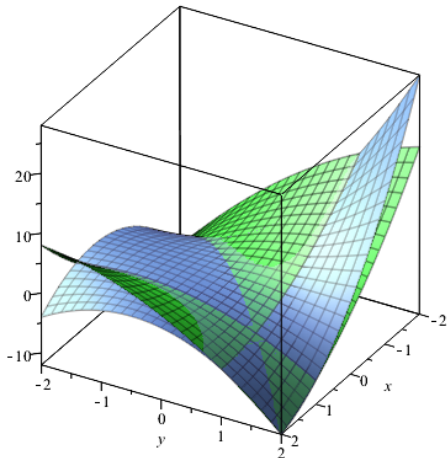
Invullen van de coördinaten van het punt $(1, 1)$ geeft:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= -3 - 2(x - 1) - 4(y - 1) + (x - 1)^2 \\ &\quad - 3(x - 1)(y - 1) - (y - 1)^2 \\ &= -x + y + x^2 - 3xy - y^2 \end{aligned}$$



Taylorbenaderingen

In de buurt van $(1, 1, -3)$ verschillen de oppervlakken van de oorspronkelijke functie (blauwe grafiek) en de kwadratische Taylorveelterm (groene grafiek) niet veel; verder weg wel.



Definitie

De **gradiënt** van een functie $f(x, y)$ is: $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$

Eigenschappen

De gradiënt in een punt in het xy -vlak geeft de richting aan waarin de functie f in het punt $(x, y, f(x, y))$ het sterkst toeneemt.

De gradiënt staat loodrecht op de contourlijn van $f(x, y)$ door dat punt.

De gradiënt is een normaalvector van de raaklijn in dat punt aan die contourlijn.

De vergelijking van de raaklijn is: $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$

Dus: $f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$



Voorbeeld van een raaklijn aan een kromme

Gevraagd: een vergelijking van de raaklijn in $(-1, 2)$ van de kromme gedefinieerd door $x^2 - xy + y^2 = 7$.

De kromme is een niveaulijn van $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

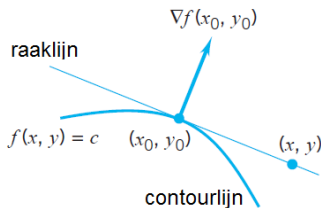
Partiële afgeleiden: $f_x(x, y) = 2x - y$ en $f_y(x, y) = -x + 2y$

Gradiënt van f in $(-1, 2)$ is $\nabla f(-1, 2) = \begin{pmatrix} f_x(-1, 2) \\ f_y(-1, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

De raaklijn: punten (x, y) met

$$\nabla f(-1, 2) \cdot \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} = 0$$

Dus: $-4(x + 1) + 5(y - 2) = 0$
oftewel $-4x + 5y = 14$.



Stationaire punten



Stationaire punten

Een **stationair punt** van een functie $f(x, y)$ is een punt waar de gradiënt gelijk is aan de nulvector.

Stationaire punten vind je door op te lossen

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Definieer de **Hessiaan** van f als $H(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$

Aard van een stationair punt (a, b) :

- lokaal minimum als $H(a, b) > 0$ en $f_{xx}(a, b) > 0$
- lokaal maximum als $H(a, b) > 0$ en $f_{xx}(a, b) < 0$
- zadelpunt als $H(a, b) < 0$



Voorbeeld van zadelpunt

$$f(x, y) = \frac{1}{2}((1 - (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2)$$

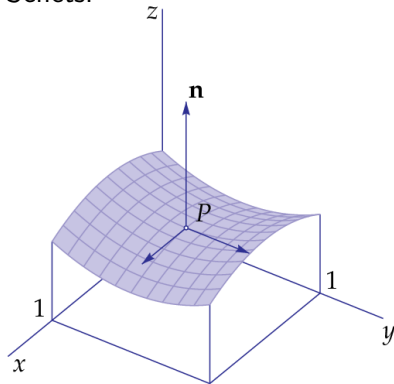
$$f_x(x, y) = \frac{1}{2} - x \text{ en}$$

$$f_y(x, y) = y - \frac{1}{2}$$

stationair punt: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Langs coördinaatlijnen zowel dal- als bergparabool.

Schets:



Voorbeeld van extrema en zadelpunten vinden

$$f(x, y) = 3x^2y + xy^2 - 3xy$$

Partiële afgeleiden:

$$f_x(x, y) = 6xy + y^2 - 3y \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = 3x^2 + 2xy - 3x$$

Stationaire punten zijn oplossingen van

$$\begin{cases} 6xy + y^2 - 3y = 0 \\ 3x^2 + 2xy - 3x = 0 \end{cases}$$

Ontbinden in factoren:

$$\begin{cases} y(6x + y - 3) = 0 \\ x(3x + 2y - 3) = 0 \end{cases}$$



Voorbeeld van extrema en zadelpunten vinden

Oplossingen (4 gevallen onderscheiden):

- $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x = 0 \\ 6x + y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} 6x + y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -3y + 3 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vier oplossingen: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,3)$ en $(\frac{1}{3},1)$.



Voorbeeld van extrema en zadelpunten vinden

Partiële afgeleiden van orde 2:

$$f_{xx}(x, y) = 6y, \quad f_{xy}(x, y) = 6x + 2y - 3, \quad f_{yy}(x, y) = 2x.$$

Schema:

(a, b)	$f_{xx}(a, b)$	$f_{xy}(a, b)$	$f_{yy}(a, b)$	$H(a, b)$	<i>conclusie</i>
$(0, 0)$	0	-3	0	-9	zadelpunt
$(1, 0)$	0	3	2	-9	zadelpunt
$(0, 3)$	18	3	0	-9	zadelpunt
$(\frac{1}{3}, 1)$	6	1	$\frac{2}{3}$	3	minimum



Voorbeeld van extrema en zadelpunten vinden

Grafiek van $f(x, y) = 3x^2y + xy^2 - 3xy$

