

Huiswerk 4 voor Lineaire Algebra KI/INF

In deze vraagstukken noteren we een kolomvector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vaak als de ‘getransponeerde’ van een rijvector: $[a, b, c]^T$, omdat dat typografisch vriendelijker oogt, en papier bespaart. Dat is gebruikelijk in teksten over lineaire algebra.

De code Px.y betekent dat deze vraag past bij sectie x.y van Poole 4th edition.

1. (P5.1) Laat zien dat $\vec{x} - \vec{y}$ loodrecht staat op $\vec{x} + \vec{y}$ dan en slechts dan als $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$. Gebruik het dot product, maar maak ook een tekening.
2. (P5.2) Vind een basis voor de kern of nulruimte (‘kernel’ of ‘nullspace’) van $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, en verifieer dat die ruimte loodrecht staat op de rijruimte (‘row space’, de ruimte opgespannen door de getransponeerde rijvectoren). Splits $\vec{x} = [3, 3, 3]^T$ in een rijruimte-component $\vec{x}_r$ en een nulruimte-component $\vec{x}_n$.
3. (P5.2) Vind alle vectoren loodrecht op $[1, 4, 4, 1]^T$ en $[2, 9, 8, 2]^T$.
4. (P5.2) Vind het orthogonale complement van het vlak opgespannen door de vectoren $[1, 1, 2]^T$ en $[1, 2, 3]^T$ door de getransponeerden van die vectoren als rijen te nemen van A en $A\vec{x} = \vec{0}$ op te lossen. Let wel: het complement moet een lijn zijn!
5. (P5.2) Laat S de deelruimte zijn van $\mathbb{R}^4$ die alle vectoren $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ bevat waarvoor geldt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Vind een basis voor de ruimte $S^\perp$ (die alle vectoren loodrecht op S bevat).
6. (P5.2) Laat S een deelruimte zijn van $\mathbb{R}^n$. Leg uit wat $(S^\perp)^\perp = S$ betekent, en waarom het waar is.
7. (P5.2) (a) Vind de matrix van de orthogonale projectie P_1 op de lijn door $\vec{a} = [1, 3]^T$ en ook de matrix P_2 die orthogonaal projecteert op de lijn loodrecht op $\vec{a}$.
(b) Bereken $P_1 + P_2$ en $P_1 P_2$, en verklaar wat je opvalt.
8. (P5.2) Vind een matrix die ieder punt in het (x, y) -vlak loodrecht (orthogonaal) projecteert op de lijn $x + 2y = 0$.
9. (P7.3) Vind de orthogonale projectiematrix P op de ruimte opgespannen door $\vec{a}_1 = [1, 0, 1]^T$ en $\vec{a}_2 = [1, 1, -1]^T$.
10. (P5.2, P7.3) Projecteer $\vec{b} = [0, 3, 0]^T$ loodrecht op ieder van de orthonormale vectoren $\vec{a}_1 = [\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]^T$ en $\vec{a}_2 = [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]^T$ en vind vervolgens zijn projectie $\vec{p}$ op het vlak van $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_2$. Gebruik daarna de methode van P7.3 om hetzelfde in één keer te doen!
11. (P5.2)(vervolg) Vind ook de orthogonale projectie van $\vec{b} = [0, 3, 0]^T$ op $\vec{a}_3 = [\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^T$, tel de drie 1-dimensionale projecties op, en interpreteer het resultaat. Waarom is $P = \vec{a}_1 \vec{a}_1^T + \vec{a}_2 \vec{a}_2^T + \vec{a}_3 \vec{a}_3^T$ gelijk aan de identiteit?
12. (P5.2) Projecteer de vector $\vec{b} = [1, 2]^T$ loodrecht op twee niet-orthogonale vectoren $\vec{a}_1 = [1, 0]^T$ en $\vec{a}_2 = [1, 1]^T$. Laat zien dat de som van de twee orthogonale projecties niet gelijk is aan $\vec{b}$ (hoewel dat in het orthogonale geval wel zo zou zijn geweest).
13. (P5.3) Pas Gram-Schmidt toe op $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
14. (P5.3) Vind een orthonormale basis voor de deelruimte opgespannen door $\vec{a}_1 = [1, -1, 0, 0]^T$, $\vec{a}_2 = [0, 1, -1, 0]^T$, $\vec{a}_3 = [0, 0, 1, -1]^T$.

