

Eerste serie sommen

1. Een rij van n elementen, bijvoorbeeld de getallen 1 t.e.m. n , heeft $n!$ mogelijke volgordes.
 - (a) Beschrijf (in woorden) een (recursieve) algoritme die de permutaties van de getallen 1 t.e.m. n van klein naar groot (dus eerst alle rijen met 1 voorop, daarna alle rijen met 2 voorop etc. totdat je tenslotte $n, n-1, n-2, \dots, 1$ krijgt) produceert.
 - (b) Gegeven een getal $m < n!$ kunnen we ook de m -de volgorde van deze rij produceren, en dit kan *zonder* alle tussenliggende rijen op te schrijven. Bedenk een algoritme die dat doet. Laat $n = 25$ en $m = 5170403347176995327994763$. Welke permutatie van de getallen van 1 t.e.m. 25 zet uw algoritme op de m -de plaats?
 - (c) De complexiteit van deze algoritme is (veel) kleiner dan die van de algoritme die de permutaties van 1 t.e.m. n produceert en stopt na de m -de rij (die is nl $O(n!)$). Wat is een afschatting voor de complexiteit van deze algoritme?
 - (d) We kunnen ook de permutaties “van groot naar klein” opschrijven. Welke permutatie komt er nu op plaats 5170403347176995327994763?

Opm: De laatste twee items van deze opgave kunnen (nog net) met de hand, maar het is makkelijker een rekenmachine te gebruiken die faculteiten kan uitrekenen. U hoeft alleen het antwoord in te leveren, niet de berekening.

2. Onderzoek de volgende uitspraken op waarheid eerst voor functies $f(n) \in O(g(n))$ en vervolgens voor functies $f(n) \in \Omega(g(n))$. Opm: we gebruiken de (verkeerde) notatie $f(n)$ en $g(n)$ waar f en g correct zijn omdat dit in de literatuur gebruikelijk(er) is. Deze notaties geven ook aan dat we alleen functies van de positieve natuurlijke getallen naar de positieve reële getallen in beschouwing nemen.
 - (a) $f(n) + g(n) \in O(g(n))$.
 - (b) $f(n) \times g(n) \in O(g(n))$.
 - (c) $f(n) - g(n) \in O(f(n))$.
 - (d) $\frac{f(n)}{g(n)} \in \theta(f(n))$.
3. We hebben op het college definities gezien voor de klassen $O(f)$, $o(f)$ en nog een aantal aanverwante klassen.
 - (a) Leg uit wat een bruikbare betekenis kan zijn voor $o(1)$ en de daaruit volgende functieklassen $n^{o(1)}$.
 - (b) Geef een voorbeeld van een functie f met $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$ en $f \in n^{o(1)}$.
4. Maak van de volgende functies functieklassen met O , Ω en θ , en zet de gemaakte functieklassen achtereenvolgens (dus eerst met O , dan met Ω en tenslotte met θ) in de juiste volgorde met $\subset$, $\supset$ en $=$ en gebruik $<>$ als ze onvergelijkbaar zijn, dus bijvoorbeeld $O(n) \subset O(n^2) \subset O(n^3)$, $O(6n) = O(0.5n)$ en $\theta(n^3) <> \theta(n^5)$. Beide definities van Ω zijn toegestaan, dwz. met constante of met limiet, maar zeg welke u gaat gebruiken.
 $2^n, 3^{\sqrt{n}}, \log n, n^{0.5}, n^2, 3n^4, 6n^3$.