

Opgaven werkcollege 1

Algoritmen en complexiteit

8 september 2015

1 Afschattingen

Definitie 1. Zij f en g functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$g \in O(f) \iff (\exists c, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(g(n) \leq cf(n)), \quad (\leq)$$

$$\begin{aligned} g \in o(f) &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(g(n) < \varepsilon f(n)) & (<) \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \in \Omega(f) &\iff g \notin o(f) & (\geq) \\ &\iff (\exists \varepsilon > 0)(\exists^\infty n_i) \left(\frac{g(n_i)}{f(n_i)} > \varepsilon \right) \end{aligned}$$

$$g \in \omega(f) \iff f \in o(g) \quad (>)$$

$$g \in \theta(f) \iff g \in O(f) \cap \Omega(f) \quad (=)$$

$$g \in \sim(f) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1$$

Opgave 1. Bewijs:

- (a) $pn^3 + qn^2 + rn + s \in O(n^3)$, voor $p, q, r, s \in \mathbb{N}$
- (b) $\sin(n) \in O(1)$ en $\sin(n) \notin o(1)$
- (c) $n^2 \in \Omega(n^2/2)$
- (d) $\log n \in O(n)$
- (e) $(\log n)^a \in O(n^b)$, voor $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ (**extra**)

Opgave 2. Bewijs dat $O(f + g) = O(\max\{f, g\})$. (Hint: bewijs ' $\subseteq$ ' en ' $\supseteq$ '.)

Opgave 3. Geef aan welke relaties $f \in \bullet(g)$ gelden voor $\bullet \in \{O, o, \sim, \Omega, \theta\}$ in de volgende gevallen:

- (a) $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^3$; $g(x) = x^6$,
- (b) $f(x) = 2^x$; $g(x) = 3^x$.

2 Recurrente betrekkingen

Voor de volgende opgaven gebruiken we de versimpelde versie van de stelling van Akra en Bazzi.

Stelling 1 (Versimpelde versie Akra-Bazzi). *Zij T een recurrente betrekking van de vorm*

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{als } n < d, \\ aT(n/b) + f(n) & \text{als } n \geq d, \end{cases}$$

met n een macht van b . We onderscheiden drie gevallen.

1. *Als $\exists \varepsilon > 0$ zodat $f(n) \in O(n^{\log_b(a)-\varepsilon})$ dan $T(n) \in \theta(n^{\log_b(a)})$.*
2. *Als $\exists \varepsilon > 0$ zodat $f(n) \in \theta(n^{\log_b(a)} \log^k(n))$ voor een $k \in \mathbb{N}$ dan $T(n) \in \theta(n^{\log_b(a)} \log^{k+1}(n))$.*
3. *Als $\exists \varepsilon > 0$ zodat $f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a)+\varepsilon})$ en $(\exists \delta < 1)(af(n/b) \leq \delta f(n))$ dan $T(n) \in \theta(f(n))$.*

Opmerking. $\log^k(n)$ betekent $(\log(n))^k$.

Opgave 4. Bekijk de volgende recurrente betrekking:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ 2T(n/2) + u & \text{als } n > 1, \end{cases}$$

waarbij u een positieve constante is en n een macht van 2.

- (a) Geef zonder Stelling 1 te gebruiken een θ -afschatting voor $T(n)$. (Hint: schrijf de recursie uit.)
- (b) Bereken een θ -afschatting met Stelling 1.

Opgave 5. Los de volgende recurrente betrekking op:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ T(n/5) + \log n & \text{als } n > 1. \end{cases}$$

Opgave 6. Los op:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ T(n/3) + \sqrt{n} & \text{als } n > 1. \end{cases}$$

Opgave 7 (Extra). Bewijs met volledige inductie: als p een polynoom in i is van graad d , dan is $\sum_{i=0}^n p(i)$ een polynoom in n van graad $d+1$.