15. (P5.3) Pas Gram-Schmidt (GS) toe op $[1, -1, 0]^T$, $[0, 1, -1]^T$, $[1, 0, -1]^T$, om een orthonormale basis te vinden voor het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. (Hint: Wat is de dimensie van deze deelruimte, hoeveel niet-nulvectoren verwacht je uit GS?)
16. (P5.1) Is de matrix $R = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}$ orthogonaal? Beschrijf de actie van deze matrix.
17. (P5.1) Bepaal alle mogelijke a, b, c zodat de matrix $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} & 2/3 & a \\ 1/\sqrt{18} & 2/3 & b \\ -4/\sqrt{18} & 1/3 & c \end{bmatrix}$ een orthogonale matrix wordt.
18. (P5.2) Kwadrateer de matrix $P = \vec{a}\vec{a}^T/\vec{a}^T\vec{a}$, die op een lijn projecteert, en laat zien dat $P^2 = P$. (Hint: merk op dat $\vec{a}^T\vec{a}$ een scalar is.)
19. (P5.1) Laat zien dat de lengte van $A\vec{x}$ gelijk is aan de lengte van $A^T\vec{x}$ als $AA^T = A^TA$.
20. (P5.1) Als $\vec{u}$ een eenheidsvector is, laat dan zien dat $Q = I - 2\vec{u}\vec{u}^T$ een orthogonale matrix is. Bereken Q als $\vec{u}^T = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.
21. (P7.3) (2 pt, $\frac{1}{2}$ pt per vraag) Beschouw een linear systeem $A\vec{x} = \vec{b}$ waarbij $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.
- Maak een nauwkeurige tekening met daarin $\ker(A)$ en $(\ker(A))^\perp$ en $\text{im}(A^T)$ en de oplossingsverzameling S van het systeem $A\vec{x} = \vec{b}$.
 - Welke relatie bestaat er tussen $\ker(A)$ en $\text{im}(A^T)$, en waarom?
 - Welke relatie bestaat er tussen $\ker(A)$ en S , en waarom?
 - Vind de unieke vector $\vec{x}_0$ in de doorsnede van S en $(\ker(A))^\perp$, en teken hem ook. Wat is er te zeggen over de lengte van $\vec{x}_0$ ten opzichte van alle andere vectoren in S ?
22. (P7.3) Los op met de hand: $A\vec{x} = \vec{b}$ met de kleinste kwadraten methode als $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Noem de oplossing $\vec{x}_*$. Bereken $\vec{p} = A\vec{x}_*$ en verifieer dat de ‘fout’ $\vec{b} - \vec{p}$ loodrecht staat op de kolommen van A .
23. (P7.3) Het volgende systeem heeft geen oplossing:
- $$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \vec{b}.$$
- Los op en schets een rechte lijn die leidt tot de minimalisering van de kwadratische kostenfunctie $(C - D - 4)^2 + (C - 5)^2 + (C + D - 9)^2$. Wat is de projectie van $\vec{b}$ op de kolomruimte (‘image’) van A ?
24. (P7.3) Vind de beste rechte lijn (in de zin van kleinste kwadraten) aan de metingen
- $$b = 4 \text{ op } t = -2; \quad b = 3 \text{ op } t = -1; \quad b = 1 \text{ op } t = 0; \quad b = 0 \text{ op } t = 2.$$

Vind daarna de projectie van $\vec{b} = [4, 3, 1, 0]^T$ op de kolomruimte (het ‘image’) van

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

25. (P7.3) Uit een middeleeuws manuscript: “Een man van middelbare leeftijd werd uitgerekte tot de lengtes $L = 5, 6$ and 7 voeten door gewichten van $F = 1, 2$ and 4 Waterlandse tonnen.” Als je nu de wet van Hooke aanneemt (dat is $L = a + bF$), vind dan zijn gewone lengte door middel van de kleinste kwadraten methode. (Kan met de hand...)
26. (P7.3) **Bonus:** Als $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ en $\vec{q}_3$ orthonormale vectoren zijn, welke lineaire combinatie van $\vec{q}_1$ and $\vec{q}_2$ is dan de beste benadering voor $\vec{q}_3$?
27. (P7.3) **Bonus:** Als $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ orthonormaal zijn, welke lineaire combinatie van $\vec{q}_1$ and $\vec{q}_2$ is dan de beste benadering voor een vector $\vec{b}$? Verifieer dat de afwijking loodrecht staat op $\vec{q}_1$ en $\vec{q}_2$.
28. **Bonus:** (P5.3) (Hiervoor moet je de QR -decompositie wel lezen!) Bretscher probleem 5.2.22, met de hand.
29. Fit een kwadratisch polynoom aan de punten $(-1, 27)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$; gebruik software, en plot de datapunten en de oplossing.
30. Doe Bretscher Problem 5.4.36 met software en plot de datapunten en het resultaat van de beste fit.